

连续孔隙介质土力学及其在非饱和土本构关系中的应用

赵成刚, 刘 艳

(北京交通大学土建学院岩土所, 北京 100044)

摘 要: 首先论述了土力学的理论基础仍然很不完善, 仍处于半理论、半经验的发展阶段, 它还缺少统一的理论基础。指出: 连续孔隙介质土力学是以多相孔隙介质理论为基础描述自然界中土的行为的一门科学, 它(或多相孔隙介质理论)可以作为土力学统一的理论基础。然后介绍了连续孔隙介质土力学的理论基础, 讨论了多相孔隙介质理论的整体平衡方程的建立以及土力学中控制方程的选择和确定。针对非饱和土问题, 利用多相孔隙介质理论(包括热力学和内变量理论), 基于 3 种广义应力即非饱和土的有效应力(式(22))、基质吸力和气相压力作为 3 个独立的应力状态变量, 提出并详细地论证和推导了考虑气相的能量耗散和塑性体积变形的非饱和土弹塑性本构方程。

关键词: 连续孔隙介质土力学; 孔隙介质理论; 非饱和土; 本构方程

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2009)09-1324-12

作者简介: 赵成刚(1955-), 男, 教授, 博士生导师, 从事土力学与地震工程及其数值分析方法的研究。E-mail: cgzhao@center.njtu.edu.cn.

Continuum porous medium soil mechanics and its application in constitutive relationship of unsaturated soils

ZHAO Cheng-gang, LIU Yan

(School of Civil Engineering and Architecture, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: It is firstly discussed that the theoretical basis of soil mechanics is not very perfect, and is still in a half-theory and half-experience stage, lacking in a unified theoretical basis. It is pointed out that the continuum porous medium soil mechanics, based on the multiphase porous medium theory, is a science used to describe the behaviors of soils in nature, which can be regarded as a unified theoretical basis of soil mechanics. The important role of thermodynamics and internal state variable in establishing constitutive equations based on the multiphase porous medium theory is then introduced. How to establish balance equations of the multiphase porous medium and how to select and determine the governing equations in soil mechanics are discussed. With regard to the complicated problem of unsaturated soils, a detailed demonstration and deduction of elasto-plastic constitutive equations for unsaturated soils considering the energy dissipating and plastic volume deformation of air is proposed. It adopts the multiphase porous medium theory, thermodynamics and internal state variable theory based on three generalized stresses, i.e. the effective stress of unsaturated soils (equation (22)), matric suction and air pressure as three independent stress state variables.

Key words: continuum porous medium soil mechanics; theory of porous medium; unsaturated soils; constitutive equation

1 为何需要连续孔隙介质土力学

连续孔隙介质土力学是利用宏观的连续介质力学的理论对孔隙介质的力学行为进行分析和描述, 由此建立起多相孔隙介质理论。连续孔隙介质土力学就是试图以多相孔隙介质的理论描述自然界中土的行为的一门科学。它的理论基础就是多相孔隙介质理论。

岩土工程主要关心土的变形、破坏和渗流这 3 个

主要性质。土的这 3 种性质可以用多相孔隙介质的理论描述。通常不可能具体的描述随空间而变化的孔隙的具体几何形状和尺寸。为克服这一困难, 应当转向更为粗略的平均水平, 即转向宏观的水平。宏观的方

基金项目: 国家自然科学基金项目(50778013); 北京市自然科学基金项目(8082020)

收稿日期: 2008-06-22

法是一种连续介质方法。由于这种原因, 主要试图描述孔隙介质的宏观性质, 这种宏观性质不依赖于孔隙的特殊构形, 并且它可以通过宏观的试验而证实。这种做法实质上就是用一种宏观上均匀连续介质替代微观上是不均匀的孔隙介质, 但这种替代应具有宏观的等价性, 即两种介质应具有同样的宏观表现和行为。

土力学发展到目前为止, 其理论基础仍然很不完善, 仍处于半理论、半经验的发展阶段。其具体体现就是: 渗流与变形和强度无联系, 渗流与变形的理论分别是根据不同的假定而建立的, 土力学各章节之间缺少有机的和统一的理论基础; 经验公式和方法随处可见; 经验、工程判断、艺术和技巧还继续发挥重要的作用^[1]。虽然现代土力学的发展, 尤其是临界状态土力学和土的本构模型的发展, 使土的变形与强度建立了联系, 进一步完善了土力学的理论基础。但这种发展与变化仍然没有从根本上改变上述状况, 土力学统一的理论基础仍有待于发展和研究。作为土力学的研究者, 不仅要解决工程问题, 更重要的是要促进土力学理论的向前发展, 这才是一个真正的学者或研究者所要考虑的问题。不能因为土力学是一门应用背景很强的学科, 就否定其纯学术性的研究。

上世纪六七十年代发展起来的多相孔隙介质理论(更一般的称为混合物理理论)可以统一的描述多相孔隙介质中复杂的相互作用以及它在外力和环境作用下的响应, 它可以成为描述多相孔隙材料(当然也包括土)行为的统一的理论基础。

多相孔隙介质理论从基本的物理规律出发, 针对问题的具体情况进行数学演绎, 所以在该理论框架下所建立的本构方程都可以按一定的规则提出, 所考虑的多相介质的物理性质, 物理的各种限制, 分析、演绎中的具体假定和简化都有清楚的表述。所以这种本构方程具有科学严密性和系统性, 对各种因素的考虑也具有 consistency, 可以避免得出不协调的结论。当然用孔隙介质力学的理论作为土力学的统一的理论基础还有很多工作要做, 例如如何用多相孔隙介质理论对现有的土力学成果(在一定的假设和前提条件下)给予解释和说明。另外, 如何用这一理论作为指导, 研究和探索土力学中的一些复杂的现象, 例如对非饱和土和冻土行为的分析和研究等。实际上已有的研究成果表明, 从多相孔隙介质理论出发, 在一些假定下就可以推导出 Biot 动力或静力方程^[2]; 同样也可以推导出各种渗流和扩散方程。另外它还可以作为岩土材料多场耦合现象描述的理论基础。

目前连续介质力学和热动力学已经融合为一体, 在连续介质力学的教科书中^[3-4]都有热动力学和内变

量理论^[4-5]的内容; 多相孔隙介质理论也同样具有热动力学的内容^[6-7], 这是科学进步的表现。通常大多数土力学中的工程问题可以认为是等温过程, 因此有人认为热力学对土力学的研究意义不大。但土的渗流可以用热力学中的质量、能量的交换和平衡来描述; 而土的粘-弹塑性变形可以用热力学中的耗散以及熵的改变等概念描述。因此用热动力学的理论对土力学进行研究意义重大^[8]。近一、二十年用多相孔隙介质理论对土的工程性质进行研究已经出现, 但多处于建立基本控制方程和一般性理论的探讨阶段。最近几年, 开始出现了基于多相孔隙介质理论建立土的具体本构方程。这主要归功于内变量理论的引入, 使得利用热力学理论建立土的具体本构方程成为可能^[8-9]。多相孔隙介质理论(包含热动力学理论和内变量理论于其中)为土力学的研究和发展提供了又一新的研究方法和思路。这方面的研究很可能成为今后土力学研究的一个热点。

