

考虑断面及纵向施工效应时支护圆形洞室黏弹解析分析

王华宁, 曹志远, 李 悅

(同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092)

摘要: 针对深埋圆形洞室, 用半径时变函数模拟断面开挖过程, 引入空间影响系数对力学模型进行修正以考虑纵向开挖影响。当岩体模拟为任一黏弹性材料时, 将方程拉普拉斯变换求得位移通解, 逆变换后代入边界条件确定待定函数, 最终得到用洞周面力表达的围岩应力、位移统一解。区分开挖与支护时段, 利用围岩与支护接触条件建立关于支护力的积分方程。当取 Boltzmann 黏弹模型时, 求解积分方程得到支护力的确切表达, 并可求得开挖过程及任意时刻支护后应力、位移分段解析表达。算例分析表明, 纵向推进速度越大, 位移越大; 断面开挖较快时纵向推进速度对位移的影响越显著。最终洞型和纵向推进速度均相同时, 采用不同断面开挖速度且挖完立即支护时, 开挖较快的情况位移变化较剧烈, 而支护后最终稳定位移较小。但是, 相应支护阶段产生的位移较大, 支护力也较大。文中导出的解可用于计算圆形洞室半径任意开挖并加支护后的应力、位移, 该方法也适用于其它黏弹模型岩体的施工分析。

关键词: 施工过程; 支护; 时变函数; 解析分析

中图分类号: TU457 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2011)08-1159-08

作者简介: 王华宁(1975-), 女, 山东潍坊人, 博士, 副教授, 硕士生导师, 主要从事岩土工程时变力学与施工力学的研究工作。E-mail: wanghn@tongji.edu.cn。

Analytic researches on lined circular tunnels in viscoelastic rock mass considering effects of cross-section and longitudinal construction

WANG Hua-ning, CAO Zhi-yuan, LI Yue

(School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The tunnel excavation and support are continuous processes. A time-varying function of radius is established to simulate the excavation process of a circular tunnel. The general solutions of stresses and displacements of viscoelastic rock mass with elastic support during construction are derived by the Laplace transformation method, which contains the undetermined supporting force. An integral equation for the supporting force is established based on the contact conditions between the rock mass and the support. By means of Boltzmann viscoelastic model, the supporting force can be calculated exactly. The example shows that the displacement is larger when the longitudinal excavation velocity is higher. Besides, the effect of the longitudinal excavation is more clear when the cross-section is excavated faster. If the final tunnel is in the same size and supported immediately at the finishing time but excavated with different velocities, the displacement of cases with high velocity is larger at the beginning and smaller after some time. The final steady displacement is also smaller when excavated faster, but the displacement occurring after supporting is larger. The solutions can be employed to calculate the displacements and stresses of arbitrary time-varying radius. The proposed method is suitable for the analysis of other viscoelastic models.

Key words: construction process; support; time-varying function; analytic research

0 引言

受长期地质作用影响, 软岩及某些深部岩体具有显著流变性。在该类岩体中进行洞室施工时, 围岩应力调整和变形与时间相关。另外孔口从无到有, 不是一蹴而就, 开挖具有阶段性和连续性, 不同开挖方式造成应力和位移时程变化也不同。开挖完成后, 要对洞口进行支护以减小变形, 较经济的支护方式是用混

凝土对围岩进行封闭支护。开挖与支护过程中围岩变形及支护与围岩间支护力的大小是控制变形和支护设计的重要依据。已有的支护洞室理论研究中, 主要针对黏弹性岩体中圆形洞室的平面应变问题展开, 且认

基金项目: 国家自然科学基金项目(10702052); 上海市自然科学基金项目(11ZR1438700)

收稿日期: 2010-06-04

为洞室瞬时开挖完成^[1]。文献[2]提出修正 Maxwell 黏弹模型, 对体积不可压缩的无限岩体中圆洞进行力学分析, 用直接解方程法得到应力和位移表达, 探讨了弹性支护和围岩的相互作用关系。文献[3]针对模拟为 Poynting-Thomson 体的岩体, 考虑薄壁支护为 Maxwell 体, 对圆形巷道进行力学分析。在此基础上将支护阶段分成若干区间, 取不同参数以反映支护材料力学性质的变化。文献[4]采用蠕变柔量法得到任意受力形式圆形巷道围岩弹性支护系统应力与变形的时间效应。文献[5]考虑地下衬砌分段施工, 针对空间轴对称衬砌结构和荷载的情形, 给出了弹性问题变几何应力的解析解。文献[6]用积分算子法得到固定边界问题黏弹性解与弹性解的对应关系, 并利用该关系得到双向不等压圆形洞室带弹性支护的黏弹性围岩应力、位移解析解。文献[7]将释放荷载看成时间函数以反映纵向开挖空间效应的影响, 用拉普拉斯变化法推演了均匀地应力下圆形洞室围岩与支护之间相互作用的时效规律。

当考虑洞室开挖过程, 即开挖边界随时间变化, 从力学角度是一变边界时变力学问题。对边界增长问题, 文献[8]给出增长时变体特点及应满足的方程。文献[9]针对轴对称问题分析了时变方程的简化。文献[10]分析了时变协调方程的独立性问题。文献[11]给出时变固体力学黏弹性问题与弹性问题的一类对应关系。当岩体模拟为 Maxwell 模型并且体积不可压缩时, 文献[12]由直接解方程法得到了圆洞扩展时的解析解, 但未涉及支护问题。文献[13]则给出了 H-Kelvin 模型的解。岩土工程数值分析中, 在每步开挖边界处施加“释放荷载”是常用的模拟方法。这是基于 Mana^[14]提出的用于基坑开挖的有限元方法。后来, Borja 等^[15]及 Richard 等^[16]完善该法并应用于各种开挖过程。至今大型复杂地下工程考虑施工过程数值模拟仍然基于 Mana 法^[17]。本文研究黏弹岩体中圆形洞室开挖并在某时刻施加弹性支护问题, 把开挖和支护施工看成连续过程, 用解析方法推导开挖过程及支护后围岩应力和位移的时效规律以及支护力的变化规律, 以期从理论上得到不同开挖方式和支护时刻对应力和位移影响。

