

# 修正空间滑动面本构模型

史宏彦，白琳

(广东工业大学土木与交通工程学院，广东 广州 510006)

**摘要：**基于对空间滑动面本构模型的仔细分析发现，由于该模型假定空间滑动面上的应力比（剪应力与法向应力之比）与应变比（法向应变与剪应变之比）之间为直线关系，因而导致不适应于低应力水平和不能考虑土逐渐趋于破坏的特性。通过假定空间滑动面上的应力比与剪应变之间符合双曲线关系予以修正。与三轴条件下砂土和黏性土的试验结果比较表明，修正后的模型不仅适应于整个应力及应变的可能变化范围、反映土随荷载增加逐渐趋于破坏的特性，而且计算精度在总体上还略高于原模型。修正模型中的参数均可由常规三轴排水试验确定。

**关键词：**空间滑动面；本构模型；修正

中图分类号：TU43 文献标识码：A 文章编号：1000-4548(2010)09-1329-05

作者简介：史宏彦(1962-)，男，陕西汉中人，博士，教授，从事岩土工程方面的教学与科研工作。E-mail: shhy@163.com。

## Modified spatial mobilized plane constitutive model for soil

SHI Hong-yan, BAI Lin

(Faculty of Civil and Transportation Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

**Abstract:** Based on the careful analysis of the spatial mobilized plane (SMP) constitutive model, it is found that the model is not suitable to the lower stress level and cannot consider the progressive failure process for soil because of its assumption of the linear relation between the stress ratio (the ratio of shear stress to normal stress) and strain ratio (the ratio of normal strain to shear strain) on the SMP. A modified model is presented by assuming that the relation between the stress ratio and shear strain on the SMP is hyperbolic. A comparison between the calculated values of the modified model and the measured values from triaxial tests for sand and clay shows that the modified model is suitable to the overall change extent of stress and strain, and it has the higher precision than the original model as a whole. The constitutive parameters in the modified model can be easily determined by triaxial drained tests.

**Key words:** spatial mobilized plane; constitutive model; modification

## 1 空间滑动面本构模型简介

如果作用于土中某点的3个主应力（均为有效应力，下同）分别为 $s_1$ ， $s_2$ 和 $s_3$ ，那么，以任意两个主应力为组合，则可以作出3个独立的摩尔应力圆。从原点出发，对每个摩尔应力圆作切线，可以得到3个切点，它们在以 $s_1$ ， $s_2$ 和 $s_3$ 作用方向构成的三维应力空间中对应于3个强度发挥面，这3个强度发挥面形成的空间复合平面称之为空间滑动面或SMP，其法线的方向余弦为<sup>[1]</sup>

$$a_i = \sqrt{J_3 / (s_i J_2)} , (i=1,2,3) , \quad (1)$$

式中， $J_i$ 为偏应力张量的3个不变量。

松岗元(Matsuoka)和中井照夫(Nakai)等<sup>[1-5]</sup>认为，土粒在剪应力作用下的运动性状由摩擦定律控制。即平均说来，空间滑动面上的土粒最易滑动；并通过对砂土、正常固结黏土的三轴压缩及伸长、平面应变

和真三轴试验，表明在平均有效应力 $s_m = \text{const}$ 条件下，SMP面上的应力与应变之间具有如下关系<sup>[1-5]</sup>：

$$h_s = I(-de_{SMP}/dg_{SMP}) + m , \quad (2)$$

$$h_s = I(-de_{SMP}/g_{SMP}) + m' . \quad (3)$$

式中  $g_{SMP} = \int dg_{SMP}$ ， $e_{SMP} = \int de_{SMP}$ ； $I$ ， $m$ 和 $m'$ 为3个材料参数； $h_s$ ， $dg_{SMP}$ 和 $de_{SMP}$ 分别为空间滑动面上的应力比、剪应变增量和法向应变增量，

$$h_s = t_{SMP}/s_{SMP} = \sqrt{(J_1 J_2 - 9J_3)/(9J_3)} , \quad (4)$$

$$dg_{SMP} = de_1 a_1 + de_2 a_2 + de_3 a_3 , \quad (5)$$

$$de_{SMP} = [(de_1 a_2 - de_2 a_1)^2 + (de_2 a_3 - de_3 a_2)^2 + (de_3 a_1 - de_1 a_3)^2]^{\frac{1}{2}} , \quad (6)$$