2 连续孔隙介质土力学的理论基础

2.1 多相孔隙介质运动的描述

连续孔隙介质土力学的理论基础就是多相孔隙介质理论。

目前描述多相孔隙介质运动的方法主要有以下 3 种(Hassanizadeh and Gray, 1979)^[10]:

(1) 经验方法: 由于多孔介质的复杂性, 在描述多相体系中物质的运动的时候, 人们起初只能通过经验的方法对物质运动的物理过程进行直观的描述, 并提出相应的刻画模型, 由于是经验的直观模型, 这种方法一般只限于描述某些特殊的多相系统, 其适用范围有限。

(2) 混合物方法: 这种方法把混合物中各相看成是相互叠加的连续介质, 他们同时存在并占据着整个空间, 混合物的平衡可以通过把单相的平衡方程进行叠加而得到。由于它简单、实用, 混合物理理论得到了迅速的发展。目前影响较大的多相孔隙介质理论就是在混合物理理论的基础上, 引入了体积分数的概念而建立的。本文采用了这一方法。

(3) 平均化方法: 这种方法把多相体系看成是各相相互交叉的连续介质, 各相分别占据空间的一部分, 并且由极不规则的边界面所分割。经典的热力学量在每一相所在的空间中是连续的, 但在整个多相体系空间中是不连续的。可以用经典连续介质的平衡方程和初始边界条件来描述该体系的状态。但是在微观尺度求解这些方程是很复杂的, 所以可以通过在某些局部表征体元上采用平均化的方法来进行描述。平均化后

得到的方程就可以写成用相对应的宏观的热力学量来表述的宏观形式。

2.2 表征体元和平均化方法

为了定量的描述这种多相孔隙介质的土, 需要在这一介质中选择一个表征体元 (representative element volume)。表征体元是一种体积单元, 在宏观尺度上它应小到可以把不均匀的多相孔隙土的介质作为一个点; 在微观尺度上又应包括足够数量的土的孔隙和土的颗粒, 这样才可以做统计平均化处理。

表征体元 (REV) 内微观任一点的位置矢量用 r 表示。相的分布特征用相分布函数表示, α 相的分布函数定义为

$$\gamma_{\alpha} = \gamma_{\alpha}(r, t) = \begin{cases} 1, & r \in dV_{\alpha}, \\ 0, & r \in dV_{\beta}, \end{cases} \quad \alpha \neq \beta \quad (1)$$

根据分布函数, 在表征体元 dV 中 α 相的体积就可以表示为

$$dV_{\alpha}(r, t) = \int_{dV} \gamma_{\alpha}(r, t) dv. \quad (2)$$

相关的 α 相的体积分数就定义为

$$n_{\alpha}(r, t) = \frac{dV_{\alpha}}{dV} = \frac{1}{dV} \int_{dV} \gamma_{\alpha}(r, t) dv. \quad (3)$$

如果多孔介质是饱和的, 就有体积分数就满足关系: $\sum_{\alpha} n^{\alpha} = 1$ 。

REV 内的任何微观量 f 都与 REV 的坐标系和位置有关, 即

$$f = f(x, r, t)。$$

其中, r 代表了表征体元内微观域任意点的位置矢量, x 表示宏观域中表征体元的质心位置矢量。在固定的坐标系中, 两者有如下关系: $r = x + \ell$ 。其中 ℓ 是微观域内任意点相对于质心的位置矢量。宏观量与微观量之间的关系可以通过对微观坐标 r 体积平均来得到。通过体积平均通常可以定义以下两中平均量:

体积平均量:

$$\overline{f(x, t)}^{\alpha} = \frac{1}{dV} \int_{dV} f(r, t) \gamma_{\alpha}(r, t) dv. \quad (4a)$$

本质体积平均量:

$$\overline{f_{\alpha}(x, t)}^{\alpha} = \frac{1}{dV_{\alpha}} \int_{dV_{\alpha}} f(r, t) \gamma_{\alpha}(r, t) dv. \quad (4b)$$

根据体积分数定义有如下关系:

$$\overline{f(x, t)}^{\alpha} = n_{\alpha} \overline{f_{\alpha}(x, t)}^{\alpha}。$$

实际上密度就是一个体积平均量, 通常定义的体积密度 ρ^{α} 就是第一种平均, 真实密度 ρ_{α} 属于第二种体积平均。所以它们之间的关系可以表示为

$$\rho^{\alpha} = n^{\alpha} \rho_{\alpha}. \quad (5)$$

类似于体积平均, 人们还定义了很多其他的平均

量, 比如面积平均量和质量平均量。在实际应用的时候必须注意区分, 通常像应力矢量、热通量和熵通量等都是面积平均量, 而速度、外力、内能、外部热补给、内熵、外熵补给等都是质量平均量。不论是哪种平均, 在平均化的时候, 这些热力学量通常都必须满足以下准则^[12]: ①当平均化与积分有关时, 被积函数和积分微元的乘积必须具有可加性; ②宏观量必须和微观量的总量相等; ③所定义的宏观量的物理意义和经典连续介质力学中的物理量必须保持一致; ④微观量的平均值在野外和实验室内各种不同条件下所观测的结果必须是相同的函数。定义这些平均量之后, 就可以很方便地将介质的微观平衡方程通过平均化得到其宏观的平衡方程。

2.3 多相孔隙介质各相的平衡方程

自然界中的土实际上就是一种具有孔隙的多相介质, 从土的孔隙和土颗粒的介观尺度出发, 只要利用平均化方法就可以建立非饱和土各相的宏观平衡方程。这里先讨论单相 (土中的某一相) 介质的情况, 多相情况在后面处理。

假定: 土中每一相介质都是连续地分布于所占空间构形上 (而实际并非如此!), 而土介质则是由 3 种组分叠加而构成的。这时空间构形上任意一点都同时由来自三相不同组分物质共同占据 (这一点在物理上很明显就是不正确的)。

