

# 挡土墙被动土压力的滑移线解

彭明祥

(广东省电力设计研究院, 广东 广州 510663)

**摘要:** 基于极限平衡理论, 视墙后填土为服从 Mohr-Coulomb 屈服准则的理想弹塑性材料, 并且假定它是各向同性的、均匀的以及不可压缩(膨胀)的理想连续介质。引进了应力奇点及其应力边界条件, 建立了静定可解的极限平衡边值问题数学模型, 而不必考虑土的应力-应变关系, 采用滑移线法求解了墙后塑性区的滑移线场和应力场, 进而求解了挡土墙被动土压力和滑裂面土反力。通过无量纲分析, 提出了几何力学相似原理。数值分析表明, 被动土压力的滑移线解一般总是小于或等于库仑解, 经典朗肯土压力或满足非奇异条件的经典库仑土压力与滑移线解一致, Hencky 第一定理和第二定理不具有普遍适用性。

**关键词:** 挡土墙; 被动土压力; 滑移线解; 应力奇点; 无量纲分析; 相似原理

**中图分类号:** TU432    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1000-4548(2011)03-0460-10

**作者简介:** 彭明祥(1964-), 男, 广东化州人, 硕士, 高级工程师, 注册岩土工程师, 注册港口与航道工程师, 主要从事水工结构和岩土工程的设计研究工作。E-mail: pengmingxiang1964@qq.com。

## Slip-line solution to passive earth pressure on retaining walls

PENG Ming-xiang

(Guangdong Electric Power Design Institute, Guangzhou 510663, China)

**Abstract:** Based on the limit equilibrium theory, the backfill is treated as a perfectly elastic-plastic material which follows the Mohr-Coulomb yield criterion, and is assumed to be an isotropic, homogeneous and incompressible (or non-expansive) perfectly continuous medium. The stress singularity and its stress boundary condition are introduced, and a statically determinate and solvable mathematical model for the limit equilibrium boundary value problem is established without considering the stress-strain relationship. Then the slip-line field and stress field in plastic zone of the backfill are solved by use of the slip-line method, furthermore, the passive earth pressure on retaining walls and the reaction on slip surfaces are derived. Geometric and mechanical similarity principle is presented by means of dimensionless analysis. The results show that the slip-line solution to the passive earth pressure is generally less than or equal to the Coulomb's solution, and the classical Rankine's earth pressure or the classical Coulomb's earth pressure satisfying non-singularity condition is in accordance with the slip-line solution, and the Hencky's first theorem and second theorem are not generally applicable.

**Key words:** retaining wall; passive earth pressure; slip-line solution; stress singularity; dimensionless analysis; similarity principle

## 0 引言

挡土墙极限土压力是土力学极限平衡理论的3大经典课题之一。自库仑土压力理论(1773)提出以来,许多研究者在这个领域作出了杰出贡献,目前这些工作按计算方法可分为以下4种类型:

极限平衡法,以库仑土压力理论为代表。该法事先假定通过墙踵的滑裂面为平面<sup>[1-4]</sup>或曲面<sup>[5-8]</sup>等,假定滑动土楔为刚体以及滑裂面、墙背面达到极限平衡状态,然后根据总体平衡方程并运用极值原理,可近似求得极限土压力的合力,但无法得到其分布。文献

[9, 10]对库仑土压力理论作进一步完善和发展,假定滑动土楔为塑性体以及塑性区的一族滑移线为直线即平面滑裂面,求得了在一般情况下的极限土压力合力和分布。

应力圆法,该法是Rankine(1857)在研究倾斜半无限无黏性土的极限平衡问题时首先提出的。在墙背面垂直光滑和地面水平的情况下,Resal(1910)和Bell(1915)将该法推广到黏性土,这就是著名的朗肯土压力理论。文献[11, 12]进一步将该法拓展到墙

背面垂直且无黏结力、地面倾斜的情况，文献[13]针对垂直挡墙、水平地面及无黏性土推导了一个近似解析解。一般而言，应力圆法能得到极限土压力分布，但只适用于一些较为简单的情况，而且也无法确定墙后土体在多大范围内处于极限平衡状态。

极限分析法，该法是上世纪 50 年代首先在金属塑性力学中发展起来的，后来 Drucker、Prager 和 Shield 等学者把它推广到土力学，Chen WF 在他的专著<sup>[14]</sup>中进一步作了全面、深刻的论述。极限分析法通过上下限定理分别推求极限荷载的上限和下限，下限解<sup>[15-16]</sup>满足平衡条件、应力边界条件及处处不违背屈服条件，上限解<sup>[17-22]</sup>满足运动许可条件及外功率等于内耗散功率。一般地，按关联流动法则计算塑性体胀远大于实验值，一般应采用非关联法则<sup>[20]</sup>。极限分析法通常得不到真解，甚至有时误差较大，而且在多数情况下要构造一个静力许可应力场或运动许可速度场并非易事。Sloan 等学者发展了应用有限元法和数学规划求上下限解<sup>[15-18]</sup>，为极限分析法的研究和应用开辟了新的途径。

滑移线法，又称特征线法。Kotter (1903) 首先推导了沿滑移线的极限平衡方程，为从数学上严密求解极限平衡问题奠定了理论基础，以后不少学者为此进行过各种努力和尝试。Prandtl (1920) 首先求解了无重土地基上条形基础的极限承载力问题，后来 Reissner (1924) 和 Novotortsev (1938) 把它推广到基础两侧有均布荷载的情况，在此值得指出的是，Hill (1950) 采用与前者不同的破坏模式也得到了相同的极限荷载<sup>[23]</sup>。考虑土重的极限平衡问题除个别特例外一般无解析解，需采用近似方法求滑移线数值解，如采用有限差分法(Lundgren 和 Mortensen 1953; Cox 1962)、图解法(De Jong 1957)、摄动法(Spencer 1962)以及级数展开法(Dembicki 1964)等。Sokolovskii (1965) 采用有限差分法研究了有无土重情况下的各种极限平衡问题，并试图给出滑移线解的一般性求解方法，这些成果在他著名的著作<sup>[24]</sup>中作了全面总结。此后，一些研究者继续这方面工作，如运用滑移线法研究了条形或圆形基础的地基极限承载力<sup>[25-27]</sup>、挡土墙在地震作用下的极限土压力<sup>[28-29]</sup>以及轴对称问题的主动土压力<sup>[30-33]</sup>等。

滑移线法无需事先假定滑裂面形状，而且静力平衡方程和屈服条件在塑性区内处处满足，因而滑移线解曾被认为是极限平衡问题的真解。但是，随着极限分析法的提出和应用似乎已改变了这种看法，认为真解必须同时满足静力和运动条件<sup>[14, 34]</sup>。近 40 多年来，