其中， $t_{SMP}$ 和 $s_{SMP}$ 分别为空间滑动面上的剪应力和法向应力，

基金项目：广东省自然科学基金项目(04300172)；广东省重点学科基金项目

收稿日期：2010-04-07

$$t_{\text{SMP}} = \sqrt{J_1 J_2 J_3 - 9 J_3^2} / J_2 , \quad (7)$$

$$s_{\text{SMP}} = 3 J_3 / J_2 . \quad (8)$$

对式(2)积分并联立式(3)可得

$$g_{\text{SMP}} = g_0 \exp[(h_s - m) / (m' - m)] , \quad (9)$$

$$e_{\text{SMP}} = [(m' - m) / l] [\ln(g_{\text{SMP}} / g_0) - 1] g_{\text{SMP}} , \quad (10)$$

式中,  $g_0$  为起始剪应变, 与土的起始结构和平均有效应力  $s_m$  有关,

$$g_0 = g_{0i} + C_d \lg(s_m / s_{mi}) , \quad (11)$$

其中,  $s_{mi}$  是  $s_m$  的基本值, 通常取大气压力  $p_a$ ,  $g_{0i}$  是  $s_m = s_{mi}$  时的  $g_0$ ,  $g_{0i}$  和  $C_d$  由试验确定。

式(2)、(3)、(11)包含 5 个参数( $I, m, m', g_{0i}, C_d$ ), 它们一起确定了空间滑动面上应力与应变之间的关系。这些关系式的最大特点是形式简单, 与应力路径无关。但也有学者<sup>[6]</sup>通过试验证明, 上述关系在  $s_m \neq \text{const}$  时也是成立的。

SMP 上切向应力分量  $t_{\text{SMP}}$  的方向余弦为

$$b_i = (s_i - s_{\text{SMP}}) a_i / t_{\text{SMP}} . \quad (12)$$

假定空间滑动面上土粒平均滑移的切向应变分量  $dg_{\text{SMP}}$  与  $t_{\text{SMP}}$  同向, 并注意到  $de_{\text{SMP}}$  与  $a_i$  同向, 这样, 当应力比  $h_s > 0$  时的主应变增量可表示为

$$de_i^s = a_i de_{\text{SMP}} + b_i dg_{\text{SMP}} . \quad (13)$$

应当注意的是, 式(13)并不包括均压固结产生的应变增量  $de^c$ 。这是因为在该条件下  $h_s = 0$ ,  $de_i^s = 0$ 。当  $s_m \neq \text{const}$  时, 应通过式(11)的  $g_0$  考虑  $de_i^s$  随  $s_m$  的变化。此外, 为了将主应变增量  $de_i^s$  转换为一般应变增量  $\{de^s\}$ , 还需假定主应变增量与主应力同向。即

$$\{de^s\} = [T]\{de_i^s\} , \quad (14)$$

式中,  $[T]$  是将主应变增量转化为一般应变增量的转换矩阵。

假定总应变增量为

$$\{de\} = \{de^s\} + \{de^c\} + \{de^e\} , \quad (15)$$

式中,  $\{de^c\} = 0.434(C_c - C_s)ds_m / [(1 + e_0)s_m]$  为均压固结产生的塑性应变增量,  $\{de^e\}$  为弹性应变增量, 根据 Hook 定律计算。

式(15)的具体推导过程和计算公式可参见文献[3]。应当强调的是, 空间滑动面本构模型不能考虑土的软化特性。

## 2 空间滑动面本构模型存在的缺陷及其修正方法

### 2.1 空间滑动面本构模型存在的缺陷

从上述介绍可看出, 式(2)、(3)和(11)是空间滑动面模型的基础。但如果从前两个关系推出的式

(9)入手分析, 则不难发现该模型存在如下缺陷:

(1) 不适用于低剪应力水平或小应变情况

由式(4)、(6)可知, 不论以何种方式加载, 应有  $t_{\text{SMP}} \geq 0$  及  $h_s \geq 0$ 。此外, 因  $dg_{\text{SMP}}$  与  $t_{\text{SMP}}$  同向, 故  $dg_{\text{SMP}} \geq 0$  及  $g_{\text{SMP}} \geq 0$ ; 但从式(9)可看出, 为了保证  $h_s \geq 0$ ,  $g_{\text{SMP}}$  必须满足:

$$g_{\text{SMP}} \geq g_t = g_0 \exp[m / (m - m')] . \quad (16)$$

由于式(11)的  $g_0 > 0$ <sup>[1-5]</sup> 以及指数函数的非单调性, 因此  $g_t > 0$ 。换言之, 在  $g_t > g_{\text{SMP}} \geq 0$  范围内, 式(2)、(3)和(15)实际上是不存在的, 而这一应变范围一般对应于低剪应力或小应变阶段。

(2) 不能反映土逐渐趋于破坏的特性

当不考虑土的软化特性时, 根据临界状态土力学理论, 随着作用应力逐渐趋于破坏应力, 剪应变应逐渐增大且趋于无限。即如果从  $h_s = 0$  的均压状态开始加载, 则  $g_{\text{SMP}}$  应从  $g_{\text{SMP}} = 0$  逐渐增加且趋于无穷。但式(9)表示的是一个单调增加的指数函数, 不具有上述渐进特性, 并且  $h_s = 0$  时  $g_{\text{SMP}} = g_t \neq 0$ 。因此, 式(2)、(3)和(15)也就不能反映土逐渐趋于破坏的特性。

(3) 即使在  $g_{\text{SMP}} \geq g_t$  的情况下, 如果剪应力水平较低, 式(3)也与试验结果有较大的差异。

### 2.2 对上述缺陷的修正方法

从上述分析可知, 为了克服前两个缺陷, 应当保证  $\infty > g_{\text{SMP}} \geq 0$ , 并且当  $g_{\text{SMP}} = 0$  时  $h_s = 0$ ;  $g_{\text{SMP}} \rightarrow \infty$  时  $h_s$  应逐渐趋近于破坏应力比。鉴于此, 可以保留式(2)而去掉式(3)、(11), 并将  $h_s$  与  $g_{\text{SMP}}$  之间修正为以下双曲线关系:

$$h_s = h_{sf} \bar{G}_i g_{\text{SMP}} / (\bar{G}_i g_{\text{SMP}} + h_{sf}) , \quad (17)$$

$$\text{或 } dg_{\text{SMP}} = h_{sf} dh_s / [\bar{G}_i (h_{sf} - h_s)^2] , \quad (18)$$

式中,  $\bar{G}_i$  是一个无量纲参数, 简称为起始归一化剪切模量,  $h_{sf}$  为破坏应力比。

联立式(2)、(18)积分, 得

$$e_{\text{SMP}} = \frac{h_{sf}^2}{I \bar{G}_i} \left[ \frac{(m - h_{sf})h_s}{h_{sf}(h_{sf} - h_s)} + \ln \left( \frac{h_{sf}}{h_{sf} - h_s} \right) \right] , \quad (19)$$

$$\frac{e_{\text{SMP}}}{g_{\text{SMP}}} = \frac{h_{sf}}{I} \left[ \frac{m - h_{sf}}{h_{sf}} + \left( \frac{h_{sf}}{h_s} - 1 \right) \ln \left( \frac{h_{sf}}{h_{sf} - h_s} \right) \right] , \quad (20)$$

式(20)具有如下渐进特性:

$$(e_{\text{SMP}} / g_{\text{SMP}})|_{h_s \rightarrow 0} = m / I , \quad (21)$$

$$(e_{\text{SMP}} / g_{\text{SMP}})|_{h_s \rightarrow h_{sf}} = (m - h_{sf}) / I . \quad (22)$$