对于单相 (土中的某一相) 介质的情况, 在微观状态下, 其微观各点的平衡方程都可以用经典的连续介质的平衡方程来表示。然后利用平均化方法, 就可以得到各相的宏观平衡方程。因此, 土处于最复杂的非饱和土时 (这时土有三相: 固相 s、液相 w、气相 a) α 相 ($\alpha = s, w, a$) 的质量守恒、动量守恒和能量守恒的宏观微分方程可以表示为 (de Boer^[6]):

$$\frac{d\rho^{\alpha}}{dt} + \rho^{\alpha} \operatorname{div} V_{\alpha} = \hat{\rho}^{\alpha} \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \sigma^{\alpha} + \rho^{\alpha} b^{\alpha} + \hat{p}^{\alpha} = \rho^{\alpha} \frac{dV_{\alpha}}{dt} + \hat{\rho}^{\alpha} V_{\alpha} \quad (7)$$

$$\rho^{\alpha} \frac{d^{\alpha} \varepsilon^{\alpha}}{dt} = \operatorname{tr}(\sigma^{\alpha} \cdot D^{\alpha}) - \operatorname{div} q^{\alpha} + \rho^{\alpha} r^{\alpha} + \hat{e}^{\alpha} - \hat{p}^{\alpha} \cdot V_{\alpha} - \hat{\rho}^{\alpha} (\varepsilon^{\alpha} - \frac{1}{2} V_{\alpha}^2) \quad (8)$$

上面三式中 $\hat{\rho}^{\alpha}$ 为其他相物质对 α 相物质的质量供应项; $\hat{p}^{\alpha}$ 为其他相物质对 α 相物质相互作用的体积力; 式 (7) 右端第二项 $\hat{\rho}^{\alpha} V_{\alpha}$ 代表由质量供应项 $\hat{\rho}^{\alpha}$ 而产生的与其他相物质的动量相互交换; 式 (6)、(7) 中 V_{α} 为 α 相物质运动的速度 (向量); 但在式 (8) 中 V_{α} 视为标量; σ^{α} 为 α 相物体中 (本身) 的 Cauchy 应力; $D^{\alpha} = (L^{\alpha} + L^{\alpha T})/2 = \operatorname{sym}(\operatorname{grad} V_{\alpha})$, $L = \operatorname{grad} V_{\alpha}$;

b^α 为 α 相物体本身的单位质量的体积力; ε^α 为 α 相物体单位质量的内能; q^α 为 α 相物质本身的热流向量; r^α 为 α 相物质 (由辐射或外热等产生的) 单位质量的能量供应项; $\hat{e}^\alpha$ 为其他相物质对 α 相引起的能量供应项; 式 (8) 右端最后两项分别代表其他相物质与 α 相物质质量和动量的相互作用 (交换) 而产生的能量项。

2.4 多相孔隙介质整体的平衡方程

在混合物理论中, 多相孔隙介质理论是一种先验的理论, 它是根据人类生产和实践活动中自然的认识, 建立起最基本的定律, 在此基础上再根据某些原则和公理, 演绎出针对具体问题的控制方程。

针对单相介质而发展的连续介质力学 (也称为理性力学) 理论, 已经比较成熟, 它的力学和热力学平衡方程以及本构公理是多相孔隙介质理论的基础与出发点。但如何从单相的连续介质力学出发, 构建多相孔隙介质力学的理论, 到目前为止, 还没有得到完全统一和一致协调的认识。当前影响最大的理论体系是基于 Truesdell^[11] 提出建立多相介质整体宏观控制方程的 3 条先验性公设。

(1) 混合物 (是由几种性质不同的物质混合而形成的复杂物质) 的性质是由其全部组分的性质决定的。

(2) 描述一个组分的运动时, 可以假想把这一组分从混合物的其它组分分离出来, 但要考虑其它组分对这一组分的作用。

(3) 混合物整体的运动和单一物体的运动一样满足相同的方程。

上述 3 条公设意味着: 单一组分的平衡方程依然存在, 但在应该考虑其它组分对这一组分作用与影响的项, 即有考虑其它组分影响而存在产项。混合物的整体运动是由各单一组分相应方程的叠加而得到。但混合物整体的控制方程应和单一组分的控制方程具有相同的形式 (满足相同的控制方程)。这就要求其它组分对某一组分的影响项之和等于零, 因而保证了满足第三条先验性公设。上一节已经提到过在通过平均化可以得到各相宏观的平衡方程, 再把宏观各项的平衡方程进行叠加就可以得到混合物整体的平衡方程。根据上述讨论, 把式 (6)、(7)、(8) 对 $\alpha = s, w, a$ 叠加后, 形成混合物整体的平衡方程如下 (R. de Boer)^[6]:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} V = 0, \quad (9)$$

式 (9) 中利用了 $\rho = \sum \rho^\alpha$, $V = \sum \frac{\rho^\alpha}{\rho} V_\alpha$, $\sum \hat{\rho}^\alpha = 0$ 和

$$\rho \frac{dV}{dt} = \operatorname{div} \sigma + \rho b, \quad (10)$$

式 (10) 中利用了 $\sum \hat{\rho}^\alpha = 0$, $b = \sum \frac{\rho^\alpha}{\rho} b^\alpha$,

$$\frac{dV}{dt} = \sum \left[\frac{\rho^\alpha}{\rho} \frac{dV_\alpha}{dt} + \frac{\rho^\alpha}{\rho} V_\alpha \right], \quad \sum \sigma^\alpha = \sigma \text{ 和}$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = W + \rho r - \operatorname{div} q, \quad (11)$$

式 (11) 中利用了 $r = \sum \frac{\rho^\alpha}{\rho} r^\alpha$, $q = \sum q^\alpha$, $\sum \hat{e}^\alpha = 0$,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \sum \left[\frac{\rho^\alpha}{\rho} \frac{d\varepsilon^\alpha}{dt} + \frac{\hat{\rho}^\alpha}{\rho} \varepsilon^\alpha - \frac{1}{2} \hat{\rho}^\alpha V_\alpha^2 \right] \text{ 和 } W = \sum \operatorname{tr} (\sigma^\alpha \cdot D^\alpha).$$

