

改进复合单元渗透矩阵调整法求解自由面三维渗流场

付延玲¹, 周志芳¹, 武永霞²

(1. 河海大学, 江苏 南京 210098; 2. 上海岩土工程勘察设计研究院有限公司, 上海 200002)

摘要: 针对现有复合单元渗透矩阵调整法解决无压渗流问题的不足, 提出了改进复合单元渗透矩阵调整法。将自由面单元分为干、湿单元以及过渡单元, 对于自由面穿越的过渡单元, 采用双参数罚函数法, 按流量等效将渗流实区渗透系数进行调整, 以便更准确地考虑单元的部分饱和和非饱和情况。该方法克服了高斯点附近积分值的不稳定问题, 提高了计算精度和收敛速度。同时对有自由面渗流的自由面边界积分问题, 提出了一种新的算法。经实例和工程验证, 该方法有效可行。

关键词: 无压渗流; 有限元; 渗透矩阵; 自由面; 罚函数

中图分类号: P641.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2009)09-1434-06

作者简介: 付延玲(1964-), 女, 陕西蒲城人, 博士研究生, 主要从事水文地质、工程地质方面的研究。E-mail: fyl@hhu.edu.cn。

Improved adjustment method of compound element conductivity matrix for calculating 3D seepage field with free surface

FU Yan-ling¹, ZHOU Zhi-fang¹, WU Yong-xia²

(1. Hohai University, Nanjing 210098, China; 2. Shanghai Geotechnical Investigations & Design Institute, Shanghai 200002, China)

Abstract: In the light of the inherent drawbacks in the existing adjusting compound element conductivity matrix to calculate unconfined seepage, an improved method of adjusting compound element conductivity matrix is proposed. The free surface elements are divided into the dry elements and the wet elements and the transitional elements, and the penalty function method with double parameters is applied to the transitional elements intersected by free surface. Based on the groundwater flow quantity equivalent effect, the permeability coefficient of the actual seepage field is adjusted so as to precisely consider partial saturation and unsaturation. The unstability integration number near the Gauss point is overcome, and the calculating precision and the convergence speed are improved. Meanwhile, a new method for computing the boundary integration is proposed in free surface seepage field. The method was proven to be effective and feasible by examples and projects.

Key words: unconfined seepage; finite element; conductivity matrix; free surface; penalty function

0 引言

岩土边坡、土坝、地下洞室及地下水运动等渗流一般都涉及到有自由面的无压渗流问题, 由于自由面的位置是未知的, 具有复杂的非线性, 属于混合边界问题, 需要进行迭代求解。求解该类问题的有限元法, 通常有变网格法和固定网格法两种, 由于变网格法容易使单元网格畸变, 难以处理存在水平介质分层及各种复杂夹层的情况, 尤其在进进行渗流场-应力场耦合分析时, 存在明显缺陷, 已逐渐被淘汰。自1973年Newman首次提出用不变网格 Galerkin 法求解有自由面的渗流场以来, 国内外学者提出了许多有效的固定网格法, 主要有剩余流量法^[1]、单元渗透矩阵调整法^[2]、初流量法^[3]、节点虚流量法^[4]、复合单元法^[5]及截止负压法^[6]等。这些方法解决了不少问题, 但也存在不同程

度的缺陷。本文根据文献[5]提出的复合单元渗透矩阵调整法, 提出了改进复合单元渗透矩阵调整法, 将自由面单元分为干、湿单元以及过渡单元, 对于自由面穿越的过渡单元采用双参数罚函数法, 解决了在高斯点附近解易出现振荡、稳定性不好的问题, 实现了非均质各向异性有自由面渗流问题的快速严密求解。

1 三维非稳定渗流的基本理论

1.1 渗流控制方程和定解条件

根据达西定律和渗流连续性原理, 当渗透系数主方向与坐标轴方向一致时, 则多孔介质三维非稳定渗

流控制微分方程为^[7-8]

$$\frac{\partial}{\partial x}(k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z}) + W = \mu_s \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (x, y, z) \in \Omega. \quad (1)$$

式中 k_{xx}, k_{yy}, k_{zz} 分别为各向异性主方向渗透系数 (m/d); h 为点 (x, y, z) 在 t 时刻的水头值 (m); μ_s 为含水层的贮水率 (1/m); W 为源汇项 (1/d); t 为时间 (d); Ω 为所研究渗流区。

