

黏性土求主动土压力的库尔曼法及应用

狄圣杰^{1, 2}, 徐卫亚^{1, 2}

(1. 河海大学岩土工程科学研究所, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏 南京 210098)

摘要: 基于库仑理论的平面滑裂面假设, 利用库尔曼图解法求无黏性土土压力原理, 考虑滑裂面上填土的黏聚力和填土与挡土墙背之间的黏着力, 推出求黏性土主动土压力的新方法。方法可以使用假定滑裂面的方式进行编程试算从而求得主动土压力及破坏面倾角。采用 VB.net 为开发平台编制了程序。计算显示该方法易于实现且精度高, 原理简单, 便于推广应用。

关键词: 主动土压力; 库仑理论; 库尔曼图解法; 黏性土

中图分类号: TU432 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2010)06-0970-05

作者简介: 狄圣杰(1984-), 男, 博士研究生, 主要从事岩土力学与工程方面研究。E-mail: blurtout@163.com。

Culmann's method for active earth pressure of cohesive soil and its application

DI Sheng-jie^{1, 2}, XU Wei-ya^{1, 2}

(1. Geotechnical Research Institute, Hohai University, Nanjing 210098, China; 2. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Based on the sliding plane hypothesis of Coulomb's earth pressure theory and the Culmann's graphical construction for the active earth pressure of non-cohesive soil, a new method to calculate the active earth pressure of cohesive soil is derived considering the cohesion force on the sliding surface and the adhesive force on the interface of retaining walls. The assumption of sliding surface for programming is employed to obtain the active earth pressure and the sliding plane angle. Using programming language VB.net design, the procedures are developed. The calculated results show that the proposed method is of simple principle and high precision. It can be easily popularized and applied in projects.

Key words: active earth pressure; Coulomb's earth pressure theory; Culmann's graphical construction; cohesive soil

0 引言

挡土墙广泛应用于工民建、道路交通、水利水电、港口等工程建筑中。土压力是挡土墙设计的重要依据。因此土压力计算理论就成了土力学的一个重要组成部分。有关土压力的计算方法的研究也一直是岩土工程学科关注的焦点之一。目前工程中常用到的是经典的朗肯理论和库仑理论以及基于其原理的一些图解法。库尔曼图解法是基于库仑土压力理论, 应用楔体平衡的试算法求无黏性土土压力的一种方法, 能应用于填土面不规则和填土面上有荷载等情况。它显示极大优越性的同时也有缺点存在, 例如计算和作图工作量大, 而且易产生极大的误差, 精度难以保证。文献[1]提出了一些改进的库尔曼图解法, 作图工作量明显降低, 精确度也有所提高, 但约束情况多, 没从根本上解决主要矛盾, 而且不能用于不规则的填土表面和有荷载情况。文献[2]基于库仑平面滑动面假设, 考虑滑裂面上黏聚力、墙背黏着力、填土面裂缝等情况, 导出黏性土主动土压力的解析解, 但对超载处理比较繁琐,

致使计算显得复杂, 也没考虑到坡面形式。也有很多算法采用库仑理论中墙后填土滑动楔体极限平衡概念, 在滑动楔体上沿填土深度方向取单元片体进行分析, 建立考虑上述因素的力平衡方程, 得到了作用于挡土墙上的土压力及其分布。然而计算中涉及到数值方法求解微分方程, 不易为工程技术人员掌握, 同时该法是在墙背直立、填土面水平的条件下得出的, 应用范围有限^[3-4]。本文在相关研究成果的基础上, 利用库尔曼图解法原理考虑挡土墙尺寸、墙背倾角、填土滑裂面上黏聚力、填土与墙背接触面黏着力以及填土表面不规则、裂缝和超载的影响, 提出计算黏性土的新方法, 并编制了程序进行了验算。