上述混合物整体的平衡方程就是建立各种物理现象的宏观控制方程的基础。其实针对不同的问题, 会定义不同的物理量, 得到的方程也会存在一些差别。在这里会发现, 各组分再加上混合物整体的平衡方程, 方程数量之多求解起来是很困难的, 而且光是靠平衡方程可能还不足以确定所有的场量。通常还需要借助于材料的连续性或本构方程, 给出场量之间的一些关系, 这样一来问题就变得更加的复杂。为了使问题简化, 针对一些特殊的问题, 并不需要将所有方程都列出, 可以仅使用上述部分平衡方程。根据问题的复杂程度, Hutter^[7] 将混合物分成 3 种问题: ①最简单的情形是各组分质量不同, 但是有相同或比较接近的速度和温度。此时只需对各组分使用质量守恒方程, 而动量和能量守恒方程则使用混合物整体的方程即可。这一类问题通常不涉及到能量转换, 只关注力学或质量的输运问题。比如颗粒物质的扩散就属于这种情况, 描述污染物在流体中的扩散时, 可以将污染物与流体一起考虑, 给出一个整体的动量方程即可。②各组分的质量和速度有明显的不同, 但是却具有相同的温度。此时对各组分使用质量和动量守恒, 而能量守恒方程使用混合物总体的方程即可。通常这类问题中由于各组分具有相同的温度, 所以在考虑热力学效应的时候, 使用混合物整体的能量方程来描述就足够了。这一类问题的例子有很多, 比如描述土中骨架与水的相互作用的 Dracy 定律、多相流的力学模型等等。③各组分的质量、速度和温度都有明显的不同。此时各组分的质量、动量和能量方程都要用到, 这一问题属于完整的热力学混合物理论, 比较复杂。比如常年积雪的表层冰面在融化的水的渗流影响下发生蠕变就属于这一类问题, 因为此时水和雪有完全不同的质量、速度和温度, 而且它们之间还可以相互转化。实际应用时, 以上 3 种类型通常会混合在一起使用, 比如污染物在地下水中的传播问题就包含了①②两种类型, 其中污染物与水的混合物属于类型①, 而污染水与土一起则属于类型②。也就是说对于同一个系统, 当要考虑不

同的对象时,问题所属的类型就可能会不同,所以在建立模型分析研究的时候,要对所研究的物体有深入的了解,才能找到最适合的方法使问题得以简化。

3 非饱和土本构关系的理论框架

第2节讨论了建立基本控制方程的问题。但因在控制方程中未知量的个数大于方程的个数,仅用控制方程是不能求得问题的解答,还需要补充方程,以使方程闭合,这种补充方程就是本构方程^[4, 7]。Ziegler (1987年)^[12]提出利用热力学理论即能量势函数和耗散势函数建立一般材料的本构方程。Collins 和 Houlsby^[13]把这种建立本构方程的方法推广并用于岩土或摩擦材料中。但上述2种方法都是针对单相介质材料,如何利用热力学理论即能量势函数和耗散势函数建立多相孔隙介质材料的本构方程,是目前国际上正在探索的问题。

非饱和土是土中最复杂的一种土,因此基于多相孔隙介质理论对非饱和土进行研究是最具有挑战性的。把非饱和土作为一种三相多孔介质,运用体积分数的概念,结合实际情况做出各种假设,使模型尽量简化,利用这种方法建立非饱和土的本构模型将会是一个很有前途的研究方向。以下就是在这方面探求的一种新的尝试。

在利用多相孔隙介质理论研究和建立非饱和土的本构模型时,其基础和出发点是功和能量平衡方程以及热力学第二定律。如何在清晰的前提和假定条件下,用岩土工程界熟悉的符号、术语推导出便于工程应用的功和能量平衡方程,由此建立相应的非饱和土的本构方程,是非饱和土理论研究者一直在研究和探讨的问题。Houlsby^[14]和 Li^[15]基于热动力学的理论用岩土工程界熟悉的符号、术语推导出便于工程应用的具体功和能量平衡方程的表达式。但他们的理论不是基于严格的多相孔隙介质理论而建立的,其基本前提并不十分清楚和严密。

基于后面的式(21),赵成刚等^[16]提出了非饱和土广义有效应力原理;该原理认为,非饱和土研究中单应力变量的有效应力或双应力变量理论很难唯一地确定非饱和土的变形性质,尤其是在气封闭的状态。因此本文根据这一非饱和土广义有效应力原理^[16],采用3种广义应力即非饱和土的有效应力(式(22))、基质吸力和气相压力作为3个独立的应力状态变量,考虑气相的能量耗散和塑性体积变形建立了非饱和土的本构方程。当然在非饱和土处于气连通时采用双应力变量理论并考虑饱和度的变化就可以达到较高的精度;但当非饱和土处于气封闭时,采用本文提出的非

饱和土本构模型是适当的。更详细的讨论见文献[16]。

3.1 非饱和土功的表示

使用热力学的方法建立本构方程其关键的步骤就是要给出两个热力学势函数即自由能势函数和耗散势函数,然后从这两个势函数出发,利用 Legendre 变换就可以推导出相应本构方程增量形式。为了得到自由能和耗散势函数,首先讨论非饱和土中功的表达式。

Hansen^[17]指出,按照 Trusdell^[11]给出的3条先验公理而得到的各种限制方程从数学上不统一,而且某些量的取法难以从物理上给出解释。因此,对混合物整体变量的定义以及相应的限制方程的提法仍有进一步研究的需要。例如在式(9)中定义的整体速度是质量平均加权后的速度,但在土力学或水文学中,通常都是以土骨架速度 V_s 作为参照系而建立渗流方程或其它方程。用混合物理论建立的方程与土力学、水文学等工程学科建立的方程,因采用的基本运动量不一致而导致方程的形式也不同。本节试图以土力学中的一些基本变量作为出发点和参照系,推导并建立一些相应的物理量和基本方程,下面先给出非饱和土的4个基本假定:

(1) 非饱和土中的同一点,三相温度相同。

(2) 忽略在不同相之间的质量、动量、内能的转化。

(3) 假定三相之间有明显的交界面,并不能相互浸入和混溶。

(4) 非饱和土各相之间没有熵的互相变换。

定义 α 相流体物质的相对(固体)速度 $\bar{V}_\alpha$ 为

$$\bar{V}_\alpha = V_\alpha - V_s, (\alpha = w, a), \quad (12)$$

式(12)中 V_α 为 α 相流体物质的相速度(流体本身真实速度)。非饱和土体积分分数可用下面土力学中常用的符号计算:

$$n^s = 1 - n; \quad n^w = nS_r; \quad n^a = n(1 - S_r). \quad (13)$$

式中, n 为孔隙率; S_r 为饱和度。

当取土骨架的运动量作为参照系时,单相的质量守恒方程式(6)可以表示为

$$\frac{d\rho^\alpha}{dt} + \rho^\alpha \operatorname{div} V_s = -\rho^\alpha \operatorname{div}(V_\alpha - V_s) = -\rho^\alpha \operatorname{div}(\bar{V}_\alpha). \quad (14)$$