1 计算模型

围岩假定为均匀、连续、各向同性黏弹性体, 在其中开挖半径为 R_1 的圆形洞室并施加支护。洞室开挖包括断面开挖和垂直断面的纵向开挖。若不考虑纵向施工影响, 该问题可转化为平面问题: 洞室半径由零开挖至 R_1 , 并开挖完毕后立即或某段时间后瞬时施加弹性支护。对某些深埋洞室, 可不考虑岩体自重, 并认为受双向等地应力作用。断面施工过程分为两个阶

段: 支护未施加前为开挖阶段, 开挖半径逐渐变大, 开挖边界处径向应力为零; t_1 时刻施加支护后为带支护阶段, 由于围岩进一步变形, 和支护接触处存在与时间相关的支护力 $p(t)$ 。图 1 为围岩与支护力学模型, 其中 p_0 为作用于无限远处地应力; $R(t)$ 为开挖函数, 表示半径开挖路径。设 $t=0$ 时刻瞬时开挖半径为 R_0 的岩体, 开挖函数表达为

$$R(t) = \begin{cases} R_0 + a(t) & (0 \leq t < T) \\ R_1 & (t \geq T) \end{cases}, \quad (1)$$

式中, $a(t)$ 为由实际开挖过程确定的任意函数, T 称为完工时刻。作用于洞周面力 $p_1(t)$ 在 $[0, t_1]$ 时段为零, 在 $[t_1, \infty)$ 时段为 $p(t)$ 。

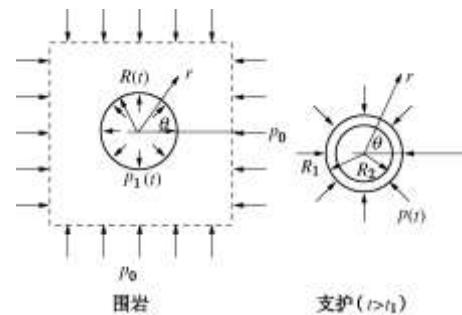


图 1 围岩与支护计算模型

Fig. 1 Sketch of rock mass and support

在实际施工中, 纵向并非一次成型, 工作面前方未开挖岩体的空间约束作用, 使围岩位移随离工作面距离大小而变化^[18-19]。文献[7]综合有限元计算结果, 给出两向等压时计算断面的释放荷载与纵向开挖速度和时间的指数关系的变化规律, 也可这样认为: 受工作面空间作用的影响, 简化成平面问题时, p_0 并非一直是初始地应力, 应当修正成与时间相关的函数。借鉴文献[7]的结果, 认为 p_0 的变化规律为

$$p_0(t) = p_{01}(1 - 0.7e^{-mt}) \quad (2)$$

式中, p_{01} 为初始地应力, 空间影响系数 $m = 3.15V/2R_s$, V 为工作面平均推进速度, R_s 是与开挖半径有关的量, 断面一次成型时 $R_s = R_1$, 断面分部开挖时可根据实际情况选择介于 R_0 和 R_1 之间的某数值。

2 施工过程解析分析

分别研究围岩与支护结构, 采用柱坐标系 r, θ, z 描述, 垂直于纸面为 z 轴。本问题属于平面应变轴对称问题。

2.1 支护结构力学分析

将支护视为弹性材料, 并在某时刻瞬时施加。 E_c , μ_c 分别为弹性模量和泊松比。径向位移为

$$u_c^r(r, t) = -\frac{1}{2G_c r} \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} p(t) - \frac{1 + \mu_c}{K_c} \frac{R_1^2 r}{R_1^2 - R_2^2} p(t)$$

$$(t \geq t_1) \quad , \quad (3)$$

式中, G_c 为剪切模量, K_c 为体应变模量。应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rc}^e &= -(1 - \frac{R_2^2}{r^2}) \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} p(t) , \\ \sigma_{\theta c}^e &= -(1 + \frac{R_2^2}{r^2}) \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} p(t) . \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2.2 围岩解析分析

对围岩来讲, 边界以及边界处部分应力与时间相关, 边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rR}^v(R(t), t) &= -p_1(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < t_1) \\ -p(t) & (t \geq t_1) \end{cases} , \\ \sigma_{rR}^v(\infty, t) &= -p_0(t) . \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

下面试图求解满足该边界条件的围岩应力、位移表达, 然后可用接触条件确定未知面力 $p(t)$ 。围岩应满足平衡方程(体力不计):

$$\frac{\partial \sigma_{rR}^v(r, t)}{\partial r} + \frac{\sigma_{rR}^v(r, t) - \sigma_{\theta R}^v(r, t)}{r} = 0 , \quad (6)$$

几何方程为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{rR}^v &= \frac{\partial u_{rT}^v(r, t)}{\partial r} , \\ \varepsilon_{\theta T}^v &= \frac{u_{rR}^v(r, t)}{r} , \\ \varepsilon_{zR}^v &= 0 . \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

将岩体模拟为线性黏弹材料, 对任意一种黏弹模型, 可用 Stieltjes 卷积缩写形式表达积分型本构方程:

$$\left. \begin{aligned} \text{偏量: } s_{ijR}^v &= 2G(t) * d\epsilon_{ijR}^v , \\ \text{球量: } \sigma_{mR}^v &= 3K(t) * d\epsilon_{mR}^v , \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式(8)中卷积定义为($f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 为任意函数): $f_1(t) * d f_2(t) = f_1(t) f_2(0) + \int_0^t f_1(t - \tau) \frac{df_2(\tau)}{d\tau} d\tau$, 其中 $G(t)$,

$K(t)$ 为相应黏弹模型的松弛模量。

将式(7)代入式(8), 得到用位移表达的应力为

$$\sigma_{rR}^v = 2G(t) * d\left[\frac{2}{3} \frac{\partial u_{rR}^v}{\partial r} - \frac{1}{3} \frac{u_{rR}^v}{r}\right] + K(t) * d\left(\frac{\partial u_{rR}^v}{\partial r} + \frac{u_{rR}^v}{r}\right) , \quad (9a)$$

$$\sigma_{\theta R}^v = 2G(t) * d\left[\frac{2}{3} \frac{u_{rR}^v}{r} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_{rR}^v}{\partial r}\right] + K(t) * d\left(\frac{\partial u_{rR}^v}{\partial r} + \frac{u_{rR}^v}{r}\right) , \quad (9b)$$

$$\sigma_{zR}^v = [K(t) - \frac{2}{3}G(t)] * d\left(\frac{\partial u_{rR}^v}{\partial r} + \frac{u_{rR}^v}{r}\right) , \quad (9c)$$