1 基本原理

1.1 库尔曼法计算原理

本文中取沿墙单位长度(1 m)进行分析, 库尔曼

图解法采用的是平衡力的封闭三角形计算原理。库尔曼法作图如图1所示, 墙体及填土参数为墙背倾角 a 、填土面倾角 b 、填土重度 g 、墙高 H 、填土内摩擦角 j 、外摩擦角 d 、填土面上荷载 F 。取任意滑裂土楔体 ABC_i 进行分析, 如图2所示, 破裂角 q_i 、填土重 W_i 、楔体所受土体反力 R_i 、楔体所受墙体反力 E_i , 则由正弦定理可知

$$\frac{E_i}{\sin(q_i - j)} = \frac{G_i}{\sin(q_i - j + y)}, \quad (1)$$

$$G_i = gS_{\Delta ABC_i} = \frac{1}{2}g|AB||BC_i| \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2}g|AB||BC_i| \sin(90^\circ + q_i - a) \\ E_i = G_i \cdot \frac{\sin(q_i - j)}{\sin(q_i - j + y)}, \quad (3)$$

其中 $y = 90^\circ - a - d$ 。楔体自重为

$$G_i = \frac{gH^2}{2} \cdot \frac{\cos(a - b)\cos(q - a)}{\cos^2 a \sin(q - b)}. \quad (4)$$

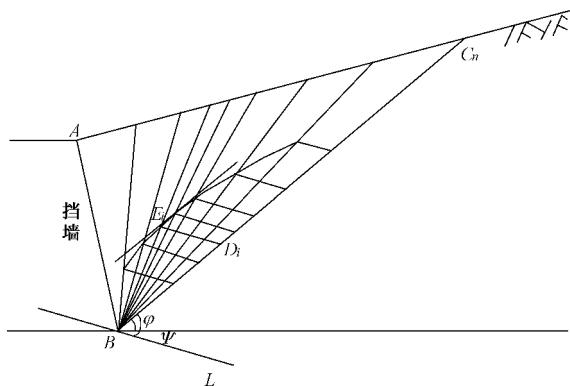


图1 求主动土压力的库尔曼法作图

Fig. 1 Culmann's method for active earth pressure

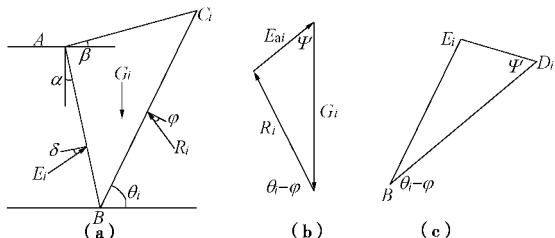


图2 无黏性土滑动土体受力及力封闭三角形图

Fig. 2 Forces of non-cohesive soil on sliding wedge and force balance

如果填土表面滑裂面内有荷载 F , 则竖直向下的合力 $G_i = G_i + F$ 。将式(4)代入式(3)得到

$$E_i = \frac{gH^2}{2} \cdot \frac{\cos(a - b)\cos(q_i - a)\sin(q_i - j)}{\cos^2 a \sin(q_i - b)\sin(q_i - j + y)}. \quad (5)$$

滑面 BC_i 是任意选定的, 要求 E_a 需求式(5)的极值, 由 $dE_i/dq_i = 0$, 可求得最危险滑裂面的角 q_0 , 将其代入式(5)可得 E_a , 这就是库仑主动土压力公

式。库尔曼法是将 G_i 以一定的比例在 BC_n 上量出, 然后根据封闭力三角形中 G_i 与 E_i 的夹角作出 D_iE_i , 以线段 D_iE_i 长度代表 E_i 数值, 然后通过寻求最大的 D_iE_i 长度确定 E_a 。将图1的 BE_iD_i 取出分析如图2中c所示, 也就是说 BE_i 代表 R_i , BD_i 代表 G_i , D_iE_i 代表了 E_i , 由于库尔曼作图法是将 G_i 、 E_i 取一定的比例, 故图2中(b)和(c)两个三角形是相似的, 这就是库尔曼法求解运用的原理, 方法和库仑公式是一致的, 通过电算求得结果也完全一致。可见库尔曼法也是库仑解析解的一种形式, 而且优点在于可以反映填土面的各种情况, 显示出了较大的优越性。

对于库尔曼法求被动土压力时, 将 BL 线与水平线呈夹角 j 画与水平线以下, 其它步骤与求主动土压力步骤相同, 不同点在于不是求 E_i 的最大值, 而是求 E_i 的最小值, 如图3所示。本文主要讨论的是主动土压力的库氏图解方法, 对于求被动土压力原理相同, 限于篇幅不在此讨论。