显然, 这种渐进特性仅取决于材料的性质。式(3)和式(20)在  $h_s - (-e_{\text{SMP}} / g_{\text{SMP}})$  坐标系中的示意比较见图 1。从图 1 可见, 这两个关系式的主要差别在起始和最后加载阶段。这样, 利用式(2)、(17)以及原模型中的推导方法, 即可推出修正后的空间滑动面本构模型。

### 2.3 修正模型中参数的确定方法

修正模型共有  $I, m, \bar{G}_i, h_{sf}$  4 个参数。由于式(2)、

(17) 与应力路径无关, 因此这些参数均可由常规三轴排水压缩试验确定。其中,  $I$  和  $m$  的确定方法同原模型。当不考虑拉、压状态有效内摩擦角  $j$  的差异时, 根据空间滑动面理论<sup>[1]</sup>, 可以推出以下关系:

$$h_{sf} = \sqrt{8} \tan j / 3 \quad (23)$$

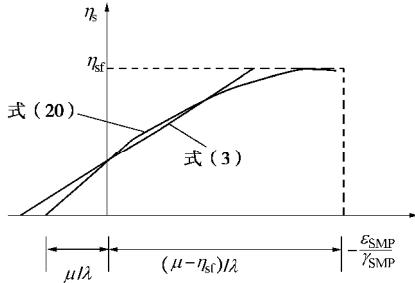


图 1 式(3)与式(20)的比较

Fig. 1 Comparison between Eq. (3) and Eq. (20)

利用破坏时的应力确定出内摩擦角  $j$  后, 即可由式(23)计算出  $h_{sf}$ 。此外, 在从均压状态开始剪切的三轴压缩试验中, 利用式(4)~(8)可以推出:

$$\bar{G}_i = G_i / s_3 = G_i / s_m \quad , \quad (24)$$

式中,  $G_i$  为起始剪切模量。由此可见,  $\bar{G}_i$  是以起始平均有效应力  $s_m$  为归一化因子的起始剪切模量。与起始切线变形模量  $E_i$  类似,  $G_i$  与  $s_m$  一般具有如下关系:

$$G_i = K p_a (s_m / p_a)^n \quad , \quad (25)$$

式中,  $K$  和  $n$  为土性参数。由于  $h_s$  与  $g_{SMP}$  之间为双曲线, 因此  $G_i$  与 Duncan-Chang 模型中  $E_i$  的确定方法相同, 在此不再赘述。

### 3 修正模型计算结果的试验验证

#### 3.1 验证 1

定义角度  $q$  为

$$q = \tan^{-1} [\sqrt{3}(s_2 - s_3) / (2s_1 - s_2 - s_3)] \quad . \quad (26)$$

松岗元等<sup>[2-3]</sup>在  $s_m = 392$  kPa 的三轴压缩和伸长以及  $s_m = 196$  kPa,  $q = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  的真三轴条件下对 Toyoura 砂进行了试验 (这里  $q = 0^\circ$  及  $60^\circ$  分别对应于三轴压缩和伸长)。部分试验结果如图 2~4。文献[2, 3]给出的材料参数  $I = 0.9$ ,  $m = 0.27$ ,  $m' = 0.41$ ,  $g_{0i} = 0.1\%$ ,  $C_d = 0.066\%$ 。根据前述参数确定方法及图 3(a) ( $s_m = 196$  kPa) 试验结果, 反算出的起始归一化切线模量  $\bar{G}_i \approx 210$ 。此外, 从图 2(b) 和 3(a) 也可以看出, 破坏应力比  $h_{sf} \approx 0.89$ 。应当注意的是, 由于在本验证中  $s_m = \text{const}$ , 因此  $\{\delta e\} = \{\delta e^s\}$ 。