将(9a)、(9b)代入式(6)得到位移应满足的方程:

$$[K(t) + \frac{4}{3}G(t)] * d\left(\frac{\partial^2 u_{rR}^v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{rR}^v}{\partial r} - \frac{u_{rR}^v}{r^2}\right) = 0 , \quad (10)$$

若 u_{rR}^v 满足拉普拉斯变换存在条件, 将式(10)两端作拉普拉斯变换, 并由微分性质得到位移在拉氏空间中应满足的方程:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_{rR}^v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_{rR}^v}{\partial r} - \frac{\bar{u}_{rR}^v}{r^2} = 0 , \quad (11)$$

式中, $\bar{(\cdot)}$ 表示对 (\cdot) 进行拉氏变换。 \bar{u}_{rT}^v 为 r, s 的函数, 解微分方程(11), 得到通解为

$$\bar{u}_{rR}^v = \frac{A(s)}{r} + rB(s) , \quad (12)$$

其中, $A(s), B(s)$ 为待定函数, 可由边界条件确定。

将应力表达式(9)拉普拉斯变换并带入式(12), 得到拉氏空间中应力:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{rR}^v &= \bar{2G(t)}s[-\frac{1}{r^2}A(s) + \frac{1}{3}B(s)] + 2\bar{K(t)}sB(s) , \\ \bar{\sigma}_{\theta R}^v &= \bar{2G(t)}s[\frac{1}{r^2}A(s) + \frac{1}{3}B(s)] + 2\bar{K(t)}sB(s) , \\ \bar{\sigma}_{zR}^v &= 2[\bar{K(t)} - \frac{2}{3}\bar{G(t)}]sB(s) , \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

逆变换后得到应力:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rR}^v &= -\frac{2}{r^2}L^{-1}[\bar{G(t)}sA(s)] + L^{-1}[(\frac{2}{3}\bar{G(t)} + 2\bar{K(t)})B(s)s] , \\ \sigma_{\theta R}^v &= \frac{2}{r^2}L^{-1}[\bar{G(t)}sA(s)] + L^{-1}[(\frac{2}{3}\bar{G(t)} + 2\bar{K(t)})B(s)s] , \\ \sigma_{zR}^v &= 2L^{-1}[\bar{K(t)}sB(s)] - \frac{2}{3}L^{-1}[\bar{G(t)}sB(s)] . \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

代入边界条件式(5)可求得

$$A(s) = -\frac{1}{2s\bar{G(t)}}[\bar{p}_0(t)\bar{R}^2(t) - \bar{p}_1(t)\bar{R}^2(t)] , \quad (15)$$

$$B(s) = -\frac{\bar{p}_0(t)}{2s} \frac{3}{\bar{G(t)} + 3\bar{K(t)}} , \quad (16)$$

代入式(14)得径向与环向应力:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rR}^v &= -p_0(t)[1 - \frac{R^2(t)}{r^2}] - p_1(t) \frac{R^2(t)}{r^2} , \\ \sigma_{\theta R}^v &= -p_0(t)[1 + \frac{R^2(t)}{r^2}] + p_1(t) \frac{R^2(t)}{r^2} , \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

代入式(12)并逆变换得到位移解答:

$$\left. \begin{aligned} u_{rR}^v &= -\frac{1}{2r}L^{-1}\left\{ \frac{1}{s\bar{G(t)}}[\bar{p}_0(t)\bar{R}^2(t) - \bar{p}_1(t)\bar{R}^2(t)] \right\} - \\ &\quad \frac{3}{2}rL^{-1}\left\{ \frac{\bar{p}_0(t)}{s} \frac{1}{\bar{G(t)} + 3\bar{K(t)}} \right\} . \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

取 Boltzmann 黏弹模型模拟岩体(图 2), 其中 G_1 , G 为剪切模量, η 为黏性系数。认为该岩石材料体积不可压缩, 即体应变模量 $K = \infty$, 这样式(18)得到的是从 $t = 0$ 起算的开挖位移。由本构方程可得 $G(t) =$

$$\frac{G_1^2}{G_1 + G} e^{-\frac{G_1 + G}{\eta}t} + \frac{G G_1}{G_1 + G} , \quad K(t) = \infty , \quad \text{代入式(18), 并}$$

利用拉式变换性质可得径向位移:

$$u_{rR}^v(r, t) = \frac{1}{2G_1 r} R^2(t)[p_1(t) - p_0(t)] +$$

$$\frac{1}{2\eta r} e^{-\frac{G}{\eta}t} \int_0^t R^2(\tau) [p_1(\tau) - p_0(\tau)] e^{\frac{G}{\eta}\tau} d\tau \quad (19)$$

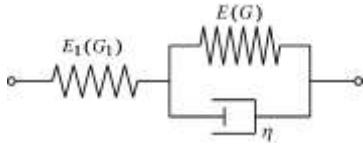


图 2 Boltzmann 黏弹模型

Fig. 2 Boltzmann viscoelasitic model

2.3 支护力求解

下面利用接触条件确定 $p(t)$ 。围岩与支护接触条件下, 应力协调已在边界条件中体现, 只需满足位移协调条件:

$$u_{rT}^v(R_1, t) - u_{rT}^v(R_1, t_1) = u_{rC}^v(R_1, t) \quad (t \geq t_1), \quad (20)$$