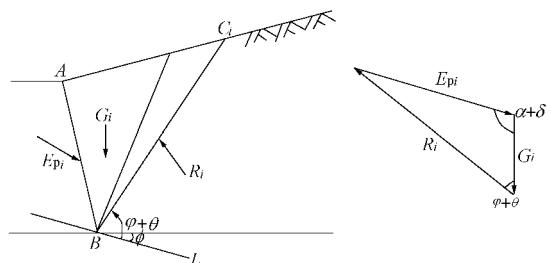


图3 求被动土压力的库尔曼法作图

Fig. 3 Culmann's method for passive earth pressure

1.2 运用库尔曼法求黏性填土的主动土压力

库尔曼图解法基于库仑土压力理论, 也就是基于直线型滑裂面导致的楔形土体滑动的假定前提, 这一假定前提与现行的规范规程求黏性土和粉土主动土压力的假定前提是一致的^[5]。故本文应用库尔曼法推求黏性填土主动土压力也是在这一假定前提下进行的。

下面依其原理推求考虑黏聚力 c_s 和墙土间黏着力 c_w 情况下主动土压力的计算方法。在墙后是黏性填土的情况下墙体产生水平位移和绕墙底转动时, 即挡墙发生离开填土位移, 应按填土表面出现裂缝计算, 绕墙顶转动时则不考虑出现裂缝。其中裂缝深度 z_0 可用极限平衡条件求得

$$z_0 = \frac{2c_s}{g\sqrt{K_a}} - \frac{q}{g}, \quad (6)$$

式中, $K_a = \tan^2(45^\circ - j/2)$ 为朗肯主动土压力系数, 当 $z_0 \leq 0$ 时, 取 $z_0 = 0$ 。计算竖直方向合力的时候墙高要进行折减, $q + gz_0$ 就计为外荷载, 而计算土重时的墙高则变为 $H - z_0$, 将其代入式(3)即得。取其任

意土楔体 ABC_i 进行受力分析, 如图 4 所示。

其中矢量 LM 就代表主动土压力 E_i , 滑裂面上黏聚力 $C_{si} = c_s |BC_i|$, 墙背上黏着力 $C_w = c_w |AB|$ 。这样的力矢关系不免有些复杂, 应用到库尔曼法中比较困难, 故对其简化, 如图 5 (a), 5 (b) 所示。

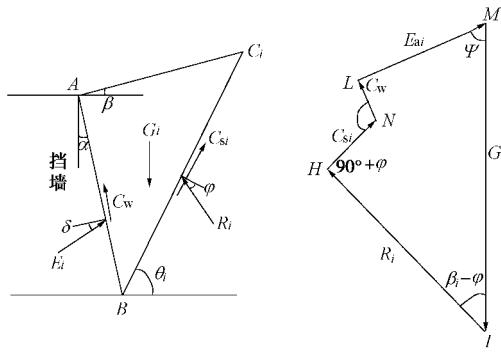


图 4 黏性土滑动土体受力及力封闭多边形图

Fig. 4 Forces of cohesive soil on sliding wedge and force balance

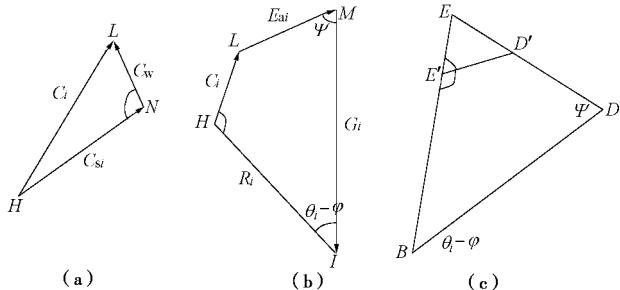


图 5 简化力矢图及库尔曼法计算土压力图

Fig. 5 Simplified force balance and calculation based on Culmann's method

将土的黏聚力 C_{si} 和黏着力 C_w 考虑为一合力 C_i , 向量 C_{si} 、 C_w 首尾相接, 满足向量关系 $C_i = C_w + C_{si}$ 。这就是黏聚力影响的参数。根据矢量 HN 与 NL 的关系, 可由矢量关系计算出 C_i 。