初始条件:

$$h(x, y, z, t)|_{t=0} = h_0(x, y, z, t_0) \quad (x, y, z) \in \Omega. \quad (2)$$

边界条件:

$$h(x, y, z, t)|_{\Gamma_1} = h_1(x, y, z, t) \quad (x, y, z) \in \Gamma_1, \quad (3)$$

$$k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \cos(n, x) + k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \cos(n, y) + k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \cos(n, z) \Big|_{\Gamma_2} = q(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \Gamma_2, \quad (4)$$

$$h(x, y, z, t) = z(x, y, t), \quad (x, y, z) \in \Gamma_3, \quad (5)$$

$$k \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = \mu \frac{\partial h}{\partial t} n_z. \quad (6)$$

式中 $h_0(x, y, z, t_0)$ 为点 (x, y, z) 处的初始水头值 (m); $h_1(x, y, z, t)$ 为 t 时刻第一类边界上各点的已知水头值 (m); $q(x, y, z, t)$ 为 t 时刻单位面积第二类边界上穿过的流量 (m/d); $\cos(n, x)$ 、 $\cos(n, y)$ 、 $\cos(n, z)$ 分别为流量边界外法线方向与坐标轴方向夹角的余弦。 μ 为饱和差 (自由面上升) 或给水度 (自由面下降), 它表示在自由面改变单位高度下, 从含水层单位截面积上吸收或排出的水量; n_z 为自由面外法线方向向量 $n = \{n_x, n_y, n_z\}$ 的第三个分量; Γ_1 、 Γ_2 、 Γ_3 分别为第一类边界、第二类边界及自由面边界。

1.2 有限元方法

根据变分原理, 对微分方程 (1) 对应的泛函取变分为零, 取八节点等参元的插值函数, 三维计算域剖分为 n 个六面体单元, 将各个单元格迭加, 并对时间采用隐式差分形式, 则渗流场的有限元支配方程为

$$\left\{ [K] + \frac{1}{\Delta t} ([S] + [G]) \right\} \{h\}_{t+\Delta t} = \{F\} + \frac{1}{\Delta t} ([S] + [G]) \{h\}_t, \quad (7)$$

其中,

$$[K] = \sum_{e=1}^n \iiint_e (k_{xx} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} +$$

$$k_{zz} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z}) dx dy dz,$$

$$[S] = \sum_{e=1}^n \iiint_e \mu_s N_i N_j dx dy dz,$$

$$[G] = \iint_{\Gamma_3} \mu N_i N_j \cos \theta d\Gamma, \quad i, j = (1 \sim 8).$$

式中 $[K]$ 为总体渗透矩阵, 由各单元渗透矩阵集合而成; $[S]$ 为储水矩阵, 由各单元储水矩阵迭加而得; $[G]$ 为流量补给矩阵, 由自由面穿过的各单元流量补给矩阵迭加而得; $\{F\}$ 为水量矩阵 (节点流量矩阵), 由各单元水量矩阵 $\{F\}^e$ 迭加而得; $\{h\}$ 为待求节点水头向量; Δt 为时间步长; N_i 、 N_j 是单元的形函数; Γ_3^e 为单元与自由面的交截面; $d\Gamma$ 表示 Γ_3^e 上的面积微元; θ 为单元内自由面的法线与铅垂线的夹角。

2 改进复合单元渗透矩阵调整法

渗流自由面将整个计算域分为实域和虚域, 若单元内所有节点的水头都小于其 z 坐标 ($h - z < 0$), 位于渗流虚域, 则该单元为干单元; 若单元内所有节点的水头都大于其 z 坐标 ($h - z > 0$), 位于渗流实域, 则该单元为湿单元; 若 $h - z = 0$, 则表明该节点处于渗流自由面上。当单元内部分节点水头大于其 z 坐标且部分节点水头小于其 z 坐标, 跨越渗流虚域和实域, 则该单元为过渡单元。