施加支护后($t > t_1$)围岩与支护接触处位移相比 t_1 时刻位移的增量:

$$\begin{aligned} u_{rT}^v(R_1, t) - u_{rT}^v(R_1, t_1) &= \frac{R_1}{2G_1} [p(t) - p_0(t) + p_0(t_1)] - \\ &\quad \frac{1}{2\eta R_1} e^{-\frac{G}{\eta}t} \left[\int_0^T p_0(\tau) R^2(\tau) e^{\frac{G}{\eta}\tau} d\tau - R_1^2 \int_{t_1}^t p(\tau) e^{\frac{G}{\eta}\tau} d\tau + \right. \\ &\quad \left. R_1^2 \int_T^t p_0(\tau) e^{\frac{G}{\eta}\tau} d\tau \right] + \frac{1}{2\eta R_1} e^{-\frac{G}{\eta}t_1} \left[\int_0^T p_0(\tau) R^2(\tau) e^{\frac{G}{\eta}\tau} d\tau + \right. \\ &\quad \left. R_1^2 \int_T^{t_1} p_0(\tau) e^{\frac{G}{\eta}\tau} d\tau \right], \end{aligned} \quad (21)$$

代入接触条件 (20) 并将两边同乘以 $e^{Gt/\eta}$, 令 $\varphi(t) = p(t) e^{Gt/\eta}$, 化简后得到关于 $\varphi(t)$ 的积分方程:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{R_1}{2G_1} + \frac{1}{2G_C} \frac{R_1 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} + \frac{1 + \mu_C}{K_C} \frac{R_1^3}{R_1^2 - R_2^2} \right) \varphi(t) \\ &= -\frac{1}{2\eta} R_1 \int_{t_1}^t \varphi(\tau) d\tau - \frac{1}{2\eta R_1} e^{-\frac{G}{\eta}t_1} e^{\frac{G}{\eta}t_1} \left[\int_0^T p_0(\tau) R^2(\tau) e^{\frac{G}{\eta}\tau} d\tau + \right. \\ &\quad \left. R_1^2 \int_T^{t_1} p_0(\tau) e^{\frac{G}{\eta}\tau} d\tau + \frac{R_1}{2G_1} \right] + \frac{R_1}{\eta} [p(t) - e^{-\frac{G}{\eta}t_1} p_0(t_1)] + \\ &\quad \frac{1}{2\eta} R_1 \int_T^t p_0(\tau) e^{\frac{G}{\eta}\tau} d\tau + \frac{1}{2\eta R_1} \int_0^T p_0(\tau) R^2(\tau) e^{\frac{G}{\eta}\tau} d\tau, \quad (22) \end{aligned}$$

$$\text{令 } A = \frac{R_1}{2G_1} + \frac{1}{2G_C} \frac{R_1 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} + \frac{1 + \mu_C}{K_C} \frac{R_1^3}{R_1^2 - R_2^2}, \quad \lambda =$$

$$-\frac{R_1}{2A\eta}, \quad f(t) = \frac{R_1}{2AG_1} [e^{\frac{G}{\eta}t} p_0(t) - e^{-\frac{G}{\eta}t} p_0(t_1)] + \frac{1}{2\eta A}.$$

$$[R_1 \int_T^{t_1} p_0(\tau) e^{\frac{G}{\eta}\tau} d\tau + \frac{1}{R_1} \int_0^T p_0(\tau) R^2(\tau) e^{\frac{G}{\eta}\tau} d\tau] (1 - e^{\frac{G}{\eta}t_1} e^{-\frac{G}{\eta}t_1}) +$$

$$\frac{R_1}{2\eta A} \int_{t_1}^t p_0(\tau) e^{\frac{G}{\eta}\tau} d\tau, \text{ 得关于 } \varphi(t) \text{ 的标准形式积分方程:}$$

$$\varphi(t) = \lambda \int_{t_1}^t k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau + f(t), \quad (23)$$

式中, $k(t, \tau) = 1$ 。

式 (23) 属于第二类 Volterra 积分方程。根据积分方程的解法, 其迭核

$$\left. \begin{aligned} k_1(t, \tau) &= k(t, \tau) = 1, \\ k_2(t, \tau) &= \int_{t_1}^t k(t, u) k_1(u, \tau) du = t - \tau, \\ k_3(t, \tau) &= \int_{t_1}^t k(t, u) k_2(u, \tau) du = (t - \tau)^2 / 2, \\ \dots \\ k_n(t, \tau) &= (t - \tau)^{n-1} / (n-1)! \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

则解核

$$W(t, \tau, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} k_n(t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{\lambda(t-\tau)}, \quad (25)$$

积分方程的解:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(t) + \lambda \int_{t_1}^t W(t, \tau, \lambda) f(\tau) d\tau \\ &= f(t) + \lambda \int_{t_1}^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (26)$$

代入 $p_0(t)$ 的表达并化简, 最终得到支护力为

$$\begin{aligned} p(t) &= -\frac{0.7 p_{01} R_1}{2AG_1} \frac{G - m\eta}{G - \lambda\eta - m\eta} e^{-mt} + \frac{0.7 p_{01} R_1 G}{2AG_1 (G - \lambda\eta)} e^{-mt_1} + \\ &\quad \lambda \frac{0.7 p_{01} R_1 m\eta^2}{2AG_1 (G - \lambda\eta - m\eta)(G - \lambda\eta)} e^{-mt_1} e^{\frac{(\lambda - \frac{G}{\eta})(t - t_1)}{\eta}} + \\ &\quad \frac{B}{2A} \frac{G p_{01}}{G - \lambda\eta} e^{-\frac{G}{\eta}t_1} [e^{\frac{(\lambda - \frac{G}{\eta})(t - t_1)}{\eta}} - 1], \end{aligned} \quad (27)$$

式中, $B = -\frac{R_1}{G} e^{\frac{G}{\eta}T} + \frac{0.7 R_1}{-m\eta + G} e^{(-m + \frac{G}{\eta})T} + \frac{1}{\eta R_1} \int_0^T (1 - 0.7 e^{-mt}) R^2(\tau) e^{\frac{G}{\eta}\tau} d\tau$, 其值与半径时变过程相关。将式 (27) 代入式 (19), 区分不同时段可积分得到位移表达。若以支护时刻为时间零点, 考察支护力相对 $\Delta t = t - t_1$ 的变化。由式 (27) 得到支护力为

$$\begin{aligned} p(\Delta t) &= -\frac{0.7 p_{01} R_1}{2AG_1} \frac{G - m\eta}{G - \lambda\eta - m\eta} e^{-m(t_1 + \Delta t)} + \\ &\quad \frac{0.7 p_{01} R_1 G}{2AG_1 (G - \lambda\eta)} e^{-mt_1} + \frac{B}{2A} \frac{G p_{01}}{G - \lambda\eta} e^{-\frac{G}{\eta}t_1} [e^{\frac{(\lambda - \frac{G}{\eta})\Delta t}{\eta}} - 1] + \\ &\quad \lambda \frac{0.7 p_{01} R_1}{2AG_1} \frac{m\eta^2}{(G - \lambda\eta - m\eta)(G - \lambda\eta)} e^{-mt_1} e^{\frac{(\lambda - \frac{G}{\eta})\Delta t}{\eta}}, \end{aligned} \quad (28)$$