尽管人们一直没有停止过对滑移线法的研究，但多数还是停留在 Sokolovskii 的基础上，总体进展不大，笔者认为以下几个问题值得关注：

(1) 什么是理想弹塑性材料？真实土体是一种多孔、多相、不均匀以及可压缩的松散材料，然而，当人们试图采用数学上的连续函数和微积分工具去研究其物理力学状态时，就已将土体视为一种连续地充满某一部分空间的连续介质了，可见，Sokolovskii 的“松散介质静力学”其实是连续介质静力学。为方便起见，通常假设土体参数如黏聚力、内摩擦角及质量密度等不随时间、空间和方向变化，因而该连续介质具有各向同性的、均匀的以及不可压缩（膨胀）的特性，此外还具有弹性固态和塑性流态的理想物理特征。而它的力学特性可归结为到达塑性状态的过程突变性和不可逆性、应力不变性以及应变不确定性。因此，具有以上物理力学性质的理想连续介质就是理想弹塑性材料。

(2) 什么是极限平衡状态？对于理想弹塑性平面应变问题，当土中一点的莫尔应力圆逐渐增大并与库仑强度线相切时，该点就开始进入了极限平衡状态，它是一种应力不变、应变不确定的动平衡状态。而有学者认为极限平衡状态是一个从静力平衡转向运动的临界状态<sup>[34]</sup>。

(3) 极限平衡问题是否静定？这个问题至今尚无定论。Sokolovskii 认为是静定的<sup>[24]</sup>，而 Chen WF 认为尽管平面应变问题的方程数与未知应力分量数相等，但是由于许多问题的边界条件都包含有应力和位移率，因此不能按静定问题来处理而必须考虑土的应力 - 应变关系<sup>[14]</sup>。依笔者看，关键在于如何看待图 1 中的奇点 A，一直以来，由于数学上的困难，人们普遍认为该奇点是应力间断点<sup>[24, 28, 33]</sup>，这似乎已无疑义，但却偏偏因此丢失了一部分应力边界条件。笔者发现，只要将奇点视为一种特殊的应力边界，该问题就完全静定可解了。

(4) 应力间断是否客观存在？极限平衡的应力间断问题首先由 Prager (1948) 提出，虽然以后不少人也研究过，但还是有可疑之处，如文献[14, 24]的作者在引用这个概念的同时就指出了应力间断不是真实状态。笔者认为问题还是在于对奇点的认识，可以肯定地说，一个边界条件不连续的边值问题在数学上不可能有连续解，而同一理想连续介质中存在应力间断现象在物理上也是无法解释的。为此，下面引进了一个叫“应力奇点”的新概念，它具有连续的应力分布。

本文的目的在于，在总结前人研究成果的基础

上，提出自己的观点和做法，尽管有些与传统的不相符，但是，对于这样一个经长期研究而未能得到很好解决的问题，笔者仅希望能从不同的角度提出一些思考，并以此作为一种尝试。

## 1 计算模型

### 1.1 基本假定

图 1 为挡土墙被动土压力的计算模型。设挡土墙高度为  $H$ ，地面均布超载为  $q$ ，墙背面水平倾角为  $a$ ，地面水平倾角为  $b$ （负值表示坡面向下倾斜），填土重度为  $g$ ，黏聚力为  $c$ ，内摩擦角为  $j$ ，填土与墙背面之间的黏结力为  $c_w$ ，外摩擦角为  $d$ 。

基本假定：①按平面应变问题考虑；②墙后填土为理想弹塑性材料，服从 Mohr-Coulomb 屈服准则；③楔体  $ABC$  为墙后被动塑性区；④墙土接触面  $AB$  满足库仑摩擦定律。

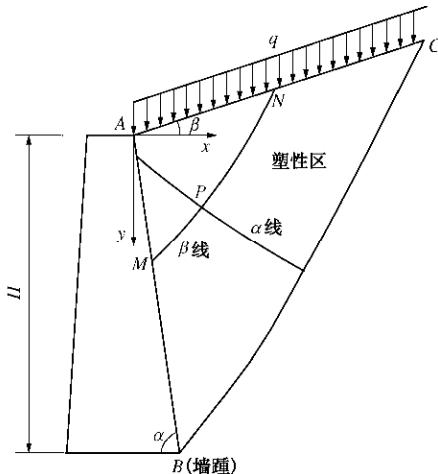


图 1 本文计算模型

Fig. 1 Calculation model

### 1.2 基本方程

#### (1) 滑移线方程

图 1 中塑性区内任意一点  $P$  的极限莫尔应力圆如图 2 所示，通过  $P$  点有两个极限滑裂面即  $a$  滑移线和  $b$  滑移线，它们与  $s_1$  主应力平面的夹角均为  $\pi/4 + j/2$ ，也就是，与  $s_1$  主应力方向的夹角均为  $m = \pi/4 - j/2$ 。设  $s_1$  主应力方向与  $y$  轴的夹角为  $q$ ，则两条滑移线与  $y$  轴的夹角分别为  $\alpha = q - m$  和  $\beta = q + m$ ，故滑移线微分方程为

$$a \text{ 线: } dx = \tan(q - m)dy, \quad (1)$$

$$b \text{ 线: } dx = \tan(q + m)dy, \quad (2)$$

规定角度  $q$ ， $\alpha$ ， $\beta$  均以  $y$  轴正向逆时针旋转到指定方向为正。

#### (2) 沿滑移线的极限平衡方程

根据极限莫尔应力圆，可得正应力和剪应力

$$\left. \begin{aligned} s_x &= p - R \cos 2q, \\ s_y &= p + R \cos 2q, \\ t_{xy} &= R \sin 2q, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

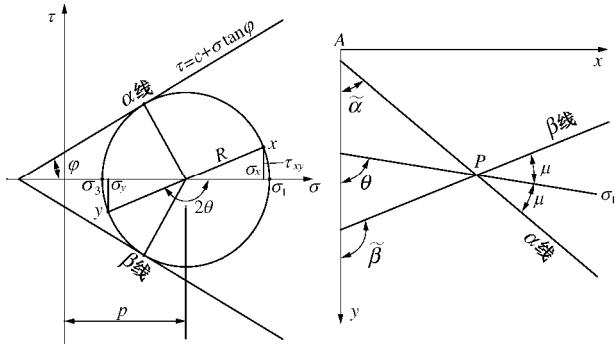


图 2  $P$  点极限莫尔应力圆

Fig. 2 Limiting Mohr's stress circle at point  $P$

式中， $p = (s_x + s_y)/2$  为平均应力， $R = p \sin j + c \cos j$  为应力圆半径。正应力以受压为正，剪应力以使土体产生逆时针转动为正。现将  $s_x$ ， $s_y$  及  $t_{xy}$  代入以下静力平衡方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} &= X, \\ \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} &= Y, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中， $X$ ， $Y$  分别为水平和垂直方向的单位体积力。经整理化简后可得到分别沿  $a$  线和  $b$  线的极限平衡方程：

$$\left. \begin{aligned} \cos j \frac{dp}{ds_a} - 2R \frac{dq}{ds_a} &= A(q) \cos(q - m), \\ \cos j \frac{dp}{ds_b} + 2R \frac{dq}{ds_b} &= B(q) \cos(q + m), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中，

$$\left. \begin{aligned} A(q) &= \frac{-X \cos(q + m) + Y \sin(q + m)}{\cos(q - m)}, \\ B(q) &= \frac{X \cos(q - m) - Y \sin(q - m)}{\cos(q + m)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