文献[5]提出的复合单元渗透矩阵调整法, 为不变网格法求解有自由面的渗流问题开辟了新思路, 但在求解的稳定性方面还显得不够严密和完整, 本文在此基础上作了改进, 提出改进复合单元渗透矩阵调整法。其原理是, 将整个几何区域分为 3 种单元: 干单元、湿单元及过渡单元。自由面以上干单元舍弃或在迭代过程中将其渗透系数乘以 $1/1000$, 自由面以下的湿单元渗透系数不用调整。对于自由面穿过的过渡单元, 按流量等效将渗流实区渗透系数进行调整, 采用罚函数法将计算区域拓展至整个单元, 使待定自由面边界固化, 迭代求解。选取的连续折线型罚函数 (见图1) 表达式为

$$A_\varepsilon(h-z) = \begin{cases} 0, & h-z < \varepsilon_1, \\ \frac{h-z-\varepsilon_1}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}, & \varepsilon_1 \leq h-z \leq \varepsilon_2, \\ 1, & h-z > \varepsilon_2, \end{cases} \quad (\varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 > 0). \quad (8)$$

其中, $A_\varepsilon(h-z)$ 为罚函数, ε_1 、 ε_2 为罚函数参数。 ε_1 是一负值, ε_1 为单元内位置最低的高斯点到位置最低的节点的 z 坐标之差, ε_2 为单元内位置最高的高斯点到位置最高的节点的 z 坐标之差, 其位置如图 2 所示。

如果引入 $h - z = 0$ 时的罚函数 $\eta = -\varepsilon_1/\varepsilon_2 - \varepsilon_1$, 令 $\eta = 0.5$, 则有 $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, 此时 ε_1 的绝对值表示当自由面正好穿过单元节点 III 时, 第 3 个高斯积分点到自由面的距离在垂直方向上投影的最大值, ε_2 的绝对值表示当自由面正好穿过单元节点 I 时, 第 1 个高斯积分点到自由面的距离在垂直方向上投影的最大值。当自由面

位于节点III和积分点3之间时,积分点3的节点水头满足 $\varepsilon_1 \leq h-z \leq \varepsilon_2$, 可以考虑该单元的饱和部分和非饱和部分; 当自由面位于节点I和积分点1之间时,积分点1的节点水头满足 $\varepsilon_1 \leq h-z \leq \varepsilon_2$, 同样可以考虑该单元的饱和部分和非饱和部分。因此,改进复合单元渗透矩阵调整法更能准确地考虑单元的部分饱和和非饱和情况,精确地计算单元节点外力。同时由于采用了连续的折线型罚函数,避免了自由面在高斯积分点附近上、下的微小变动而引起积分值的较大变化(见图3),从而使高斯点附近的积分值不会来回摆动、产生跳跃现象,迭代解比较稳定,易于收敛,提高了计算精度和收敛速度。

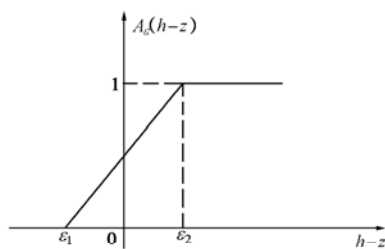


图1 罚函数

Fig. 1 Penalty function

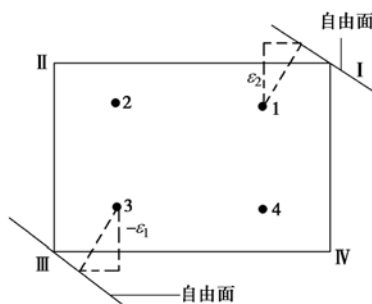


图2 罚函数参数示意图

Fig. 2 Parameters for penalty function

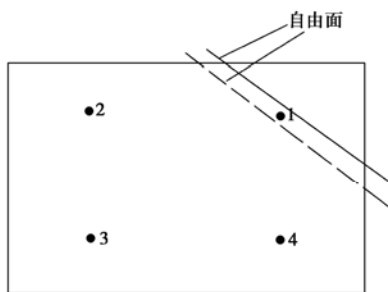


图3 自由面在积分点附近微动示意图

Fig. 3 Slight swing of free surface near integration point

于是对于空间问题,在过渡单元内有

$$[K]_e^e = \iiint_e \left(k_{xx} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + k_{zz} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) A_e(h-z) dx dy dz \quad (9)$$