从图 2 可以看出, 修正模型适应于整个应力及应变的可能变化范围。并且, 低应力水平时比原模型更

接近试验结果, 在其它应力水平时计算精度不低于原模型。图 2, 3 表明, 修正模型与原模型一样, 也与应力路径无关。

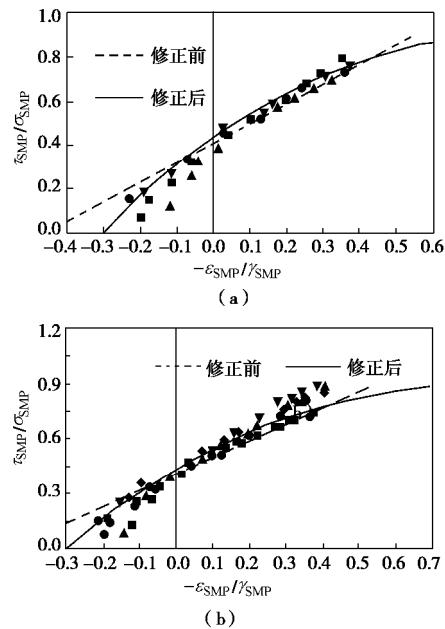


图 2 模型修正前后计算结果与试验结果的比较

Fig. 2 Comparison between calculated and measured results for original and modified models

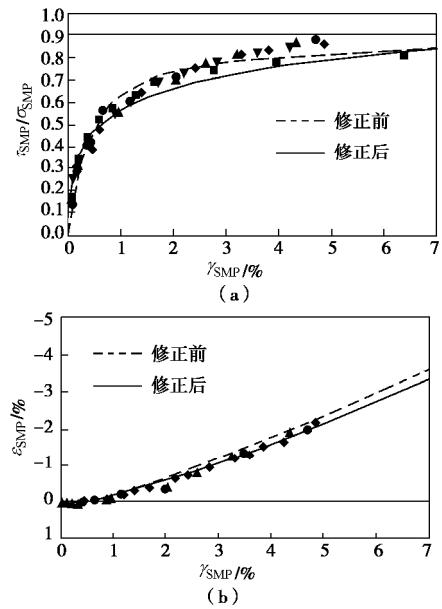


图 3 模型修正前后计算结果与试验结果的比较

Fig. 3 Comparison between calculated and measured results for original and modified models

修正前后模型计算结果与  $s_m = 196$  kPa 的真三轴试验结果的比较见图 4(a)~(e)。从图 4 可见, 修正模型的计算结果在整体上也比原模型更接近试验结果。