又由于沿  $a$  线有  $ds_a = dy / \cos(q - m)$ ，沿  $b$  线有  $ds_b = dy / \cos(q + m)$ ，故式 (5) 可进一步改写成以下微分方程：

$$\text{沿 } a \text{ 线: } \cos j dp - 2R dq = A(q) dy, \quad (7)$$

$$\text{沿 } b \text{ 线: } \cos j dp + 2R dq = B(q) dy. \quad (8)$$

#### (3) 沿滑移线的土反力分布

沿  $a$  和  $b$  滑移线的土反力分布可按下式计算：

$$r_a = r_b = p - c \tan j, \quad (9)$$

土反力分布  $r_a$  和  $r_b$  的作用线与  $+y$  方向的夹角分别为  $q + m$  和  $q - m$ 。应当指出，对于整个塑性区而言，除

**b** 滑移线  $BC$  上的土反力为外力, 其余均为内力。

#### (4) 滑移线曲率半径

滑移线曲率半径可按下式计算:

$$R_a = \frac{dS_a}{dq}, \quad R_b = -\frac{dS_b}{dq}, \quad (10)$$

式中,  $R_a$ ,  $R_b$  分别为  $a$  和  $b$  滑移线的曲率半径, 规定  $R_a$  以  $a$  线凹向  $+x$  方向为正,  $R_b$  以  $b$  线凹向  $+y$  方向为正。如沿某段滑移线的  $q$  值保持不变, 即  $dq \equiv 0$ , 则其曲率半径为无穷大。

### 1.3 边界条件

#### (1) $AB$ 应力边界条件

如图 3 所示,  $M$  为墙土接触面  $AB$  上的任意一点, 设该点被动土压力分布为  $p_p$ , 则有

$$\left. \begin{array}{l} s_n = p_p \cos^2 d, \\ t_n = c_w + p_p \sin d \cos d, \end{array} \right\} \quad (11)$$

式中,  $s_n$ ,  $t_n$  分别为边界上  $M$  点的正应力和剪应力。必须指出, 文献[24]中一个与平面法线成  $d$  角的应力  $p$  的法向和切向分量分别为  $p \cos d$  和  $p \sin d$  是不正确的, 因为应力投影与力投影不同, 这点应值得注意。

又由极限莫尔应力圆可得

$$\left. \begin{array}{l} s_n = p_M + R_M \cos 2(a + q_M), \\ t_n = -R_M \sin 2(a + q_M). \end{array} \right\} \quad (12)$$

联立式(11)和式(12)并消去  $p_p$ , 经证明可得

$$2a + 2q_M + d + \arcsin(R_w/R_M) = 2\pi, \quad (13)$$

式中,  $R_M = p_M \sin j + c \cos j$ ,  $R_w = p_M \sin d + c_w \cos d$ 。式(13)就构成了边界  $AB$  的应力边界条件, 在一些特别情况下, 该边界条件与平均应力无关, 可作进一步简化。例如当  $c_w = 0$ ,  $d = 0$  时,

$$q_M = \pi - a; \quad (14)$$

当  $c_w = c$ ,  $d = j$  时,

$$q_M = \frac{3}{4}\pi - a - \frac{j}{2}; \quad (15)$$

当  $c_w = c = 0$  时,

$$q_M = \pi - a - \frac{d}{2} - \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\sin d}{\sin j}\right); \quad (16)$$

当  $d = j = 0$  时,

$$q_M = \pi - a - \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{c_w}{c}\right). \quad (17)$$

又联立式(11)和式(12)并消去  $q_M$ , 可得到关于  $p_p$  的一元二次方程, 当  $R_M \geq R_w$  时有两个实根, 在被动极限平衡状态下, 应取较大根, 即

$$p_p = \left( p_M \cos d - c_w \sin d + \sqrt{R_M^2 - R_w^2} \right) / \cos d. \quad (18)$$

可见, 一旦求得了边界  $AB$  上的平均应力  $p_M$ , 则被动土压力可由上式计算。

#### (2) $AC$ 应力边界条件

如图 4 所示,  $N$  为地面  $AC$  上的任一点, 欲求应力边界值  $p_N$  和  $q_N$ 。根据极限莫尔应力圆方程:

$$(s_n - p_N)^2 + t_n^2 = R_N^2, \quad (19)$$

式中, 应力圆半径  $R_N = p_N \sin j + c \cos j$ , 当参数取值满足  $q \cos^2 b (\tan|b| - \tan j) \leq c$  时, 以上关于  $p_N$  的一元二次方程有两个实根, 在被动极限平衡状态下, 应取较大根, 即

$$p_N = \frac{s_n + c \sin j \cos j + \sqrt{(s_n \sin j + c \cos j)^2 - t_n^2 \cos^2 j}}{\cos^2 j}, \quad (20)$$

式中,  $s_n = q \cos^2 b$ ,  $t_n = q \sin b \cos b$ 。又根据极限莫尔应力圆, 可得  $t_n = R_N \sin 2(b - q_N)$ , 所以

$$q_N = \frac{\pi}{2} + b + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{q \sin b \cos b}{p_N \sin j + c \cos j}\right). \quad (21)$$

当  $c_w = c = 0$  时, 式(21)可简化为

$$q_N = \frac{\pi}{2} + \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\sin b}{\sin j}\right). \quad (22)$$

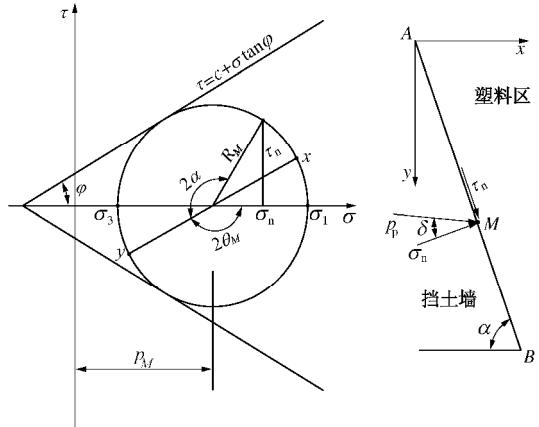


图 3  $M$  点极限莫尔应力圆

Fig. 3 Limiting Mohr's stress circle at point  $M$

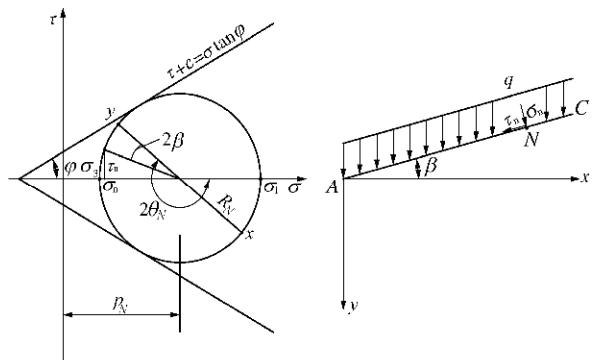


图 4  $N$  点极限莫尔应力圆

Fig. 4 Limiting Mohr's stress circle at point  $N$

#### (3) $A$ 点应力边界条件

当图 1 中的  $b$  滑移线  $MN$  无限逼近  $A$  点时,  $M$  点和  $N$  点的应力状态一般不相同, 即平均应力  $p_{M \rightarrow A}$  和  $p_{N \rightarrow A}$ , 方向角  $q_{M \rightarrow A}$  和  $q_{N \rightarrow A}$  一般不相等, 称  $A$  点为应