3 自由面边界积分项的计算

在三维非稳定渗流数值分析中,自由面边界积分项的积分区域和被积函数都比较复杂,难以进行解析计算,通常采用近似算法^[9-10]。其基本思路是:把积分区域分解成若干个子区域,以各个子区域面积与其形心点处函数值的乘积作为该子区域内的积分值,然后叠加得到整个积分区域上的积分值。在子区域足够小,子区域内函数值变化不剧烈的情况下,以该类乘积代替积分可以满足工程需要。但实际计算中将子区域划分得足够小不太现实,也难以确定一个量化的标准来保证子区域内被积函数变化平稳。特别是该算法假定单元内自由面是一个平面,这对自由面变化不剧烈的部位是可以接受的,但当单元内自由面变化剧烈时,必然会带来较大的计算误差。本文在该算法的基础上,不对积分项做近似处理,修改其数学推导过程,重新拟定其算法。

对于有自由面边界的三维非稳定渗流,其流量补给矩阵 $[G]$ 中的系数矩阵 $[G]^e$ 的元素可表示为

$$g_{ij}^e = \iint_{\Gamma_3^e} \mu N_i N_j \cos \theta d\Gamma, \quad i, j = 1, 2, \dots, 8. \quad (10)$$

对于8节点空间六面体等参单元而言,将式(10)所示的自由面边界积分可转化为下列式(11)所示的局部坐标 ε, η 平面上的二重积分,积分区域为 A 。

$$g_{ij} = \iint_A g(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta, \quad (11)$$

其中

$$g(\varepsilon, \eta) = \mu N_i[\varepsilon, \eta, f(\varepsilon, \eta)] N_j[\varepsilon, \eta, f(\varepsilon, \eta)] \cos \theta \sqrt{EG - F^2},$$

$$f(\varepsilon, \eta) = - \frac{\sum_{i=1}^8 (1 + \varepsilon_i \varepsilon)(1 + \eta_i \eta) p_i}{\sum_{i=1}^8 \xi_i (1 + \varepsilon_i \varepsilon)(1 + \eta_i \eta) p_i},$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

式中 p_i 为节点压力水头; A 为自由曲面 Γ_3^e 在坐标平面 ε, η 平面上的投影所形成的积分区域。

将积分区域 A 分解为 n 个三角形,利用Gauss数值积分法求解式(11),得

$$g_{ij} = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} g(L_1, L_2) |J| dL_2 dL_1. \quad (12)$$

式中, L_1, L_2 为局部坐标 ε, η 对应于整体坐标 x, y

在三角形局部坐标系下的坐标。 $|J|$ 为雅可比矩阵的行列式。

对式 (12) 在三角形单元上利用 Gauss 数值积分方法, 得

$$g_{ij} \approx \sum_{l=1}^{n_g} g(L_1, L_2)_l H_l |J| \quad , \quad (13)$$

式中, n_g 为 Gauss 积分点总数, H_l 为对应于 Gauss 积分点 $(L_1, L_2)_l$ 上的权系数。对 g_{ij} 进行组装, 就可形成自由面边界的系数矩阵。

4 算例分析

一砂槽试验, 试验模型长 315 cm, 宽 23 cm, 高 33 cm, 模型材料为平均粒径为 15mm 的均匀砂。饱和渗透系数 $k=0.33 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, 贮水系数为 0, 孔隙率 $n=0.44$ 。初始条件采用上下游水位均为 10 cm 的平衡态, 在时间 0s, 上游水位骤升至 30 cm。试验结果引自文献[8]介绍的赤井浩一等人做的砂槽试验。

将计算域剖分为 360 个矩形单元, 806 个节点, 网格剖分图见图 4, 计算结果与实验结果对比图如图 5 所示, 图 5 中自由面变化的时间点从下到上依次为 30, 60, 120, 600 和 4800 s。从图中可以看出计算结果与试验成果比较吻合, 说明该程序是可行的, 对一般的工程问题具有足够高的精度。

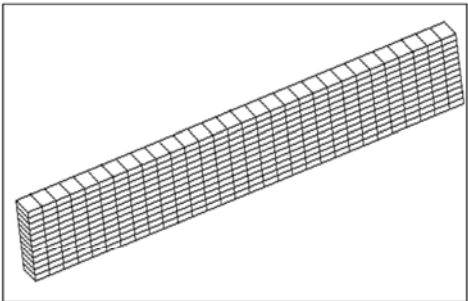


图 4 网格剖分图
Fig. 4 Meshes

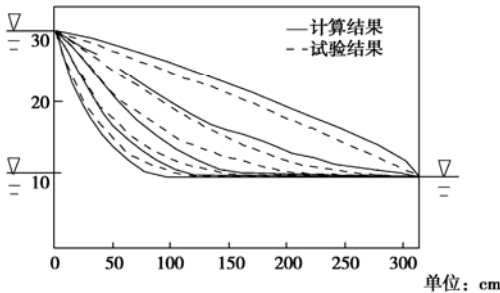


图 5 计算解与砂槽模型试验结果比较图
Fig. 5 Comparison between numerical simulations and laboratory results of the sand groove