定义 α 相的模量为: $K_\alpha = \rho_\alpha dP_\alpha/d\rho_\alpha$, 其中 P_α 为代表性单元中 α 相的压力。将 K_α 和式(5)代入到式(14)中,就可以得到用体积分分数表示的质量守恒方程为

$$\frac{n^\alpha}{K_\alpha} \frac{dP_\alpha}{dt} + \frac{dn^\alpha}{dt} + n^\alpha \operatorname{div} V_s = -n^\alpha \operatorname{div} \bar{V}_\alpha, \quad (\alpha = s, w, a). \quad (15)$$

下面将推导以土骨架的速度 V_s 为参照系的三相非饱和土的总变形功 W 的表达式。总的能量平衡方程

采用式 (11), 式 (11) 右端第一项为总的变形功 W , 它可以表示为

$$\begin{aligned} W &= \sum \text{tr}(\sigma^\alpha \cdot D^\alpha) = \sum \text{tr}(\sigma^\alpha \cdot \text{sym}(\text{grad} V_\alpha)) \\ &= \sum \text{tr}(\sigma^\alpha \cdot \text{grad} V_\alpha) \\ &= \text{tr}(\sigma^s \cdot \text{grad} V_s) + \text{tr}(\sigma^w \cdot \text{grad} V_w) + \text{tr}(\sigma^a \cdot \text{grad} V_a) \\ &= \text{tr}[(\sigma - \sigma^w - \sigma^a) \cdot \text{grad} V_s] + \text{tr}(\sigma^w \cdot \text{grad} V_w) + \\ &\quad \text{tr}(\sigma^a \cdot \text{grad} V_a) \\ &= \text{tr}(\sigma \cdot \text{grad} V_s) + \text{tr}[\sigma^w \cdot \text{grad}(V_w - V_s)] + \\ &\quad \text{tr}[\sigma^a \cdot \text{grad}(V_a - V_s)] \\ &= \text{tr}(\sigma \cdot \text{grad} V_s) + \text{tr}(\sigma^w \cdot \text{grad} \bar{V}_w) + \text{tr}(\sigma^a \cdot \text{grad} \bar{V}_a) \end{aligned} \quad (16)$$

对于液相和气相应力 σ^α ($\alpha = w, a$) 与相应的流体压力有如下关系:

$$\sigma^\alpha = n^\alpha P_\alpha \delta, \quad (\alpha = w, a). \quad (17)$$

式中 δ 为单位张量, 用矩阵可表示为 $\delta = [\delta_{ij}]$; P_α 为标量表示孔隙流体压力, 按照土力学的习惯此处假定以压为正 (如果按通常固体力学以拉为正, 则需在式 (17) 右端加一负号)。把式 (17) 代入式 (16) 右端后

$$\begin{aligned} W &= \text{tr}(\sigma \cdot \text{grad} V_s) + n^w P_w \text{tr}(\delta \cdot \text{grad} \bar{V}_w) + \\ &\quad n^a P_a \text{tr}(\delta \cdot \text{grad} \bar{V}_a) \end{aligned} \quad (18)$$

由于 $\text{tr}(\delta \cdot \text{grad} \bar{V}_\alpha) = \text{div} \bar{V}_\alpha$, ($\alpha = l, a$), 所以式 (18) 可以表示为

$$W = \text{tr}(\sigma \cdot \text{grad} V_s) + n^w P_w \text{div} \bar{V}_w + n^a P_a \text{div} \bar{V}_a \quad (19)$$

把式 (15) 代入式 (19) 后得

$$\begin{aligned} W &= \sum \text{tr}(\sigma^\alpha \cdot D^\alpha) \\ &= \text{tr}(\sigma \cdot \text{grad} V_s) - \left[P_w \frac{n^w}{K_w} \frac{dP_w}{dt} + P_w \frac{dn^w}{dt} + n^w P_w \text{div} V_s \right] - \\ &\quad \left[P_a \frac{n^a}{K_a} \frac{dP_a}{dt} + P_a \frac{dn^a}{dt} + n^a P_a \text{div} V_s \right] \\ &= \underbrace{\text{tr}(\sigma \cdot \text{grad} V_s)}_I - \underbrace{\left(P_w \frac{n^w}{K_w} \frac{dP_w}{dt} + P_a \frac{n^a}{K_a} \frac{dP_a}{dt} \right)}_{II} - \\ &\quad \underbrace{\left(P_w \frac{dn^w}{dt} + P_a \frac{dn^a}{dt} \right)}_{III} - \underbrace{(n^w P_w + n^a P_a) \text{div} V_s}_{IV} \end{aligned} \quad (20)$$

将式 (20) 分为 I、II、III、IV 四个部分, 分别对其进行化简, 具体步骤如下: I 和 II 保留不变, 将式 (13) 代入 III 和 IV 中有

$$\begin{aligned} III &= P_w \frac{d(nS_r)}{dt} + P_a \frac{d[n(1-S_r)]}{dt} \\ &= \underbrace{n(P_w - P_a) \frac{dS_r}{dt}}_{IIIa} + \underbrace{[S_r P_w + (1-S_r) P_a] \frac{dn}{dt}}_{IIIb} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} IV &= n[S_r P_w + (1-S_r) P_a] \text{div} V_s \\ &= (1-n_s)[S_r P_w + (1-S_r) P_a] \text{div} V_s \\ &= [S_r P_w + (1-S_r) P_a] \text{div} V_s - \\ &\quad n_s[S_r P_w + (1-S_r) P_a] \text{div} V_s \\ &= [S_r P_w + (1-S_r) P_a] \text{div} V_s - \\ &\quad [S_r P_w + (1-S_r) P_a] \left(-\frac{n^s}{K_s} \frac{dP_s}{dt} + \frac{dn^s}{dt} \right) \\ &= \underbrace{[S_r P_w + (1-S_r) P_a] \text{div} V_s}_{IVa} + \\ &\quad \underbrace{[S_r P_w + (1-S_r) P_a] \frac{n^s}{K_s} \frac{dP_s}{dt}}_{IVb} - \\ &\quad \underbrace{[S_r P_w + (1-S_r) P_a] \frac{d(1-n)}{dt}}_{IVc} \end{aligned}$$

IV 利用了式 (15) 当 $\alpha = s$ 时有 $n^s \text{div} V_s = -\frac{n^s}{K_s} \frac{dP_s}{dt} + \frac{dn^s}{dt}$

将 IVa 与 I 合并, IVb 与 II 合并, 同时可以发现 IIIb 与 IVc 正好相互抵消, 所以将他们代入到式 (20) 中去, W 可以重新表示为