力奇点。现令  $dy=0$ , 对式(8)进行积分, 可得到当  $b$  线无限逼近  $A$  点时  $p_A$  和  $q_A$  的关系式:

$$\left. \begin{array}{l} p_A = C_b \exp(-2q_A \tan j) - c/\tan j \quad (j > 0), \\ p_A = C_b - 2cq_A \quad (j = 0), \end{array} \right\} \quad (23)$$

式中,  $C_b$  为待定积分常数,  $q_A$  在  $q_{M \rightarrow A}$  和  $q_{N \rightarrow A}$  之间连续变化, 上式就是  $A$  点的应力边界条件。

可见, 应力奇点实质上就是  $b$  滑移线无限逼近  $A$  点时由线退化为点的必然产物, 是一种特殊的应力边界, 具有应力连续、应力梯度无穷大以及  $b$  线曲率无穷大的特性。

## 2 非奇异条件

当图 1 中的  $b$  滑移线  $MN$  无限逼近  $A$  点时, 如  $M$  点和  $N$  点的应力状态相同, 则  $A$  点为非应力奇点, 而将  $p_{M \rightarrow A} = p_{N \rightarrow A}$  和  $q_{M \rightarrow A} = q_{N \rightarrow A}$  称为非奇异条件。非奇异条件一般与参数  $q$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $j$ ,  $c_w$  及  $d$  有关, 可改写为

$$\left. \begin{array}{l} \Delta = 2a + 2b + d + \arcsin \left( \frac{h + \sin d \cos y}{1 + \sin j \cos y} \right) + \\ \arcsin \left( \frac{\cos j \sin y}{1 + \sin j \cos y} \right) = \pi, \\ h = \sin j \sin d + \frac{c_w + q \cos^2 b \tan d}{c + q \cos^2 b \tan j} \cos j \cos d, \\ y = \arcsin \left( \frac{q \sin b \cos b}{c + q \cos^2 b \tan j} \right). \end{array} \right\} \quad (24)$$

显然, 当  $a=\pi/2$ ,  $b=0$ ,  $c_w=0$ ,  $d=0$  时, 或当  $a=\pi/4-j/2$ ,  $b=0$ ,  $c_w=c$ ,  $d=j$  时, 恒有  $\Delta=\pi$ , 满足非奇异条件。当  $c_w=c=0$  时, 上式可简化为

$$\Delta = 2a + b + d + \arcsin \left( \frac{\sin d}{\sin j} \right) + \arcsin \left( \frac{\sin b}{\sin j} \right) = \pi, \quad (25)$$

这就是经典库仑被动土压力的非奇异条件, 与文献[9]中滑裂面上反力呈线性分布的充要条件相同。应当指出, 经典库仑土压力不一定满足非奇异条件, 而经典朗肯土压力则总是满足非奇异条件。

## 3 有限差分法

### 3.1 差分网格划分

由以上滑移线方程、极限平衡方程以及应力边界条件构成了一个完整的极限平衡边值问题, 一般采用有限差分法求解。求解时需事先构建有限差分网格, 它由两族互为相交的、假想的滑移线组成, 如图 5 所示。一般地, 设  $b$  族滑移线的总条数为  $n$ , 第一条  $b$  滑移线  $A'A''$  的结点数为  $m(m \geq 2)$ , 则  $a$  族滑移线的总条

数为  $2(n-2)+m$ , 网格结点总数为  $n(n+m-1)$ , 而结点编号则按图中顺序依次进行。本文计算机程序暂定  $n$  不大于 99, 结点总数不大于 9999 个。

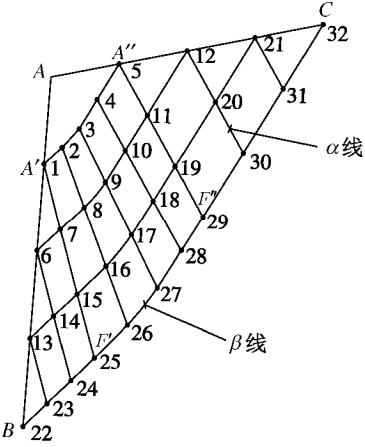


图 5 差分网格示意图

Fig. 5 Finite difference mesh

现研究当第一条  $b$  滑移线  $A'A''$  无限逼近应力奇点  $A$  时的情况。按式(20)和式(21)分别计算  $A''$  点的  $p_{A'' \rightarrow A}$  和  $q_{A'' \rightarrow A}$ , 将它们代入式(23)求得积分常数  $C_b$ , 于是, 应力奇点  $A$  的应力边界条件就确定了。又联立式(13)、(23), 采用迭代算法可求得  $A'$  点的  $p_{A' \rightarrow A}$  和  $q_{A' \rightarrow A}$ 。一般情况下,  $q_{A' \rightarrow A}$  和  $q_{A'' \rightarrow A}$  不相等, 若将方向角差  $q_{A'' \rightarrow A} - q_{A' \rightarrow A}$  平分为  $m-1$  等份, 并且假定等分点和结点相互对应, 则第一条  $b$  线  $A'A''$  的  $m$  个结点已知, 可按下式计算:

$$\left. \begin{array}{l} x_{Aj} = 0, \quad y_{Aj} = 0, \\ q_{Aj} = \frac{q_{A'' \rightarrow A} - q_{A' \rightarrow A}}{m-1}(j-1) + q_{A' \rightarrow A}, \\ p_{Aj} = C_b \exp(-2q_{Aj} \tan j) - c/\tan j \quad (j > 0), \\ p_{Aj} = C_b - 2cq_{Aj} \quad (j = 0), \\ j = 1, 2, \dots, m. \end{array} \right\} \quad (26)$$

### 3.2 3 种基本差分

#### (1) 两点差分 2PDA

设  $N_1$  为边界  $AC$  的结点,  $N_2$  为紧邻  $N_1$  的一个结点, 且  $N_1N_2$  为  $b$  滑移线。已知  $N_2$  的  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $p_2$ ,  $q_2$ , 求  $N_1$  的  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $p_1$ ,  $q_1$ 。基本方程如下:

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = -x_1 \tan b, \\ x_2 - x_1 = (y_2 - y_1) \tan(\bar{q}_{12} + m), \\ \cos j(p_2 - p_1) + \sin j(p_2 + p_1)(q_2 - q_1) + \\ 2c \cos j(q_2 - q_1) = B(\bar{q}_{12})(y_2 - y_1), \\ q_1 = \frac{\pi}{2} + b + \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{q \sin b \cos b}{p_1 \sin j + c \cos j} \right), \end{array} \right\} \quad (27)$$