可见, 支护力关于 $\Delta t = t - t_1$ 的变化形态与支护时间、开挖过程相关。

将式 (27) 代入式 (17), 得到径向与环向应力: 当 $0 \leq t < t_1$,

$$\sigma_{rT}^v = -p_{01} (1 - 0.7 e^{-mt}) [1 - R^2(t) / r^2], \quad (29a)$$

$$\sigma_{\theta T}^v = -p_{01} (1 - 0.7 e^{-mt}) [1 + R^2(t) / r^2], \quad (29b)$$

当 $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned} \sigma_{rt}^v = & -p_{01}(1-0.7e^{-mt}) - \frac{R_1^2}{r^2} \{-p_{01}(1-0.7e^{-mt}) - \\ & \frac{0.7p_{01}R_1}{2AG_1} \frac{G-m\eta}{G-\lambda\eta-m\eta} e^{-mt} + \frac{0.7p_{01}R_1}{2AG_1} \frac{G}{G-\lambda\eta} e^{-mt_1} + \\ & \lambda \frac{0.7p_{01}R_1}{2AG_1} \frac{m\eta^2}{(G-\lambda\eta-m\eta)(G-\lambda\eta)} e^{-mt_1} e^{(\lambda-\frac{G}{\eta})(t-t_1)} + \\ & \frac{B}{2A} \frac{Gp_{01}}{G-\lambda\eta} e^{-\frac{G}{\eta}t_1} [e^{(\lambda-\frac{G}{\eta})(t-t_1)} - 1] \} \quad (29c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta r}^v = & -p_{01}(1-0.7e^{-mt}) + \frac{R_1^2}{r^2} \{-p_{01}(1-0.7e^{-mt}) - \\ & \frac{0.7p_{01}R_1}{2AG_1} \frac{G-m\eta}{G-\lambda\eta-m\eta} e^{-mt} + \frac{0.7p_{01}R_1}{2AG_1} \frac{G}{G-\lambda\eta} e^{-mt_1} + \\ & \lambda \frac{0.7p_{01}R_1}{2AG_1} \frac{m\eta^2}{(G-\lambda\eta-m\eta)(G-\lambda\eta)} e^{-mt_1} e^{(\lambda-\frac{G}{\eta})(t-t_1)} + \\ & \frac{B}{2A} \frac{Gp_{01}}{G-\lambda\eta} e^{-\frac{G}{\eta}t_1} [e^{(\lambda-\frac{G}{\eta})(t-t_1)} - 1] \} \quad (29d) \end{aligned}$$

可见, 支护后围岩应力与开挖过程相关。

3 算例分析

在埋深 200 m 左右开挖一圆形洞室, 围岩主要为泥岩和砂岩, 重度 $\gamma = 26.3 \text{ kN/m}^3$ 。认为受双向等地应力作用, $p_0 = 5.2 \text{ MPa}$ 。测得岩石材料参数: $G = 458 \text{ MPa}$, $G_1 = 550 \text{ MPa}$, $\eta = 4000 \text{ MPa/d}$; 衬砌为混凝土材料, 剪切模量为 $G_C = 10000 \text{ MPa}$, $\mu_C = 0.2$, 计算可得 $K_C = 40000 \text{ MPa}$ 。初始洞型半径 $R_0 = 1 \text{ m}$, 最终洞型半径 $R_1 = 6 \text{ m}$ 。支护厚度 $d = 150 \text{ mm}$, 即 $R_2 = 5.85 \text{ m}$ 。实际上, 开挖过程可能是分部进行(如台阶法开挖), 可取式(1)中 $R(t)$ 为

$$R(t) = \begin{cases} R_0 & (0 \leq t < t_{01}) \\ R_{01} & (t_{01} \leq t < t_{02}) \\ R_{02} & (t_{02} \leq t < T) \\ R_1 & (t \geq T) \end{cases} \quad (30)$$

式中 取完工时刻 $T = 5 \text{ d}$; t_{01} , t_{02} 分别为 2 d 与 4 d; R_{01} , R_{02} 分别为 3 m 与 5 m。若纵向开挖速度为 2 m/d, 则 $m = 0.53$ 。完工后立即支护, 图 3 实线为该时变方式下 $r = 6 \text{ m}$ 处位移与应力变化。若将式(30)中时变函数的开挖时段拟合为连续线性函数:

$$R(t) = R_0 + vt \quad (0 \leq t < T) \quad (31)$$

其中 $v = 1 \text{ m/d}$, 完工时刻 $T = 5 \text{ d}$ 。 T 及 t_{01} , t_{02} 时刻半径均与台阶法相同。图 3 中虚线即为连续时变下的