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \underbrace{\text{tr}(\sigma \cdot \text{grad} V_s)}_I - \underbrace{[S_r P_w + (1-S_r) P_a] \text{div} V_s}_{IVa} \right\} - \\ &\quad \underbrace{n(P_w - P_a) \frac{dS_r}{dt}}_{IIIa} - \left\{ \underbrace{[P_w \frac{n^w}{K_w} \frac{dP_w}{dt} + P_a \frac{n^a}{K_a} \frac{dP_a}{dt}]}_{II} + \right. \\ &\quad \left. \underbrace{[S_r P_w + (1-S_r) P_a] \frac{n^s}{K_s} \frac{dP_s}{dt}}_{IVb} \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \left\{ \sigma - [S_r P_w + (1-S_r) P_a] \delta \right\} \cdot \text{grad} V_s \right\} - \\ &\quad n(P_w - P_a) \frac{dS_r}{dt} - \left\{ P_w \frac{n^w}{K_w} \frac{dP_w}{dt} + P_a \frac{n^a}{K_a} \frac{dP_a}{dt} + \right. \\ &\quad \left. [S_r P_w + (1-S_r) P_a] \frac{n^s}{K_s} \frac{dP_s}{dt} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

令式 (21) 右端第一个括号中的应力项和第二个括号分别为

$$\tilde{\sigma} = \sigma - [S_r P_w + (1-S_r) P_a] \delta, \quad (22)$$

$$-n(P_w - P_a) \frac{dS_r}{dt} = sn \frac{dS_r}{dt} \quad (23)$$

式 (21) 右端第一个括号的功是由应力 $\tilde{\sigma}$ 与土骨架应变速率之积, 它表征了使土骨架产生变形的驱动应力 $\tilde{\sigma}$ 的作用 (从热力学角度) 产生的功, 也有人称之为平均土骨架应力 (average soil skeleton stress), 通

常认为它是由土骨架承担并沿着土骨架而传递的应力,在文献[18]中定义此应力为非饱和土的有效应力。第二个括号中 $s = P_a - P_w$ 为非饱和土中的基质吸力,它是广义驱动应力,而液相体积分数 $n^w = nS_r$ 是与之相对应的广义流;第二个括号代表了由基质吸力作用而产生的功。式(21)第三个括号代表各相(包括固体、气体与液体)压力变化所做的功;当液体和固体假设为不可压缩时,式(21)第3个括号变为 $-\left[\frac{P_a}{K_a}n(1-S_r)\frac{dP_a}{dt}\right]$,它表示了气体压力变化所做的功。下面将以非饱和土的有效应力(式(22))、基质吸力和气相压力作为3个独立的应力状态变量建立非饱和土的本构方程。可令应力和应变变量分别为

$$\bar{\sigma}^\alpha = \begin{cases} \bar{\sigma}, & \alpha = s, \\ s, & \alpha = w, \\ P_a, & \alpha = a, \end{cases} \quad \bar{\varepsilon}^\alpha = \begin{cases} \bar{\varepsilon}, & \alpha = s, \\ n\dot{S}_r, & \alpha = w, \\ n^a\dot{\varepsilon}_{ii}^a, & \alpha = a. \end{cases}$$

3.2 非饱和土的能量耗散

根据李相菴(2007)^[15]的论述,以及前述假定4:没有非饱和土各相之间熵的互相变换(但是把其它相内部结构的变化对此相熵的影响考虑在内,见式(25))。因此耗散势函数可以表示为

$$D = \zeta_i^s \dot{\xi}_i^s + \zeta_i^w \dot{\xi}_i^w + \zeta_i^a \dot{\xi}_i^a. \quad (24)$$

ξ_i^α 为 α 相的内变量, ζ_i^α ($\alpha = s, w, a$) 为 α 相与 $\dot{\xi}_i^\alpha$ 相对偶的热力学力,它是状态变量 $\bar{\varepsilon}^\alpha$ 或 $\bar{\sigma}^\alpha$ 和结构变化历史的函数,它可以表示为

$$\zeta_i^s = \zeta^s(\bar{\varepsilon}, H'_s, H''_s, H'''_s), \quad (25a)$$

$$\zeta_i^w = \zeta^w(n^w, H'_w, H''_w, H'''_w), \quad (25b)$$

$$\zeta_i^a = \zeta^a(\bar{\varepsilon}_{ii}^a, H'_a, H''_a, H'''_a). \quad (25c)$$

能量耗散是由于土的内部结构重新组构或变化引起的。非饱和土中内部结构的重新排列和变化可以表示为 $H = H(H_s, H_w, H_a)$ 。

$$H_s = H_s[H'_s, H''_s(H'_s, s, n^w), H'''_s(H'_s, P_a, \bar{\varepsilon}_{ii}^a)], \quad (26a)$$

$$H_w = H_w[H'_w, H''_w(H'_w, \bar{\sigma}, \varepsilon), H'''_w(H'_w, n^a, \bar{\varepsilon}_{ii}^a)], \quad (26b)$$

$$H_a = H_a[H'_a, H''_a(H'_a, \bar{\sigma}, \varepsilon), H'''_a(H'_a, s, n^w)]. \quad (26c)$$

H'_α 代表了 α 相结构重排对自身的影响, H''_α, H'''_α 则是其他两相结构变化对 α 相的影响。式(26)表明影响组分耗散的结构间相互作用受到组分自身的内部结构和状态的影响,而没有直接受其他相内部结构影响。

本文中假定内部结构的变化仅导致宏观的塑性变形,而忽略其他不可恢复变形的影响。

3.3 自由能的各相表示

从整体能量平衡方程式(11)出发,忽略温度变化的影响,可以得到非饱和土等温过程能量平衡方程

式(32)。由假定(2)忽略非饱和土中不同相之间质量、动量、内能的转化,可知 $\hat{\rho}_\alpha$ 、 $\hat{P}_\alpha$ 和 $\hat{e}_\alpha$ 均为零。则式

$$(11) \text{ 中的内能变为 } \frac{d\varepsilon}{dt} = \sum \frac{\rho^\alpha}{\rho} \frac{d\varepsilon^\alpha}{dt}. \text{ 此外忽略辐射和外部热供的能量供应项,即令式(11)中 } r^\alpha \text{ 为零。}$$

则式(11)变为

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = W - \text{div } q. \quad (27)$$

由热力学第二定律有(Houlsby等, 2000)^[22]

$$T\dot{\eta} + \text{div } q - \frac{1}{T} q \cdot \text{grad } T \geq 0. \quad (28)$$