式中,  $\bar{q}_{12} = (q_1 + q_2)/2$ , 采用迭代算法求解。

#### (2) 两点差分 2PDB

设  $N_1$  为边界  $AB$  的结点,  $N_2$  为紧邻  $N_1$  的一个结

点, 且  $N_1N_2$  为  $b$  滑移线。已知  $N_2$  的  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $p_2$ ,  $q_2$ , 求  $N_1$  的  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $p_1$ ,  $q_1$ 。基本方程如下:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = y_1 \frac{\cos a}{\sin a}, \\ x_2 - x_1 = (y_2 - y_1) \tan(\bar{q}_{12} + m), \\ \cos j(p_2 - p_1) + \sin j(p_2 + p_1)(q_2 - q_1) + \\ 2c \cos j(q_2 - q_1) = B(\bar{q}_{12})(y_2 - y_1), \\ 2a + 2q_1 + d + \arcsin \left( \frac{p_1 \sin d + c_w \cos d}{p_1 \sin j + c \cos j} \right) = 2\pi, \end{array} \right\} \quad (28)$$

式中,  $\bar{q}_{12} = (q_1 + q_2)/2$ , 采用迭代算法求解。

### (3) 三点差分 3PD

设  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  为求解域内 3 个相邻的结点, 而且  $N_1N_3$  为  $a$  滑移线,  $N_1N_2$  为  $b$  滑移线。已知  $N_2$  点的  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $p_2$ ,  $q_2$  及  $N_3$  点的  $x_3$ ,  $y_3$ ,  $p_3$ ,  $q_3$ , 求  $N_1$  点的  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $p_1$ ,  $q_1$ 。基本方程如下:

$$\left. \begin{array}{l} x_3 - x_1 = (y_3 - y_1) \tan(\bar{q}_{13} - m), \\ x_2 - x_1 = (y_2 - y_1) \tan(\bar{q}_{12} + m), \\ \cos j(p_3 - p_1) - \sin j(p_3 + p_1)(q_3 - q_1) - \\ 2c \cos j(q_3 - q_1) = A(\bar{q}_{13})(y_3 - y_1), \\ \cos j(p_2 - p_1) + \sin j(p_2 + p_1)(q_2 - q_1) + \\ 2c \cos j(q_2 - q_1) = B(\bar{q}_{12})(y_2 - y_1), \end{array} \right\} \quad (29)$$

式中,  $\bar{q}_{13} = (q_1 + q_3)/2$ ,  $\bar{q}_{12} = (q_1 + q_2)/2$ , 采用迭代算法求解。

### 3.3 差分求解途径

采用有限差分法求解以上极限平衡边值问题, 根据  $AB$  和  $AC$  应力边界条件的具体情况, 可分为 3 种基本解法。现以图 5 为例分述如下:

第一种解法:  $AB$  边界各结点的  $x$ ,  $y$  已知,  $p$  与  $q$  关系已知,  $AC$  边界各结点的  $p$ ,  $q$  已知。求解过程如下:

(1) 求解第二条  $b$  滑移线, 需采用以下迭代计算: ①给结点 6 的平均应力置初值  $p_6^{(0)}$ , 并置  $i=0$ ; ②采用 3PD 差分依次求解结点 7 至 11; ③由 2PDA 差分求解结点 12; ④比较  $p_{12}^{(i)}$  和按式 (20) 计算的  $p_N$ , 若  $|p_{12}^{(i)} - p_N| \leq 10^{-8}$ , 则迭代计算终止, 否则, 确定高一次  $p_6^{(i+1)}$ , 并置  $p_6^{(i+1)}$  给  $p_6^{(i)}$ , 置  $i+1$  给  $i$ , 转第②步继续计算。

(2) 按以上第 (1) 步同样的方法, 可依次求解第三条和第四条  $b$  滑移线。

第二种解法:  $AC$  边界上各结点的  $x$ ,  $y$ ,  $p$  和  $q$  已知,  $AB$  边界的  $p$  与  $q$  关系已知。求解过程如下:

(1) 求解第二条  $b$  滑移线, 采用 3PD 差分依次求解结点 11 至 7, 由 2PDB 差分求解结点 6。

(2) 求解第三条  $b$  滑移线, 采用 3PD 差分依次

求解结点 20 至 14, 由 2PDB 差分求解结点 13。

(3) 求解第四条  $b$  滑移线, 采用 3PD 差分依次求解结点 31 至 23, 由 2PDB 差分求解结点 22。

第三种解法:  $AC$  边界上各结点的  $x$ ,  $y$ ,  $p$  和  $q$  已知,  $AB$  边界的  $p$  与  $q$  关系已知。采用传统的分区求解法<sup>[34-35]</sup>, 依次求解  $A''CF''$  区的 Cauchy 问题、 $A'A''F''F'$  区的 Riemann 问题以及  $A'BF'$  区的混合问题, 求解过程中反复调用 3PD 和 2PDB 差分。

应用表明, 以上 3 种解法最终得到的计算结果是相同的, 但各有优缺点。第一种解法的最后一条  $b$  滑移线总是通过墙踵  $B$  点, 但求解每条  $b$  滑移线时需反复迭代, 计算量较大。第二、三种解法在本质上是一致的, 计算量较小且稳定性较好, 但最后一条  $b$  滑移线一般不通过墙踵, 需采用线性内插法求得。本文计算机程序提供 3 种算法。

### 3.4 讨论

按以上方法求解的塑性区一般由  $ABF'$  (I 区)、 $AFF''$  (II 区) 以及  $ACF''$  (III 区) 3 部分组成, 图 6 给出几种常见的滑移线场: 图 6 (a) 为 3 个区相互之间无面重叠, 这种情况的  $\Delta > \pi$ ; 图 (b) 为 II 区退化为一条  $a$  线, 3 个区相互之间无面重叠, 这种情况的  $\Delta = \pi$ ; 图 6 (c) 为 3 个区相互之间有面重叠, 即滑移线场出现折叠现象, 这种情况的  $\Delta < \pi$ 。有研究者<sup>[24, 28, 33]</sup>认为这是一种应力间断现象, 还给出了所谓的应力间断条件以及间断线方程等; 图 6 (d) 为溢出边界, 3 个区相互之间有面重叠。

笔者认为, 真实应力场中的点  $(x, y)$  与应力  $(p, q)$  应一一对应, 因此, 除图 6 (a)、(b) 两种情况外, 其它只是该边值问题在数学意义上的虚解, 不具有实际物理意义。 $\Delta \geq \pi$  是存在真解的一个必要条件, 由此可求得墙背面临界倾角  $a_{cr}$ 。