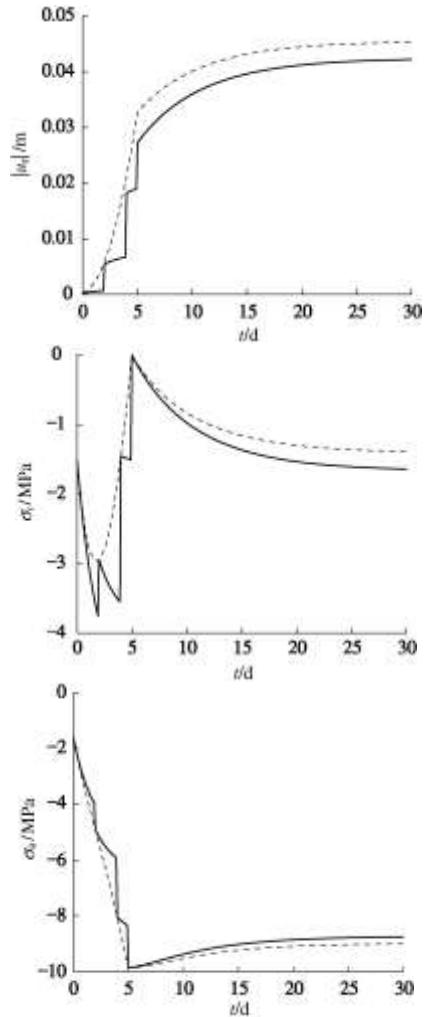


图 3 台阶式施工法与连续施工法比较

Fig. 3 Comparison between stepped and continuous construction method

位移与应力变化。可见, 两者的变化趋势相似。为更直观描述不同开挖过程对应力、位移的影响, 以下用半径线性连续变化模拟一类施工过程, 其他施工方式分析也可同样得到。对开挖问题, 径向位移指向洞心, 为负值。为方便分析, 下面图中表示均为径向位移绝对值变化, 以下简称为位移。

3.1 空间影响系数对位移与应力影响

保持结构初始和最终形状不变, 即 R_0 , R_1 不变, 衬砌厚度也不变, 完工后立即施加支护。对应不同纵向推进速度, 取表 1 中 4 种 m 值。图 4 给出围岩与支护接触处的位移时程对比图。图 4 (a) 为断面时变速度 $v = 1 \text{ m/d}$ 情况; 图 4 (b) 为 $v = 5 \text{ m/d}$ 。考虑空间作用 (m 为有限值) 和不考虑空间作用 (m 无穷) 的位移曲线形态相似。当 m 值越大, 位移达到稳定的时间越短, 且位移较大。从实际分析, 纵向推进较快时, 后部围岩的空间作用始终较弱, 支护力较大, 则位移大且变化迅速。计算结果与实际相符。不同开挖速度的对比可以看出, 断面开挖较快时纵向推进速度对位移的影响越显著。因此, 围岩条件差的情况一般采用

较慢的断面开挖与纵向推进速度以使位移缓慢释放。图 5 为考虑空间作用与不考虑空间作用的应力对比。实线为不考虑空间作用情况 ($m=\infty$)，虚线为 $m=0.53$ 情况。考虑空间作用后，开挖阶段径向应力和环向应力绝对值均变小，径向应力形态也不同，其绝对值呈现先变大后变小的趋势。支护阶段应力形态相似，相比无空间作用情况，径向应力绝对值变大，环向应力绝对值变小，洞室处于更加稳定状态。

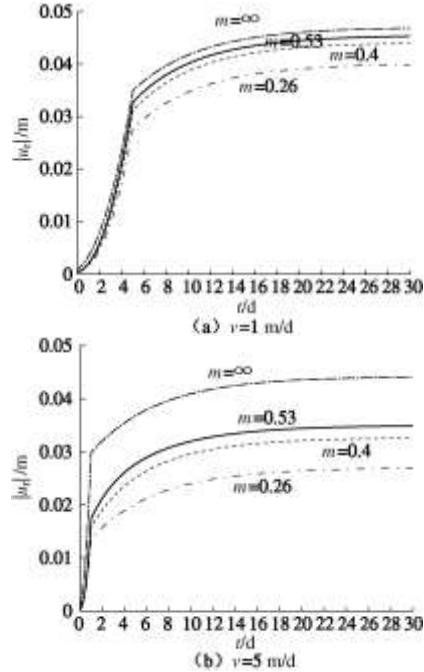


图 4 不同 m 值的位移时程对比

Fig. 4 Comparison of displacements under different values of parameter m

表 1 4 种情况空间作用系数 m

Table 1 Space coefficient m of four cases

情况	纵向推进速度 $v/(m \cdot d^{-1})$	半径参数 R_s/m	空间作用系数 $m/(d^{-1})$
1	∞	6.0	∞
2	2.00	6.0	0.53
3	1.50	6.0	0.40
4	1.00	6.0	0.26

3.2 开挖过程对位移与应力影响

保持结构初始和最终形状不变，并在完工后立即施加同样厚度 (150 mm) 的支护。取式 (31) 中开挖速度 v 为 0.5, 1, 5 m/d，完工时刻 T 分别为 10 d, 5 d, 1 d。空间作用系数 $m=0.53$ 。图 6 为 3 种情况 $r=6$ m 处位移和径向、切向应力的时程变化，标记处为完工时刻。表 2 给出不同时刻位移值。可见，刚施加支护的一段时间内，同一时刻，开挖越快，位移越大；而经历一段时间后，开挖越快，位移越小。不同开挖速度下较快开挖完并支护的情况稳定位移较小，但位移

变化相对比较剧烈。本例中，10 d 挖完比 1 d 挖完的稳定位移大 29.3%。由于支护前是一毛洞开挖过程，由以前结论，该阶段应力只与结构当前形状有关。因挖完时刻洞型相同，所以不同开挖过程在完工时刻应力值相同。但在支护阶段，较快开挖方式稳定径向正应力绝对值较大，而稳定环向正应力绝对值较小。

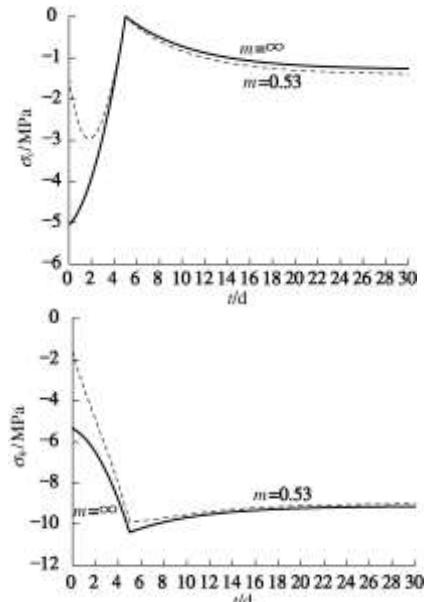


图 5 不同 m 值的应力时程对比

Fig. 5 Comparison of stresses under different values of parameter m

3.3 支护时刻对位移、应力的影响

下面分析不同时刻支护时的位移规律。保持结构初始和最终形状不变，并施加如上相同厚度的支护，即 R_0 , R_1 , R_2 不变，断面开挖速度 v 均取 1 m/d，完工时刻均为 5 d。完工后，分别在 5 d, 10 d, 20 d (t_1 时刻) 时施加支护。图 7 为上述 3 种情况 $r=6$ m 处位移与应力时程对比。可见，越早支护，可较快收敛至更小的稳定位移。越早支护，径向正应力绝对值越大，环向正应力绝对值越小。