上式中 η 为整体混合物的比熵(specific entropy), T 为绝对温度($T \geq 0$)。令式(28)前二项之和为机械耗散 D , 即

$$D = T\dot{\eta} + \text{div } q. \quad (29)$$

式(28)第三项 $-\frac{1}{T} q \cdot \text{grad } T$ 为热耗散。热耗散总是非负的(热流总是沿着温度梯度反方向流动),并且它与机械耗散相比(针对土力学或非饱和土力学而言)通常是较小的量。所以也可以认为 $D \geq 0$ 。因此有

$$D = T\dot{\eta} + \text{div } q \geq 0,$$

$$-\frac{1}{T} q \cdot \text{grad } T \geq 0.$$

这两个不等式是比热力学第二定律更加严格的条件,但已经广泛地被接受(Houlsby and Puzrin^[19])。

由式(29)解出 $\text{div } q$ 再代入式(28)得

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = W - D + T\dot{\eta}. \quad (30)$$

令 $\frac{dU}{dt} = \rho \frac{d\varepsilon}{dt}$, 根据热力学势函数之间的变换关系,单位体积的 Helmholtz 自由能就可表示为

$$A = U - T\eta. \quad (31)$$

对式(31)求物质导数后得

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dU}{dt} - (T \frac{d\eta}{dt} + \eta \frac{dT}{dt}).$$

当把非饱和土视为等温过程时(温度不变),上式可表示为

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dU}{dt} - T \frac{d\eta}{dt}.$$

把式(30)代入上式后可得

$$\frac{dA}{dt} = W - D. \quad (32)$$

式(32)中 W 为机械功,其具体形式见式(21); A 为 Helmholtz 自由能势函数; D 为耗散势函数,式(32)是本文讨论的出发点。假定非饱和土的能量耗散全部是由它的内部结构(土骨架与水的结构)重组或变化引起的。

总的单位体积的自由能会等于各部之和:

$$\dot{A} = \dot{A}_s + \dot{A}_w + \dot{A}_a, \quad (33)$$

把式 (33) 代入式 (32), 并考虑式 (24) 可以得到

$$\dot{A}_s = \tilde{\sigma} : \dot{\varepsilon} - \zeta_i^s \dot{\xi}_i^s, \quad (34a)$$

$$\dot{A}_w = sn \dot{S}_r - \zeta_i^w \dot{\xi}_i^w, \quad (34b)$$

$$\dot{A}_a = -n(1-S_r)(P_a/K_a)\dot{P}_a - \zeta_i^a \dot{\xi}_i^a = P_a n^a \dot{\varepsilon}_{ii}^a - \zeta_i^a \dot{\xi}_i^a, \quad (34c)$$

式 (34c) 中 $K_a = \rho_a dP_a/d\rho_a$, 利用气相的质量守恒方程式 (6) 和式 (5) 有

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^a + \rho^a \operatorname{div} V_a &= 0 \Rightarrow \dot{\rho}^a / \rho^a = -\operatorname{div} V_a = \dot{\varepsilon}_{ii}^a \\ \frac{\dot{\rho}^a}{\rho^a} &= \frac{d(n^a \rho_a)/dt}{n^a \rho_a} = \frac{\dot{n}^a \rho_a + n^a \dot{\rho}_a}{n^a \rho_a} = \frac{\dot{n}^a}{n^a} + \frac{\dot{\rho}_a}{\rho_a} \\ \frac{1}{K_a} \frac{dP_a}{dt} &= \frac{1}{\rho_a} \frac{d\rho_a}{dt} = \frac{\dot{\rho}_a}{\rho_a} = \frac{\dot{\rho}^a}{\rho^a} - \frac{\dot{n}^a}{n^a} = -\dot{\varepsilon}_{ii}^a + \frac{\dot{n}^a}{n^a}, \quad (34d) \end{aligned}$$

当 $(\dot{n}^a/n^a)$ 较小并可以忽略时, 利用式 (34d) 即可得式 (34c)。

对 Helmholtz 自由能进行 Legendre 变换后, 得到 Gibbs 自由能:

$$G_s(\tilde{\sigma}, H_s) = \tilde{\sigma} : \varepsilon - A_s(\varepsilon, H_s),$$

$$G_w(s, H_w) = sn^w - A_w(n^w, H_w),$$

$$G_a(P_a, H_a) = P_a n^a \varepsilon_{ii}^a - A_a(\varepsilon_{ii}^a, H_a)。$$

$$\dot{G}_s = \varepsilon : \dot{\tilde{\sigma}} + \zeta_i^s \dot{\xi}_i^s = \frac{\partial G_s}{\partial \tilde{\sigma}} : \dot{\tilde{\sigma}} + \zeta_i^s (\tilde{\sigma}, H_s) \dot{\xi}_i^s, \quad (35a)$$

$$\dot{G}_w = n^w \dot{s} + \zeta_i^w \dot{\xi}_i^w = \frac{\partial G_w}{\partial s} \dot{s} + \zeta_i^w (s, H_w) \dot{\xi}_i^w, \quad (35b)$$

$$\dot{G}_a = \varepsilon_{ii}^a \dot{P}_a + \zeta_i^a \dot{\xi}_i^a = \frac{\partial G_a}{\partial P_a} \dot{P}_a + \zeta_i^a (P_a, H_a) \dot{\xi}_i^a。 \quad (35c)$$

3.4 各相运动量的弹塑性表示

(1) 固相

由式 (35a) 有下式成立:

$$\varepsilon = \frac{\partial G_s(\tilde{\sigma}, H_s)}{\partial \tilde{\sigma}}, \quad (36)$$

$$d\varepsilon = \frac{\partial G_s(\tilde{\sigma}, H_s)}{\partial \tilde{\sigma} \otimes \partial \tilde{\sigma}} : d\tilde{\sigma} + \varepsilon(\tilde{\sigma}, H_s + \delta H_s) - \varepsilon(\tilde{\sigma}, H_s)。 \quad (37)$$

塑性应变唯一的由于内部结构变化而引起的, 因此有下式成立:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon^p &= \varepsilon(\tilde{\sigma}, H_s + \delta H_s) - \varepsilon(\tilde{\sigma}, H_s) \\ &= \frac{\partial G_s(\tilde{\sigma}, H_s + \delta H_s)}{\partial \tilde{\sigma}} - \frac{\partial G_s(\tilde{\sigma}, H_s)}{\partial \tilde{\sigma}}, \quad (38) \end{aligned}$$

$$\delta \varepsilon^e = d\varepsilon - \delta \varepsilon^p = \frac{\partial^2 G_s(\tilde{\sigma}, H_s)}{\partial \tilde{\sigma} \otimes \partial \tilde{\sigma}} : d\tilde{\sigma} = M_s : d\tilde{\sigma}。 \quad (39)$$

(2) 液相

类似地, 由式 (35b) 有下式成立:

$$n^w = \frac{\partial G_w(s, H_w)}{\partial (s)}, \quad (40)$$

$$dn^w = \frac{\partial^2 G_w(s, H_w)}{\partial s^2} ds + n^w(s, H_w + \delta H_w) - n^w(s, H_w)。 \quad (41)$$