5 工程应用

5.1 工程概况

上海市地处长江三角洲冲积平原, 沉积了一套巨厚的第四纪松散沉积层, 主要由饱和的黏性土、粉土和砂土组成。地铁#4 线董家渡段隧道修复基坑位于上海市浦西中山南路以东, 董家渡以南, 东侧为黄浦江, 南侧为 22 层临江花苑大厦, 场地标高约 3.5 m。基坑开挖深度约 39.8 m, 基坑围护连续墙深 65 m, 厚度 1.2 m, 基坑宽 19~23 m, 长 236 m, 分 3 个基坑明挖施工, 总面积 2290.7 m²。基坑底部埋藏有高水头的上更新统第 I、第 II 承压含水层, 中更新统第 III 承压含水层, 且相互连通, 承压含水层顶板标高为 -28.45 m, 总厚度约 116 m, 基坑开挖深度深, 已深入第 I 承压含水层。为确保基坑开挖施工顺利进行, 必须将下部承压含水层的地下水位降至基坑底板埋深约 40 m 以下。

5.2 空间离散及边界条件

根据研究区地下水系统特征, 将整个计算区域在水平方向上以整个基坑的东、西、南、北最远边界点为起点, 向外各扩展 400 m, 四周均为定水头边界, 内部边界为已知流量边界, 即降水井点。垂向上将计算区取至第 III 承压含水层的隔水层底板, 考虑抽水井和基坑围护连续墙的位置以及各地层厚度的影响, 共分为 10 层 (见图 6), 顶部为自由面边界。三维网格剖分如图 7 所示。

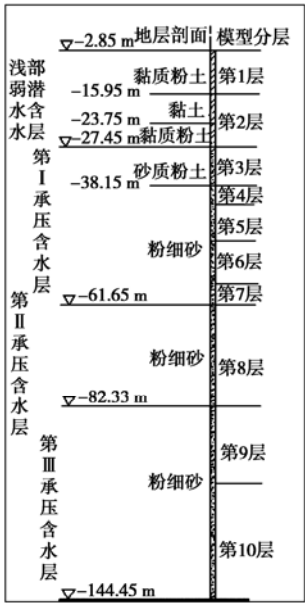


图 6 地层剖面与模型垂向分层对应图

Fig. 6 Stratigraphic sections vs. vertical layers of the model

5.3 模型识别、验证

采用上述数学模型, 以及本文提出的改进复合单

元渗透矩阵调整法、自由面边界面积分法的计算方法进行分析,选取 2006 年 1 月 24 日 21 时 15 分~2006 年 1 月 29 日 9 时 38 分六口抽水井(W23、W24、W25、W26、W27、W28)的抽水水位下降期作为模型识别的时段,选取 2006 年 1 月 29 日 19 时 38 分~2006 年 2 月 1 日 14 时 06 分抽水停止时的水位恢复期作为模型验证的时段,井点分布如图 8。

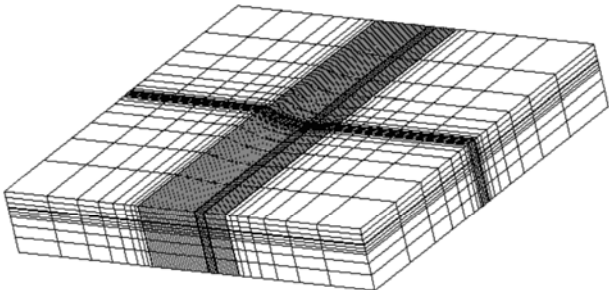
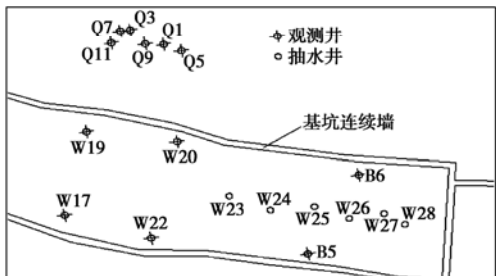