3.4 支护阶段支护力规律

支护位移与支护力的变化相当，下面仅研究支护力的变化规律。仍保持结构初始和最终形状不变，取开挖速度 v 为 3.2 节中的 3 种情况。图 8 (a) 为完工后立即加支护，支护力随时间 $\Delta t=t-t_1$ 的变化规律。断面开挖速度越快，则支护力越大，即支护承担了大部分蠕变压力。因此，越快开挖可使围岩总位移减小，稳定性提高，但同时支护将承受较大的力，且支护阶段位移较大。

表 2 不同开挖速度位移

Table 2 Values of displacements at different construction velocities

开挖速度/(m·d ⁻¹)	$ u_{rt}^v /m$							
	0 d	1 d	5 d	10 d	14 d	18 d	22 d	∞
0.5	0.0002	0.0011	0.0113	0.0393	0.0443	0.0468	0.0481	0.0495
1.0	0.0002	0.0020	0.0327	0.0401	0.0427	0.0441	0.0448	0.0455
5.0	0.0002	0.0174	0.0277	0.0320	0.0335	0.0342	0.0346	0.0350

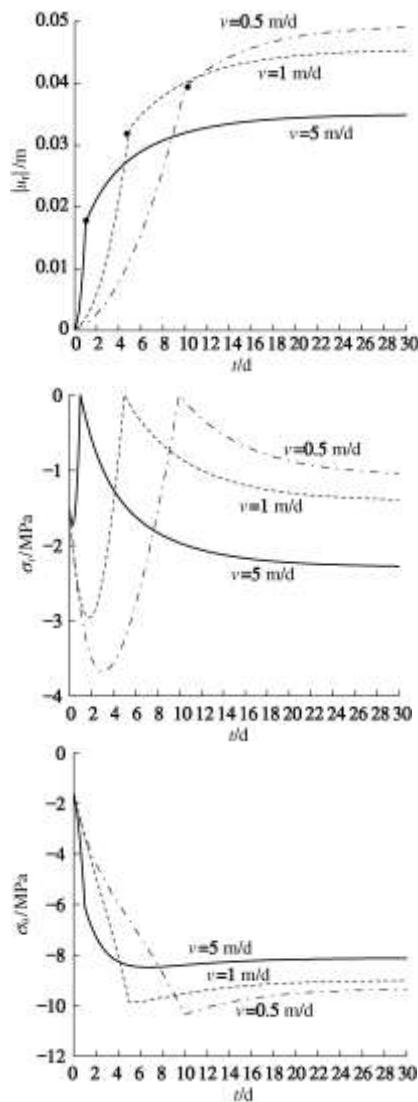


图6 不同开挖速度位移与应力时程对比

Fig. 6 Comparison of displacements and stresses at different construction velocities

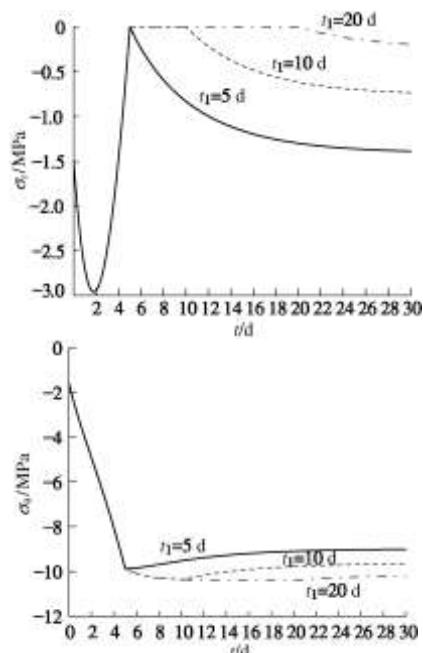
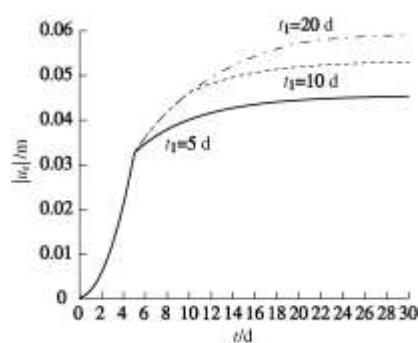
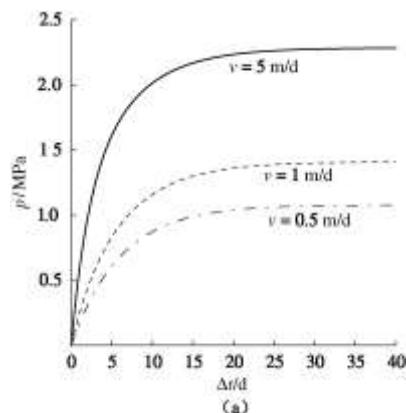


图7 不同支护时间位移与应力时程对比

Fig. 7 Comparison of displacements and stresses at different supporting time

当开挖速度 v 均取 1 m/d ，完工后：①立即；②经历 5 d ；③经历 10 d ，然后再加支护，即 t_1 分别为 5 d ， 10 d ， 20 d 。图 8 (b) 为不同支护时间支护力时程对比。可见，越早支护，支护力（位移）稳定值越大，但围岩的总位移（见图 6）越小。



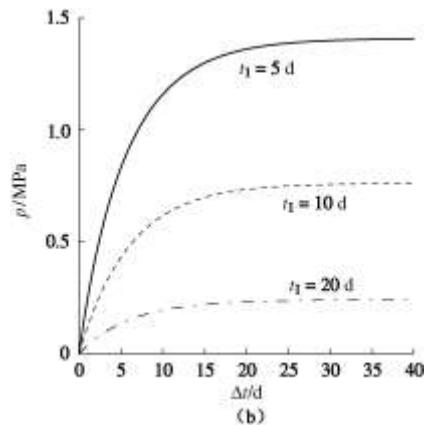


图8 不同开挖速度和不同支护时间时支护力对比

Fig. 8 Comparison of supporting forces at different construction velocities and supporting time