$$W_i = \frac{g(H-z_0)^2}{2} \cdot \frac{\cos(a-b)\cos(q_i-a)}{\cos^2 a \sin(q_i-b)}, \quad (7)$$

$$F_i = (q+gz_0)(H-z_0) \cdot \frac{\cos(a-b)\cos(q_i-a)}{\cos^2 a \sin(q_i-b)}, \quad (8)$$

$$G_i = W_i + F_i. \quad (9)$$

将其代入式(3)求得无黏聚力 C_{si} 和无黏着力 C_w 影响下的主动土压力 E_i , 即为图 5(c)中的矢量 ED 。

$$E_i' = G_i \cdot \frac{\sin(q_i-j)}{\sin(q_i-j+y)}, \quad (10)$$

$$|C_w| = c_w |AB| = \frac{c_w (H-z_0)}{\cos a}, \quad (11)$$

$$|C_{si}| = c_{si} |BC_i| = c_{si} (H-z_0) \frac{\cos(a-b)}{\cos a \sin(q_i-b)}, \quad (12)$$

$$|C_i| = |HL| = \sqrt{|HN|^2 + |NL|^2 - 2|HN||NL|\cos\angle HNL}$$

$$= \sqrt{|C_{si}|^2 + |C_w|^2 - 2|C_{si}||C_w|\cos(90^\circ + q_i - a)}. \quad (13)$$

对于斜三角形 LHN , 已知三边求内角是定解, 不会出现不稳定讨论, 可根据余弦定理:

$$\angle LHN = \arccos \frac{|C_{si}|^2 + |C_i|^2 - |C_w|^2}{2|C_i||C_{si}|}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \angle LHI &= \angle LHN + \angle NHI \\ &= \arccos \frac{|C_{si}|^2 + |C_i|^2 - |C_w|^2}{2|C_i||C_{si}|} + 90^\circ + j. \end{aligned} \quad (15)$$

以上图形关系是基于力矢图得来, 将图 1 的 BE_iD_i 取出进行分析可得到与力矢图对应于库尔曼法的关系, 图 5(c) 为库尔曼法土压力计算图, 对于未知的三角形 $EE'D'$ 来说, 已知一边 $E'D'$ 与两夹角 $\angle EED'$ 和 $\angle E'E'D'$, 则此三角形是唯一的定解。可见四边形 $LMIH$ 和 $BE'DD'$ 的关系: BE' 代表 R_i , BD 代表 G_i , $E'D'$ 代表了 C_i , $D'D$ 代表了 E_i , 也可以说它们是全等四边形。通过图 5(c) 可知 $\angle BED = 180^\circ - y - q_i + j$, $\angle D'E'B = \angle LHI$, 可利用正弦定理求得 $|D'E'|$ 。
 $\angle EE'D' = 180^\circ - \angle D'E'B$

$$= 90^\circ - j - \arccos \frac{|C_{si}|^2 + |C_i|^2 - |C_w|^2}{2|C_i||C_{si}|}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} |D'E'| &= \frac{|C_i| \sin \angle EED'}{\sin \angle D'E'E'} \\ &= \frac{|C_i| \sin(90^\circ - j - \arccos \frac{|C_{si}|^2 + |C_i|^2 - |C_w|^2}{2|C_i||C_{si}|})}{\sin(q_i - j + y)}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} |D'D| &= |DE| - |D'E'| = E_i' - |D'E'| \\ &= \frac{G_i \sin(q_i - j) - |C_i| \sin(90^\circ - j - \arccos \frac{|C_{si}|^2 + |C_i|^2 - |C_w|^2}{2|C_i||C_{si}|})}{\sin(q_i - j + y)}. \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $|DE|$ 为式(10)所求得的不考虑土黏性的主动土压力即 E_i' , 式(18)即为求黏性土主动土压力公式。在计算机科学技术迅速发展并普及到工程中的今天, 通过编程求解土压力都非常简单快捷。式子中只有一个未知数 q_i , 令 q_i 取值范围为 $j < q_i < 45^\circ + j$, 步长设置为 0.1° , 可以编程求得 $D'D$, 即为所要求的黏性土的主动土压力。根据求得的一维数组 $D'D$ 的最大值可得到其对应的下标 q_i , 又可以求出滑裂面倾角 q_{cr} 。