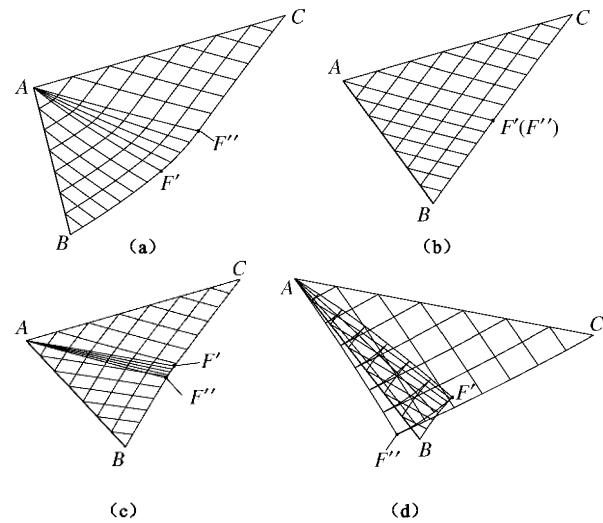


图 6 几种滑移线场

Fig. 6 Several kinds of slip-line fields

## 4 无量纲分析与相似原理

对于图 1 所示的挡土墙被动土压力的极限平衡边值问题, 当  $X=0$ ,  $Y=g>0$  时, 可采用以下无量纲分析法求解。首先引进新的无量纲变量  $x'$ ,  $y'$  和  $p'$ , 并作变换:

$$x = Hx', \quad y = Hy', \quad (30)$$

$$p = gHp' + q\cos^2 b, \quad (31)$$

同时定义无量纲参数  $h_1$ ,  $h_2$  和  $h_3$ :

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{c + q\cos^2 b \tan j}{gH}, \\ h_2 &= \frac{c_w + q\cos^2 b \tan d}{gH}, \\ h_3 &= \frac{q \sin b \cos b}{gH}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

将  $a$  和  $b$  滑移线方程改写为以下无量纲形式:

$$a \text{ 线: } dx' = \tan(q - m)dy', \quad (33)$$

$$b \text{ 线: } dx' = \tan(q + m)dy'. \quad (34)$$

沿  $a$  和  $b$  滑移线的极限平衡方程可改写为

$$\text{沿 } a \text{ 线: } \cos j dp' - 2R'dq = A'(q)dy', \quad (35)$$

$$\text{沿 } b \text{ 线: } \cos j dp' + 2R'dq = B'(q)dy', \quad (36)$$

式中, 无量纲应力圆半径  $R' = p' \sin j + h_1 \cos j$ , 而无量纲数  $A'(q)$ ,  $B'(q)$  按下式计算:

$$A'(q) = \frac{\sin(q + m)}{\cos(q - m)}, \quad B'(q) = -\frac{\sin(q - m)}{\cos(q + m)}. \quad (37)$$

边界  $AB$  的应力边界条件可改写为

$$2a + 2q_M + d + \arcsin(R'_w/R'_M) = 2\pi, \quad (38)$$

式中, 无量纲应力圆半径  $R'_M = p'_M \sin j + h_1 \cos j$ ,  $R'_w = p'_M \sin d + h_2 \cos d$ ,  $p'_M$  为对应平均应力  $p_M$  的无量纲平均应力。

边界  $AC$  的应力边界条件可改写为

$$\left. \begin{aligned} p'_N &= (h_1 \sin j + \sqrt{h_1^2 - h_3^2})/\cos j, \\ q_N &= \frac{\pi}{2} + b + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{h_3}{R'_N}\right), \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

式中,  $R'_N = p'_N \sin j + h_1 \cos j$ ,  $p'_N$  为对应平均应力  $p_N$  的无量纲平均应力。

应力奇点  $A$  的应力边界条件可改写为

$$\left. \begin{aligned} p'_A &= C_b \exp(-2q_A \tan j) - h_1 / \tan j \quad (j > 0), \\ p'_A &= C_b - 2h_1 q_A \quad (j = 0). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

经变换后的式 (33) ~ (40) 与原来相比有着相似的数学形式, 它们构成了一个完整的无量纲应力边值问题, 所确定的应力场  $(x', y', p', q)$  不妨称为规范化应力场, 可采用前面的差分法求解。规范化应力

场取决于  $a$ ,  $b$ ,  $j$ ,  $d$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  及  $h_3$  等 7 个参数, 当  $b=0$  时, 仅与  $a$ ,  $j$ ,  $d$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  有关。求得规范化应力场后, 根据式 (30) 和式 (31) 可转化为实际应力场  $(x, y, p, q)$ , 进而按式 (18) 计算  $p_p$ , 也可直接按下式计算:

$$\left. \begin{aligned} p_p &= gH p'_p + q \cos^2 b / \cos^2 d, \\ p'_p &= \left( p'_M \cos d - h_2 \sin d + \sqrt{R'_M^2 - R'_w^2} \right) / \cos d. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

沿  $a$  线和  $b$  线的土反力分布可按下式计算:

$$\left. \begin{aligned} r_a = r_b &= gH r' + q \cos^2 b / \cos^2 j, \\ r' &= p' - h_1 \tan j. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

实际应力场的正应力和剪应力可按下式计算:

$$\left. \begin{aligned} s_x &= gH s'_x + q \cos^2 b, \\ s_y &= gH s'_y + q \cos^2 b, \\ t_{xy} &= gH t'_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

式中,  $s'_x$ ,  $s'_y$ ,  $t'_{xy}$  为规范化正应力和剪应力, 有

$$\left. \begin{aligned} s'_x &= p' - R' \cos 2q, \\ s'_y &= p' + R' \cos 2q, \\ t'_{xy} &= R' \sin 2q. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

通过以上无量纲分析, 关于被动土压力极限平衡问题的几何力学相似原理可表述为: 若两个问题的  $a$ ,  $b$ ,  $j$ ,  $d$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  对应相等, 则滑移线场几何相似; 对应于同一规范化坐标的两点的剪应力相似, 正应力减去  $q \cos^2 b$  后相似, 相似系数为两者  $gH$  的比值。不难证明, 以上逆命题也是成立的。

设  $c' = c/gH$ ,  $c'_w = c_w/gH$  以及  $q' = q/gH$ , 还可以进一步导出一个重要的推论: 若两个问题的  $a$ ,  $b$ ,  $j$ ,  $d$ ,  $c'$ ,  $c'_w$ ,  $q'$  对应相等, 则它们几何力学相似。当  $b \neq 0$  时, 逆命题也成立。

当体力  $X \neq 0$ ,  $Y \neq 0$  时, 也可采用无量纲分析法求解; 对于无重土  $X=Y=0$  的情况, 只需将以上各式中的  $g$  取任意非零值如水重度等, 以及将式 (35)、式 (36) 右端项取 0 即可。

## 5 几个特例

下面给出几个特例的一些数值分析结果:

(1) 无重土  $g=0$ , 且满足  $\Delta \geq \pi$ , 有以下一些结论: ①挡土墙被动土压力处处相等, 除了式 (14) ~ (17) 的几种特殊情况有解析解外, 一般情况下, 将前面 3.1 节中由迭代算法得到的  $p_{A \rightarrow A}$  代入式 (18) 即可求得; ② I 区、III 区为均匀应力场, 即  $p$ ,  $q$  处处相等,  $a$  线和  $b$  线为直线; ③II 区的  $a$  线为直线且相交于  $A$  点, 每条  $a$  线上的  $p$ ,  $q$  值不变,  $b$  线为对数螺旋线, 中心为  $A$  点, 极坐标方程为

$$r = r_0 \exp[\tan j (q - q_0)], \quad (45)$$

式中,  $r_0$ ,  $q_0$  为初始极半径和主应力方向角。特别地, 当  $\Delta = \pi$  时, II 区退化为一条  $a$  线; ④ I 区、III 区土反力分布  $r_a$  和  $r_b$  处处相等, II 区沿  $a$  线  $r_a$  值不变; ⑤ Hencky 第一定理成立; ⑥ Hencky 第二定理不完全适用, 仅限于 II 区沿  $a$  线有

$$\frac{\partial R_b}{\partial S_a} = \frac{\partial R_b}{\partial r} = -\frac{1}{\cos j}, \quad (46)$$