4 结语

本文用半径时变函数模拟圆形洞室任意开挖过程,得到了Boltzmann黏弹岩体中洞室开挖及任意时刻施加弹性支护后应力、位移解析表达。表达式显示,径向位移、应力均与开挖过程相关。该方法也适用于其它黏弹模型岩体的施工分析。算例分析显示,纵向推进速度越大,位移越大;断面开挖较快时纵向推进速度对位移的影响越显著。最终洞型和纵向推进速度均相同时,采用不同断面开挖速度且挖完立即支护时,开挖较快的情况位移变化较剧烈,支护阶段的位移和支护力也较大,但最终的稳定位移较小。

参考文献:

- [1] 陈子荫. 围岩力学分析中的解析方法[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1994. (CHEN Zi-yin. Analytical method in Geomechanics[M]. Beijing: Coal Industry Press, 1994. (in Chinese))
- [2] 朱素平, 周楚良. 地下圆形隧道围岩稳定性的黏弹性力学分析[J]. 同济大学学报, 1994, 22(3): 329–333. (ZHU Su-ping, ZHOU Chu-liang. Viscoelastic mechanical analysis of stability of surrounding rock mass in circular underground tunnels[J]. Journal of Tongji University, 1994, 22(3): 329–333. (in Chinese))
- [3] 王哲. 考虑岩体及支护黏弹性的圆形巷道薄壁支护解析解[J]. 煤炭学报, 1994, 19(6): 581–589. (WANG Zhe. Analytic solution for thin wall support applied in a circular tunnel by taking into consideration viscoelasticity of rockmass and support[J]. Journal of China Coal Society, 1994, 19(6): 581–589. (in Chinese))
- [4] 薛琳. 巷道围岩支护系统黏弹性分析蠕变柔量法[J]. 煤炭学报, 1996, 21(6): 591–595. (XUE Lin. Creep compliance method for visco-elastic analysis of the surrounding rock and supporting system in roadway[J]. Journal of China Coal Society, 1996, 21(6): 591–595. (in Chinese))
- [5] 蒋斌松. 地下衬砌的变几何应力分析[J]. 岩土工程学报, 1999, 21(1): 41–45. (JIANG Bin-song. On stress analysis of geometrically altered underground structures[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1999, 21(1): 41–45. (in Chinese))
- [6] 焦春茂, 吕爱钟. 黏弹性圆形巷道支护结构上的荷载及其围岩应力解析解[J]. 岩土力学, 2004, 25(增刊): 103–106. (JIAO Chun-mao, LU Ai-zhong. Analytical solution of loads on supporting structure for circular tunnel and stresses in viscoelastic surrounding rock[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, 25(S): 103–106. (in Chinese))
- [7] 刘保国, 杜学东. 圆形洞室围岩与结构相互作用的黏弹性解析[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(4): 561–564. (LIU Bao-guo, DU Xue-dong. Visco-elastical analysis on interaction between supporting structure and surrounding rocks of circle tunnel[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(4): 561–564. (in Chinese))
- [8] NAMOV V E. Mechanics of growing deformable solids-A review[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1994(2): 207–210.
- [9] SHAMINA V A. Formulation of the linear axisymmetric problem for deformable solids in terms of stresses [J]. Vestnik Sankt-peterburgskogo Universiteta. Ser 1 Matematika Mekhanika Astronomiya, 2000, 1: 145–148.
- [10] GEORGIYEVSKII D V, POBEDRYA B Y. The number of independent compatibility equations in the mechanics of deformable solids[J]. Journal of Applied Mathematics Mechanics, 2004, 68(6): 941–946.
- [11] 曹志远. 时变固体力学的黏弹性解[J]. 力学学报, 2000, 32(4): 497–501. (CAO Zhi-yuan. Viscoelastic solution of time-varying solid mechanics[J]. Acta Mechanica Sinica, 2000, 32(4): 497–501. (in Chinese))
- [12] 王华宁, 曹志远. 无限黏弹平面中孔洞扩展的时变力学解析解[J]. 固体力学学报, 2006, 27(3): 319–323. (WANG Hua-ning, CAO Zhi-yuan. Time-varying analytics study of random expanding hole in plane viscoelasticity[J]. Acta Mechanica Sinica, 2006, 27(3): 319–323. (in Chinese))
- [13] WANG Hua-ning. Analytics study of time-varying axisymmetric problem of viscoelasticity[C]// The Fifth International Conference on Nonlinear Mechanics. 2007.
- [14] MANA A I, CLOUGH G W. Prediction of movements for braced cuts in clay[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1981, 107(6): 759–777.
- [15] BORJA R I, KISHNANI S S. On the solution of elliptic free-boundary problems via Newton's method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1991, 88(3):

341 - 361.

- [16] FINNA R J, HARAHAP I S. Finite element analyses of HDR-4 excavations [J]. Journal of Geotechnical Engineering Division ASCE, 1991, **117**(10): 1590 - 1609.
- [17] CHEHADE F H, SHAHROUR I. Numerical analysis of the interaction between twin-tunnels: Influence of the relative position and construction procedure[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2008(23): 210 - 214.
- [18] YANG Zhi-fa, LIU Zhu-hua, WANG Si-jing. A practical Back-analysis method from displacements to estimate some parameters of rock mass for design of an underground opening[C]// Proceeding of International Symopsis on Field Measurements in Geomechanics. Zurich, 1983.
- [19] 朱维申, 朱家桥, 代冠一, 等. 考虑时空效应的地下洞室变形观测及反分析[J]. 岩石力学与工程学报, 1989, **8**(4): 346 - 353. (ZHU Wei-shen, ZHU Jia-qiao, DAI Guan-yi, et al. Some practical cases of back analysis of underground openings deformability concerning effects of time and space[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1989, **8**(4): 346 - 353. (in Chinese))