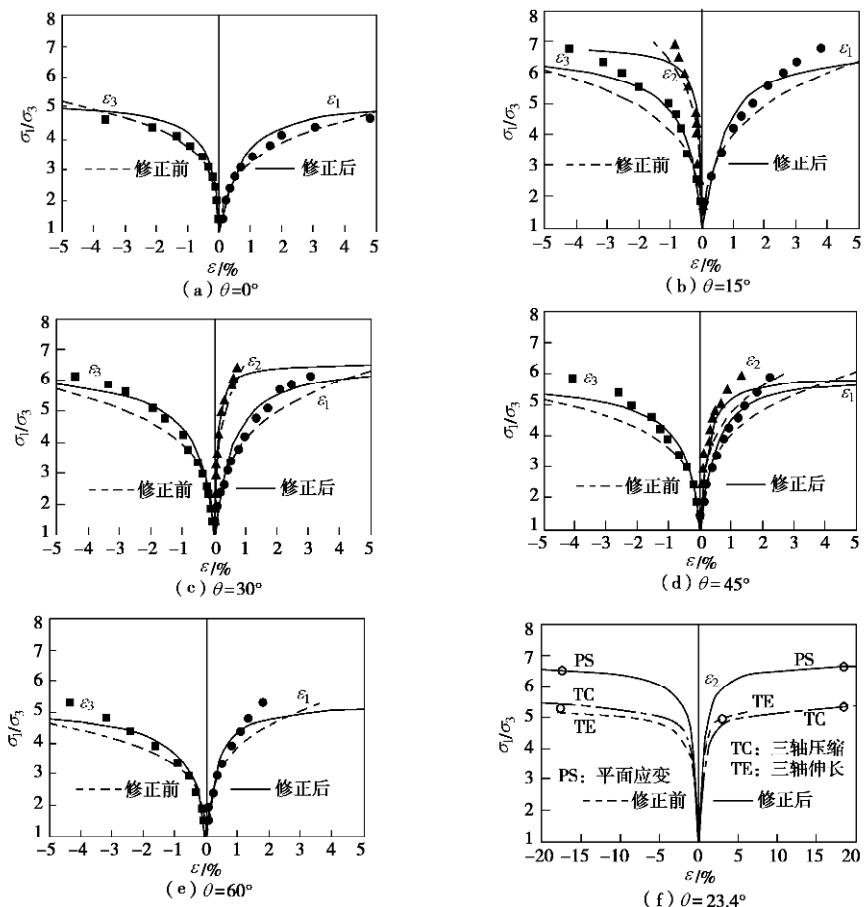
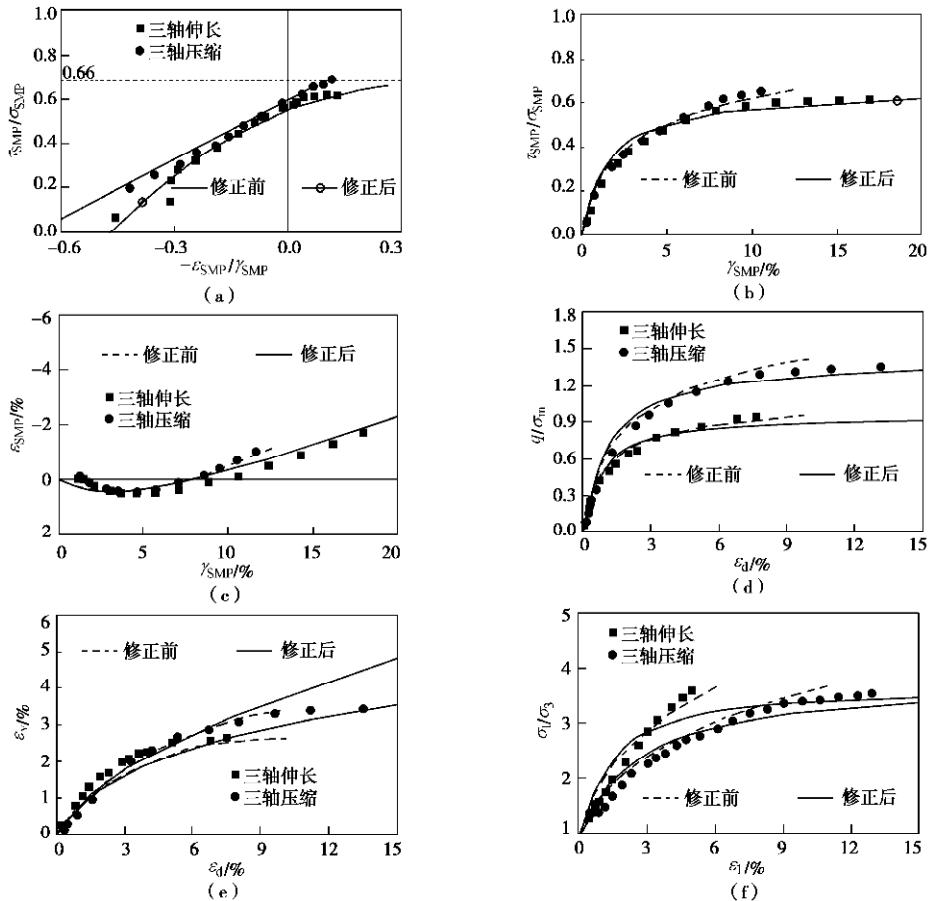
图 4 真三轴条件下模型修正前后计算结果与试验结果的比较 ( $S_m = 196$  kPa)

Fig. 4 Comparison between calculated and measured results for original and modified models under true triaxial conditions ( $S_m = 196$  kPa)



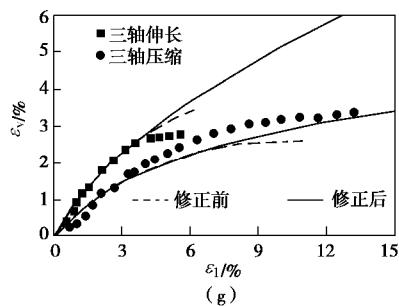


图 5 模型修正前后计算结果与试验结果的比较

Fig. 5 Comparison between calculated and measured results in true triaxial tests for original and modified model