沿  $b$  线因  $R_a$  处处无穷大、 $\partial R_a$  在数学上无意义而没有类似的关系式, 这点与文献[35,36]不合。

(2) 纯黏性土  $d=j=0$ , 且满足  $b=0$ ,  $\Delta \geq \pi$ , 有以下一些结论: ① 被动土压力呈线性分布; ② I 区、III 区为线性应力场, 即任意两点之间  $p$  呈线性变化,  $q$  处处相等,  $a$  线和  $b$  线为直线; ③ II 区的  $a$  线为直线且相交于  $A$  点, 每条  $a$  线上的  $p$  呈线性变化而  $q$  值不变,  $b$  线为圆弧, 圆心为  $A$  点。特别地, 当  $\Delta = \pi$  时, II 区退化为一条  $a$  线; ④ I 区、III 区土反力分布  $r_a$  和  $r_b$  呈线性分布, II 区沿  $a$  线  $r_a$  呈线性分布; ⑤ Hencky 第一定理成立; ⑥ Hencky 第二定理不完全适用, 仅限于 II 区沿  $a$  线满足式(46) 的关系式。应当指出, 若  $b \neq 0$ , 则除第 5 点结论仍成立外, 其它几点均不成立。

(3) 当  $c_w = c = 0$ ,  $\Delta = \pi$  时, 或当  $a = \pi/2$ ,  $b = 0$ ,  $c_w = 0$ ,  $d = 0$  时, 其滑移线解与库仑解<sup>[9]</sup>完全一致, 有以下结论: ① 被动土压力呈线性分布; ② I 区、III 区为线性应力场,  $a$  线和  $b$  线为直线; ③ II 区退化为一条  $a$  线; ④ 土反力分布  $r_a$  和  $r_b$  呈线性分布; ⑤ Hencky 第一定理成立; ⑥ Hencky 第二定理不适用。

(4) 当  $a = \pi/4 - j/2$ ,  $b = 0$ ,  $c_w = c$ ,  $d = j$  时, 其滑移线解与库仑解<sup>[9]</sup>完全一致, 有以下结论: ① 被动土压力呈线性分布, 与滑移线  $BC$  的土反力分布相互对称; ② I 区和 II 区退化为边界  $AB$ , 此时  $AB$  为一条  $a$  线; ③ III 区为线性应力场,  $a$  线和  $b$  线为直线; ④ 土反力分布  $r_a$  和  $r_b$  呈线性分布; ⑤ Hencky 第一定理成立; ⑥ Hencky 第二定理不适用。

## 6 算例

某挡土墙  $H=10$  m,  $q=20$  kPa,  $a=95^\circ$ ,  $b=10^\circ$ ,  $g=19$  kN/m<sup>3</sup>,  $c=15$  kPa,  $j=25^\circ$ ,  $c_w=10$  kPa,  $d=10^\circ$ 。采用第一种解法, 计算分析结果如下:

(1) 计算网格划分取  $n=49$ ,  $m=39$ , 结点总数为 4263 个,  $AB$  边界上结点等间距布置。计算得到  $P_p=6422.4305$  kN, 被动土压力分布以及滑裂面  $BC$  的土反力分布如图 7(a) 所示, 为了图形清晰起见, 图中给出的滑移线场为  $n=25$ ,  $m=11$ 。

(2) 按文献[9]方法计算得  $P_p=7816.0499$  kN, 被动土压力分布以及滑裂面  $BC$  的土反力分布如图 7(b) 所示, 图中给出与前者相同深度处的土压力分布值。与前者相比, 滑移线场差别较大, 被动土压力合力的库仑解比滑移线解大 21.70%。

(3) 作用于图 7(a) 塑性区上所有外力在水平、垂直方向的投影之和  $F_x=0.0402$  kN,  $F_y=0.0389$  kN, 对  $B$  点的力矩之和  $M_B=0.3692$  kN·m, 在数值计算误差允许的范围内, 可以认为这些外力满足了平面力系的 3 个平衡条件。

(4) 进一步数值分析表明, Hencky 第一定理和第二定理在这里均不成立。

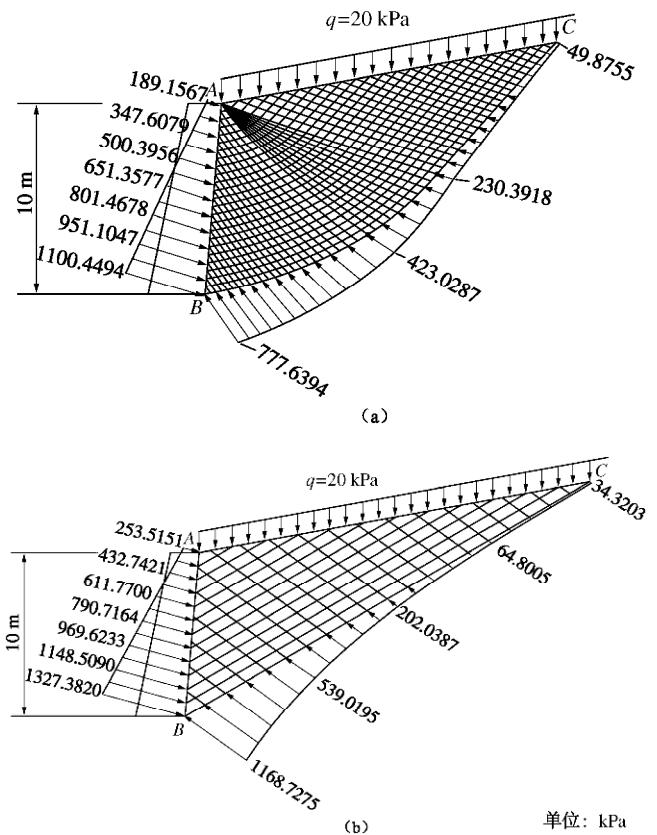


图 7 算例计算结果

Fig. 7 Results of calculation examples

## 7 结论

(1) 引进应力奇点及其应力边界条件使极限平衡问题成为静定可解, 而不必考虑土的应力-应变关系, 采用滑移线法求解。

(2) 塑性区内处处满足静力平衡方程和屈服条件, 应力处处连续, 作用于塑性区上的所有外力构成了一个平面平衡力系。

(3) 被动土压力的滑移线解一般总是小于或等于库仑解, 经典朗肯土压力或满足非奇异条件的经典库

仑土压力与滑移线解一致。

(4) 两个被动土压力极限平衡问题几何力学相似的充要条件是参数  $a$ ,  $b$ ,  $j$ ,  $d$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  及  $h_3$  对应相等。