2 程序及算例

根据 VB.net 编程开发土压力计算软件, 填土面条件可以自定义, 如图 6 所示, 由图中坐标可以求得线性边界条件, 对于弧形填土面可取 3 个明显拐点反映。

滑裂土楔体重是由 q_i 的区间和步长计算得来。因为已知墙踵、A、B、C、D点坐标, 套用求三角形面积的子程序可以求出a、b、c的面积, 滑裂面包括土体面积由a、b、c三个三角形面积组成。这一般能够反映普遍的情况。荷载分布依据填土面情况而定, 且竖直向下。墙背倾角为负、为零及为正时分别对应仰斜、垂直和俯斜3种类型的挡土墙。

利用开发软件的绘图功能将程序计算结果按一定比例绘出, 输出界面的示例如图7。在图7中的界面, 点击填土面输入控件, 则激活如图6所示的输入界面; 点击显示控件则绘出示意图, 并将计算结果输出; D_iE_i 为随机显示的几个试算线段用以对比, DE则代表了所有线段中的最大值, 即主动土压力值, ABC代表了滑动土楔体, BC倾角即为滑裂面倾角。

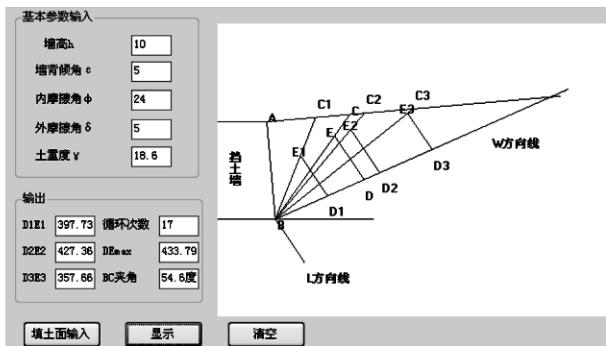


图6 填土面形式及荷载情况的输入界面

Fig. 6 Filling form and load case

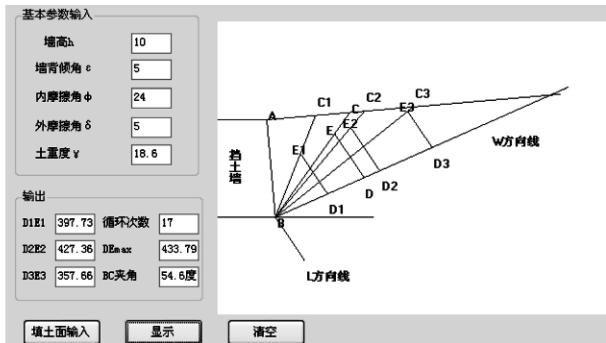


图7 计算输出界面

Fig. 7 Output interface of computation

通过计算实例验证, 该程序方便可用, 通用性较强, 并且能够根据所绘图形直观地动态追踪输出信息。

算例1, 某挡土墙高 $H=10\text{ m}$, 墙后填土参数为: $g=18.6\text{ kN/m}^3$, $j=24^\circ$, 填土表面无超载 $q=0$, 其它有关参数 c_w 与 c_s 单位为 kPa , 其它角度参数单位为($^\circ$), 参数与计算结果列于表1(土压力单位 kN/m)。本文与文献[2]计算结果完全相同, 且给出了滑裂面倾角。

算例2, 某挡土墙高 $H=4.6\text{ m}$, 墙背垂直 $a=0^\circ$, 墙后填土为黏性土, $g=19.3\text{ kN/m}^3$, $j=15^\circ$, $d=10^\circ$, $b=0^\circ$, $c_s=15\text{ kPa}$, 填土表面作用均布荷载 $q=10\text{ kN/m}$ 。

本文计算结果为考虑出现裂缝情况下主动土压力为 72.48 kN/m , 不考虑情况下主动土压力为 68.90 kN/m , 与文献[3]算法结果完全一致。而且本文算出两种情况下的滑裂面倾角均为 51° 。

算例3, 某挡土墙高 $H=10\text{ m}$, 墙背竖直 $a=0^\circ$, $g=18\text{ kN/m}^3$, $j=30^\circ$, $d=20^\circ$, 填土为无黏性土且表面无超载 $q=0$, 填土面情况如图5所示, 墙顶至填土转折点水平距离 $AB=3\text{ m}$ 且 AB 与水平面夹角为 $b=20^\circ$, 填土面 BCD 水平。