由于  $q = 15^\circ$  时  $e_2 < 0$  (图 4 (b)), 而  $q = 30^\circ$  时  $e_2 > 0$  (图 4 (c)), 因此在  $15^\circ \sim 30^\circ$  之间应存在某一  $q = q_p$  使  $e_2 = 0$ , 即土处于平面应变状态。经试算有  $q_p \approx 23.4^\circ$ 。三轴压缩 (TC)、伸长 (TE) 以及平面应变 (PS) 条件下模型计算结果的比较见图 4 (f)。从该图可以看出, 三轴压缩与伸长条件下破坏时的应力比  $(s_1/s_3)_f$  基本相等, 但它低于平面应变条件下的破坏应力比。换言之, 不考虑中主应力影响的三轴压缩与伸长条件下土的有效内摩擦角基本相等, 但小于考虑中主应力影响的平面应变条件下。这种结论与试验结果<sup>[7]</sup>是一致的。

### 3.2 验证 2

Fujinomori 黏土在  $s_m = 196$  kPa 的三轴压缩及伸长条件下的试验结果<sup>[2-3]</sup>见图 5。在该图中,  $q$ ,  $e_d$  及  $e_v$  分别为广义剪应力、广义剪应变和体应变。材料参数  $I = 0.9$ ,  $m = 0.42$ ,  $m' = 0.60$ ,  $g_{0i} = 3.3\%$ ,  $C_d = 0$ 。

从图 5 (a) 和 5 (b) 有  $h_{sf} \approx 0.66$ , 根据图 5 (b) 试验结果反算出的  $\bar{G}_i \approx 42$ 。模型修正前、后的计算结果与试验结果的比较见图 5。从该图明显可见, 修正后的模型适应于直到破坏的整个应力作用范围, 并且能反映土的渐进破坏过程, 而原模型却不具备这种能力。

## 4 结语

本文提出了一种简单方法, 用于修正空间滑动面

本构模型不适应于低应力水平和不能考虑土的渐进破坏的缺陷。与试验结果的比较表明, 修正后的模型不仅适应于整个应力及应变的可能变化范围, 而且在总体上计算精度还略高于原模型。修正模型中的参数均可由常规三轴排水试验确定。

### 参考文献:

- [1] HAJIME Matsuoka. On the significance of the “Spatial Mobilized Plane” [J]. Soils and Foundations, 1976, **16**(1): 91 - 99.
- [2] TERUO Nakai, HAJIME Matsuoka. Shear behaviors of sand and clay under three-dimensional stress condition[J]. Soils and Foundations, 1983, **23**(2): 26 - 42.
- [3] TERUO Nakai, HAJIME Matsuoka. Constitutive equation for soils based on the extended concept of “Spatial Mobilized Plane” and its application to finite element analysis[J]. Soils and Foundations, 1983, **23**(4): 87 - 105.
- [4] TERUO Nakai, YASUJI Mihara. A new mechanical quantity for soils and its application to elastoplastic constitutive models[J]. Soils and Foundations, 1984, **24**(2): 82 - 93.
- [5] TERUO Nakai. An isotropic hardening elastoplastic model for sand considering the stress path dependency in three-dimensional stresses[J]. Soils and Foundations, 1989, **29**(1): 119 - 137.
- [6] 姚仰平. 真三轴条件下土动力非线性本构关系的新模型 [D]. 西安: 西安理工大学, 1995. (YAO Yang-ping. A new nonlinear dynamical constitutive model for soil under true triaxial conditions[D]. Xi'an University of Technology, 1995. (in Chinese))
- [7] 黄文熙. 土的工程性质[M]. 北京: 中国水利电力出版社, 1983: 275. (HUANG Wen-xi. Engineering properties of soil[M]. Beijing: China WaterPower Press, 1983: 275. (in Chinese))