(5) 关于滑移线场几何性质的 Hencky 第一定理和第二定理不具有普遍适用性。

(6) 极限平衡问题是一个理想化问题, 滑移线解是该问题的理论解, 它与真实状态下的极限荷载有多大相符或差异, 尚有待实验和实践去检验。

**致 谢:** 作者对大连理工大学凌影老师、浙江大学刘瑜博士及同事陈晶、孙小兵工程师在研究中的帮助表示感谢!

## 参考文献:

- [1] MOTTA E. Generalized Coulomb active earth pressure for distanced surcharge[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1994, **120**(6): 1072 – 1079.
- [2] GRECO V R. Active earth thrust by backfills subject to a line surcharge[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2005, **42**(5): 1255 – 1263.
- [3] GRECO V R. Lateral earth pressure due to backfill subject to a strip of surcharge[J]. Geotechnical and Geological Engineering, 2006, **24**: 615 – 636.
- [4] SHUKLA S K, GUPTA S K, SIVAKUGAN N. Active earth pressure on retaining wall for  $c - \phi$  soil backfill under seismic loading condition[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2009, **135**(5): 690 – 696.
- [5] TERZAGHI K. Theoretical soil mechanics[M]. New York: John Wiley and Sons, 1943.
- [6] ZHU D Y, QIAN Q H, LEE C F. Active and passive critical slip fields for cohesionless soils and calculation of lateral pressures[J]. Géotechnique, 2001, **51**(5): 407 – 423.
- [7] KUMAR J. Seismic passive earth pressure coefficients for sands[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2001, **38**(4): 876 – 881.
- [8] SUBBA RAO K S, CHOUDHURY D. Seismic passive earth pressures in soils[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2005, **131**(1): 131 – 135.
- [9] 彭明祥. 挡土墙被动土压力的库仑统一解[J]. 岩土工程学报, 2008, **30**(12): 1783 – 1788. (PENG Ming-xiang. Coulomb's unified solution of passive earth pressure on retaining wall[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, **30**(12): 1783 – 1788. (in Chinese))
- [10] 彭明祥. 挡土墙主动土压力的库仑统一解[J]. 岩土力学, 2009, **30**(2): 379 – 386. (PENG Ming-xiang. Coulomb's unified solution of active earth pressure on retaining wall [J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, **30**(2): 379 – 386. (in Chinese))
- [11] MAZINDRANI Z H, GANJALI M H. Lateral earth pressure problem of cohesive backfill with inclined surface[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1997, **123**(2): 110 – 112.
- [12] GNANAPRAGASAM N. Active earth pressure in cohesive soils with an inclined ground surface[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2000, **37**(1): 171 – 177.
- [13] LANCELOTTA R. Analytical solution of passive earth pressure[J]. Géotechnique, 2002, **52**(8): 617 – 619.
- [14] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Elsevier, 1975.
- [15] SLOAN S W. Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1988, **12** (1): 61 – 77.
- [16] LYAMIN A V, SLOAN S W. Lower bound limit analysis using nonlinear programming[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, **55**(5): 573 – 611.
- [17] SLOAN S W. Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1989, **13**(3): 263 – 282.
- [18] LYAMIN A V, SLOAN S W. Upper bound limit analysis using linear finite elements and non-linear programming[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2002, **26**(2): 181 – 216.
- [19] KUMAR J, SUBBA RAO K S. Passive pressure coefficients, critical failure surface and its kinematic admissibility[J]. Géotechnique, 1997, **47**(1): 185 – 192.
- [20] DRESCHER A, DETOURNAY E. Limit load in translational failure mechanisms for associative and non-associative materials[J]. Géotechnique, 1993, **43**(3): 443 – 456.
- [21] SOUBRA A H. Static and seismic passive earth pressure coefficients on rigid retaining structures[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2000, **37**(2): 463 – 478.
- [22] SOUBRA A H, MACUH B. Active and passive earth pressure coefficients by a kinematical approach[J]. Proceedings of the ICE - Geotechnical Engineering, 2002, **155**(2): 119 – 131.
- [23] HILL R. Mathematical theory of plasticity[M]. Oxford: Oxford University Press, 1950.

- [24] SOKOLOVSKII V V. Statics of granular media[M]. Oxford: Pergamon Press, 1965.
- [25] BOLTON M D, LAU C K. Vertical bearing capacity factors for circular and strip footings on Mohr - Coulomb soil[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1993, **30**(6): 1024 - 1033.
- [26] KUMAR J. Nr for rough strip footing using the method of characterisitics[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2003, **40**(3): 669 - 674.
- [27] MARTIN C M. Exact bearing capacity calculations using the method of characteristics[C]// Proceedings of the 11th International Conference of IACMAG, Turin, 2005, **4**: 441 - 450.
- [28] KUMAR J, CHITIKELA S. Seismic passive earth pressure coefficients using the method of characteristics[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2002, **39**(2): 463 - 471.
- [29] CHENG Y M. Seismic lateral earth pressure coefficients for c- $\phi$  soils by slip line method[J]. Computers and Geotechnics, 2003, **30**(8): 661 - 670.
- [30] CHENG Y M, HU Y Y. Active earth pressure on circular shaft lining obtained by simplified slip line solution with general tangential stress coefficient [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, **27**(1): 110 - 115.
- [31] CHENG Y M, HU Y Y, WEI W B. General axisymmetric active earth pressure by method of characteristics-theory and numerical formulation[J]. International Journal of Geomechanics, 2007, **7**(1): 1 - 15.
- [32] LIU F Q, WANG J H, ZHANG L L. Axi-symmetric active earth pressure obtained by the slip line method with a general tangential stress coefficient[J]. Computers and Geotechnics, 2009, **36**(1/2): 352 - 358.
- [33] LIU F Q, WANG J H. A generalized slip line solution to the active earth pressure on circular retaining walls[J]. Computers and Geotechnics, 2008, **35**(2): 155 - 164.
- [34] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000. (SHEN Zhu-jiang. Theoretical soil mechanics[M]. Beijing: China Water Power Press, 2000. (in Chinese))
- [35] 张学言, 闫澍旺. 岩土塑性力学基础[M]. 天津: 天津大学出版社, 2006. (ZHANG Xue-yan, YAN Shu-wang. Fundamentals of geotechnics plasticity[M]. Tianjin: Tianjin University Press, 2006. (in Chinese))
- [36] 宋二祥. 摩擦材料滑移线性质的 Hencky 第二定理及其证明[J]. 岩土工程学报, 1999, **21**(4): 522 - 524. (SONG Er-xiang. Discussion on "The discussion about Hencky's second law"[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering , 1999, **21**(4): 522 - 524.(in Chinese))

## 本期广告索引

- 封 2 北京金土木软件技术有限公司
- 封 3 重庆市永固工程拉筋带厂有限公司
- 封 4 国网电力科学研究院南京南瑞集团公司
- 后插 1 广州市中海达卫星导航技术股份有限公司
- 后插 2 台州市建元工程勘察仪器有限公司
- 后插 3 北京理正软件设计研究院有限公司
- 后插 4 中仿科技