图 7 计算模型三维网格剖分图

Fig. 7 Three-dimensional meshes of simulation field



及各分区的参数值。图 10 举例说明了基坑内、外的观测井 W22、Q11 的地下水位拟合曲线图。从图中可以看出,地下水位拟合精度较高。

表 1 模型第 5、6 层水文地质参数分区表

Table 1 Hydrogeological parameters of layer 5(6) in the model

分区号	k_{xx} /($m \cdot d^{-1}$)	k_{yy} /($m \cdot d^{-1}$)	k_{zz} /($m \cdot d^{-1}$)	μ_s / m^{-1}	μ
5	9.0	9.0	0.90	3.00×10^{-4}	0.15
12	3.0	3.0	0.30	7.00×10^{-5}	0.15
13	1.0	1.0	0.06	9.00×10^{-5}	0.15
14	1.5	1.5	0.08	1.00×10^{-4}	0.15
15	2.0	2.0	0.07	1.50×10^{-4}	0.15
16	11.0	11.0	1.10	1.00×10^{-4}	0.15
17	20.0	20.0	2.00	7.00×10^{-4}	0.15

5.4 模型预测

根据基坑中心下伏第 I 承压含水层中部降压段

(模型第 6 层) 现场降水一个月后水位降至地面以下 40 m (标高-36.65 m) 的要求,设计不同的降水方案输入模型。经模型运行发现,采用 25 口井进行坑内降水最为合适,降水 30 d 后基坑中心点水位降至 42.45 m (标高-38.8 m),满足降水要求。各抽水井点布置见图 11,各井抽水量见表 2。图 12 为降水第 30 d 后模型第 6 层的水位等值线图。结果经后续工程验证正确、可靠。

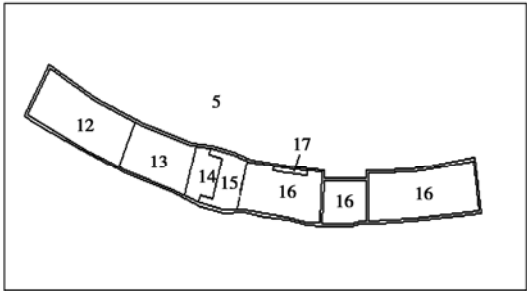


图 9 模型第 5、6 层水文地质参数分区图

Fig. 9 Hydrogeological parameters of layer 5(6) in the model

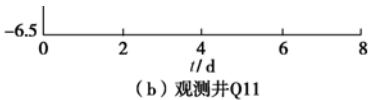
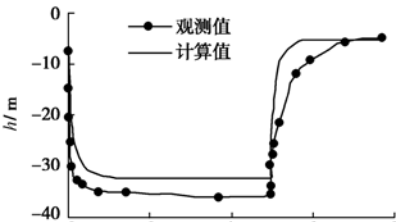


图 10 水位观测点水位拟合图

Fig. 10 Fitting groundwater levels of observation points

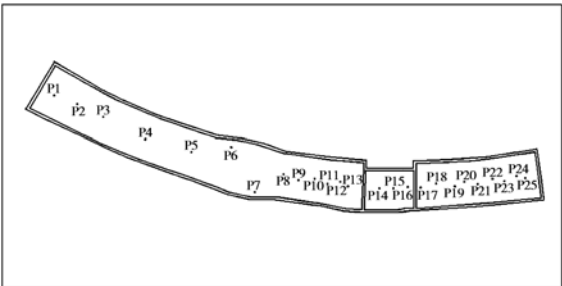


图 11 抽水井井点布置示意图

Fig. 11 Location of pumping wells

表 2 降水优化方案下各井抽水量

Table 2 Optimal extracting quantity of different wells

抽水井点号	单井抽水量 /(m ³ ·d ⁻¹)	抽水井点号	单井抽水量 /(m ³ ·d ⁻¹)
P1	-150	P14	-300
P2	-150	P15	-300
P3	-150	P16	-300
P4	-100	P17	-300
P5	-90	P18	-300
P6	-90	P19	-300
P7	-105	P20	-300
P8	-320	P21	-300
P9	-320	P22	-300
P10	-310	P23	-300
P11	-330	P24	-300
P12	-310	P25	-300
P13	-330		