本文计算结果主动土压力为 316.4 kN/m , 滑裂面倾角为 55° , 与文献[6]推荐的方法计算结果 $q_{cr}=55^\circ$ 一致。

3 结 论

(1) 库尔曼图解法是确定土压力较好的一种图解方法, 广泛应用于工程实践。本文是在库仑平面滑裂面假设的条件下, 考虑黏性填土的黏聚力和墙背的黏着力等因素, 在有关研究成果的基础上, 基于库尔曼作图法原理, 提出考虑填土面形式的有关黏性土主动土压力计算方法。因结合库尔曼图解法原理, 与文献[2]相比计算过程清晰简单, 推导出的公式较其简洁, 当填土面形式复杂时采用本文方法进行计算更为合理。从 C_{si} , C_w , C_i 向量关系可以看出, 不考虑墙

表1 主动土压力算例1

Table 1 Example 1 for active earth pressure

a	b	d	C_{si}	C_w	本文方法	文献2方法	朗肯理论	库伦理论
0	0	0	0	0	392.2(57°)	392.2	392.2	392.2
0	0	0	10	0	273.1(57°)	273.1	273.1	不适用
5	5	5	0	0	433.8(55°)	433.8	不适用	433.8
5	10	10	10	0	328.4(54°)	328.4	不适用	不适用
5	10	10	10	5	310.4(53°)	310.4	不适用	不适用
10	10	15	10	0	368.8(54°)	368.8	不适用	不适用

(括号内为本文计算出的滑裂面倾角)

背黏着力为考虑其值的一个特例，而无黏性土土压力计算又为考虑土黏性计算的一个特例。该方法推理简洁可靠，原理清晰，考虑全面较符合工程实践，便于工程人员掌握，易于在工程中推广。

(2) 应当说明的是，本文方法是基于库仑土压力理论推导而来，库仑土压力理论假定土中的滑裂面是通过墙踵的平面，这与实际情况和理论解不符。这种平面滑裂面的假定使得破坏楔体平衡时所必须满足的力系对任一点的力矩之和等于零 ($\Sigma M=0$) 的条件得不到满足。一些基于库仑理论或朗肯理论所推导出的土压力的所谓的精确解析解都不能算是严格的理论解。故本文方法带有一定的近似性，计算结果有一定误差，但对于主动土压力计算可以满足工程精度要求且方法简便，至今也是一种被广泛采用的土压力计算方法。

参考文献：

- [1] 王奎华, 阙仁波. 改进的库尔曼图解法及其在土压力计算中的应用[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(2): 167 - 169.
(WANG Kui-hua, QUE Ren-bo. Ameliorated Culmann's graphical construction and its application in earth pressure calculation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2003, 25(2): 167 - 169. (in Chinese))
- [2] 卢廷浩. 考虑黏聚力及墙背黏着力的主动土压力公式[J]. 岩土力学, 2002, 23(4): 470 - 473. (LU Ting-hao. A formula of active earth pressure including cohesion and adhesion[J]. Rock and Soil Mechanics, 2002, 23(4): 470 - 473. (in Chinese))
- [3] 胡晓军. 黏性土主动土压力库仑精确解的改进[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(8): 1049 - 1052. (HU Xiao-jun. Improvement on Coulomb accurate solution of active earth pressure to cohesive soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(8): 1049 - 1052. (in Chinese))
- [4] 王元战, 王海龙, 张文忠. 挡土墙土压力分布[J]. 中国港湾建设, 2000(4): 1 - 5. (WANG Zhan-yuan, WANG Hai-long, ZHANG Wen-zhong. Distribution of earth pressure on retaining wall[J]. China Harbor Engineering, 2000(4): 1 - 5. (in Chinese))
- [5] GB50007—2002 建筑地基基础设计规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002. (GB50007—2002 Code for design of building foundation[S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2002. (in Chinese))
- [6] 顾慰慈. 挡土墙土压力计算[M]. 北京: 中国建材工业出版社, 2002. (GU Wei-ci. Calculation of earth pressure on retaining wall[M]. Beijing: China Building Material Industry Publishing House, 2002. (in Chinese))