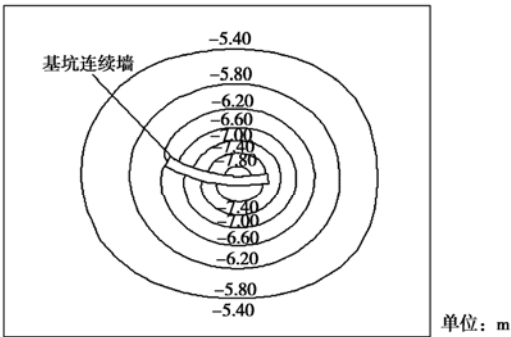


图 12 降水 30 d 后模型第 6 层地下水水流场分布预测图
Fig. 12 Forecasted contour map of groundwater level after dewatering 30 days in the sixth layer of the model

6 结 论

(1)在固定网格复合单元渗透矩阵调整法的基础上,对有自由面渗流问题,提出了改进复合单元渗透矩阵调整法。通过引入连续的折线型罚函数,更能准确地考虑单元的部分饱和和非饱和情况,使高斯点附近的积分值不会来回摆动,迭代解比较稳定,易于收敛。

(2)对有自由面渗流的自由面边界积分问题,提出了一种新的算法,将积分区域分解为有限个三角形,利用 Gauss 数值积分方法进行精细计算,实现了自由面边界积分项的精确解。

(3)算例和工程应用表明,该方法能很好地适应强非线性问题自由面振荡及不易收敛的特点,真实地模拟自由面的位置,提高计算精度,可实现非均质各向异性复杂渗流场自由面迭代求解的快速收敛。

参考文献:

[1] DESAI C S. Finite element residual schemes for unconfined

flow[J]. Int Num Method Eng, 1976, 10(6): 1415 - 1481.

[2] BATHE K J. Finite element free surface seepage analysis without mesh iteration[J]. Int Num Anal Methods in Geomechanics, 1979(3): 3 - 22.

[3] 张有天, 陈 平, 等. 有自由面渗流分析的初流量法[J]. 水利学报, 1988(8): 18 - 26. (ZHANG You-tian, CHEN Ping, et al. Initial flow method for seepage analysis with free surface[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1988(8): 18 - 26. (in Chinese))

[4] 速宝玉, 朱岳明. 不变网格确定渗流自由面的节点虚流量法[J]. 河海大学学报, 1991, 19(5): 113 - 117. (SU Bao-yu, ZHU Yue-ming. Invariable lattice node virtual flow method for seepage free surface[J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 1991, 19(5): 113 - 117. (in Chinese))

[5] 马淑芝, 贾洪彪, 唐辉明, 等. 复合单元法在求解有自由面渗流问题中的应用[J]. 水文地质工程地质增刊, 2004(增): 122 - 124. (MA Shu-zhi, JIA Hong-biao, TANG Hui-ming, et al. Application of the compound element method to solve seepage problem with groundwater surface[J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2004(S): 122 - 124. (in Chinese))

[6] 张乾飞, 吴中如. 有自由面非稳定渗流分析的改进截止负压法[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(1): 48 - 54. (ZHANG Qian-fei, WU Zhong-ru. The improved cut-off negative pressure method for unsteady seepage flow with free surface[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, 27(1): 48 - 54. (in Chinese))

[7] SHARIF N H, WIBERG N E, LEVENSTAM M. Free surface through rock-fill dams analyzed by FEM with level set approach[J]. Computational Mechanics, 2001, 27: 233 - 243.

[8] 吴梦喜, 高莲士. 饱和—非饱和土体非稳定渗流数值分析[J]. 水利学报, 1999(12): 38 - 42. (WU Meng-xi, GAO Lian-shi. Saturated-unsaturated unsteady seepage numerical analysis[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1999(12): 38 - 42. (in Chinese))

[9] CHEN S H, XU Q, HU J. Composite elements method for seepage analysis of geotechnical structures with drainage hole array[J]. Journal of Hydrodynamics (Ser B), 2004, 16(3): 260 - 266. (in Chinese).

[10] 崔皓东, 朱岳明, 等. 有自由面渗流分析中密集排水孔幕的数值模拟[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(3): 440 - 445. (CUI Hao-dong, ZHU Yue-ming, et al. Numerical simulation for densely-distributed drainage holes in seepage field with free surface[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(3): 440 - 445. (in Chinese))