由于内部结构变化而引起的液相塑性变形为

$$\delta n^{wp} = n^w(s, H_w + \delta H_w) - n^w(s, H_w), \quad (42)$$

$$\delta n^{we} = dn^w - \delta n^{wp} = \frac{\partial^2 G_w(s, H_w)}{\partial s^2} ds = M_w ds。 \quad (43)$$

(3) 气相

类似地, 由式 (35c) 有下式成立:

$$\varepsilon_{ii}^a = \frac{\partial G_a(P_a, H_a)}{\partial (P_a)}, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} d(\varepsilon_{ii}^a) &= \frac{\partial^2 G_a(P_a, H_a)}{\partial (P_a)^2} dP_a + \\ &\quad \varepsilon_{ii}^a(P_a, H_a + \delta H_a) - \varepsilon_{ii}^a(P_a, H_a)。 \quad (45) \end{aligned}$$

塑性变形由于内部结构变化而引起的, 因此有

$$\delta \varepsilon_{ii}^{ap} = \varepsilon_{ii}^a(P_a, H_a + \delta H_a) - \varepsilon_{ii}^a(P_a, H_a), \quad (46)$$

$$\delta \varepsilon_{ii}^{ae} = d\varepsilon_{ii}^a - \delta \varepsilon_{ii}^{ap} = \frac{\partial^2 G_a(P_a, H_a)}{\partial (P_a)^2} dP_a = M_a dP_a。 \quad (47)$$

由于 $n^a = n(1-S_r)$, $V_a = n^a V$, 所以有

$$\varepsilon_{ii}^a = \frac{dV_a}{V} = dn^a + n^a \frac{dV}{V}。 \quad (48)$$

当不排气时, $dV = 0$, 这时有

$$\varepsilon_{ii}^a = dn^a = dn(1-S_r) - n dS_r = -n dS_r, \quad (49)$$

$$\text{这时, } nS_r^p = -\varepsilon_{ii}^{ap}; \quad nS_r^e = -\varepsilon_{ii}^{ae}, \quad (50)$$

3.5 功的弹塑性分解以及蓄藏 (locked energy) 功的表达式

功的弹塑性分解

$$dA = W^e + W^p - D,$$

$$dA_s = \tilde{\sigma} : \delta \varepsilon^e + \tilde{\sigma} : \delta \varepsilon^p - \zeta_i^s \delta \xi_i^s, \quad (51a)$$

$$dA_w = s \delta n^{we} + s \delta n^{wp} - \zeta_i^w \delta \xi_i^w, \quad (51b)$$

$$dA_a = P_a \delta \varepsilon_{ii}^{ae} + P_a \delta \varepsilon_{ii}^{ap} - \zeta_i^a \delta \xi_i^a。 \quad (51c)$$

式 (51) 右端第二项为塑性变形功, 简称塑性功。

根据 Collins (2005) [20] 的讨论, 塑性功可分为蓄藏功和耗散的塑性功, 即有下面的式子:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} : \delta \varepsilon^p &= \alpha : \delta \varepsilon^p + (\tilde{\sigma} - \alpha) : \delta \varepsilon^p = \alpha : \delta \varepsilon^p + \sigma_D : \delta \varepsilon^p, \\ &\quad (52a) \end{aligned}$$

$$s \delta n^{wp} = \beta \delta n^{wp} + (s - \beta) \delta n^{wp} = \beta \delta n^{wp} + \beta_D \delta n^{wp}, \quad (52b)$$

$$P_a \delta \varepsilon_{ii}^{ap} = \zeta \delta \varepsilon_{ii}^{ap} + (P_a - \zeta) \delta \varepsilon_{ii}^{ap} = \zeta \delta \varepsilon_{ii}^{ap} + \zeta_D \delta \varepsilon_{ii}^{ap}。 \quad (52c)$$

α 是背应力, 它是与固相塑性应变功共轭, 两者之积就是蓄藏功。它的存在并没有增加或者减少能量, 它的作用只是将塑性功划分成蓄藏能和耗散两部分, 它对耗散的多少有影响。 β , ζ 和 α 一样, 只不过它们是分别与液相和气相对应背应力。

3.6 建立非饱和土的弹塑性本构方程的理论框架

(1) 屈服面的形成

假定 $\delta \varepsilon^p$, δn^{wp} , $\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap}$ 以及 $\delta \xi_i^\alpha$ ($\alpha = s, w, a$) 为各向同性的。则它们可以线性的表示为

$$\delta \varepsilon^p = m \langle L_s \rangle, \quad (53a)$$

$$\delta n^{wp} = \text{sgn}(\delta n^{wp}) \langle L_w \rangle, \quad (53b)$$

$$\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap} = \text{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap}) \langle L_a \rangle, \quad (53c)$$

$$\delta \xi_i^\alpha = r_i^\alpha \langle L_\alpha \rangle. \quad (54)$$

式 (51) 表明塑性功可分为两部分: 蓄藏的塑性功和耗散的塑性功。前面假定耗散的塑性功全部用于土的内部结构的重新排列或重组。即假定下式成立

$$\sigma_D : \delta \varepsilon^p - \zeta_i^s \delta \xi_i^s = 0, \quad (55a)$$

$$\beta_D \delta n^{wp} - \zeta_i^w \delta \xi_i^w = 0, \quad (55b)$$

$$\varsigma_D \delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap} - \zeta_i^a \delta \xi_i^a = 0. \quad (55c)$$

其中 $\sigma_D = (\bar{\sigma} - \alpha)$, $\beta_D = (ns - \beta)$, $\varsigma_D = (P_a n^a - \varsigma)$ 。把式 (53) 和 (54) 代入式 (55) 屈服面方程可以表示为

$$f_s^d = f_s^d(\sigma_D, \bar{\sigma}, H_s) = \sigma_D : m \langle L_s \rangle - \zeta_i^s r_i^s \langle L_s \rangle = 0, \quad (56a)$$

$$f_w^d = f_w^d(\beta_D, s, H_w) = \beta_D \text{sgn}(\delta n^{wp}) \langle L_w \rangle - \zeta_i^w r_i^w \langle L_w \rangle = 0, \quad (56b)$$

$$f_a^d = f_a^d(\varsigma_D, P_a, H_a) = \varsigma_D \text{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap}) \langle L_a \rangle - \zeta_i^a r_i^a \langle L_a \rangle = 0, \quad (56c)$$

其中,

$$\frac{\partial f_s^d}{\partial \sigma_D} = m \quad (57)$$

$$\alpha = \alpha(\varepsilon, H_s); \quad \beta = \beta(n^w, H_w); \quad \varsigma = \varsigma(\bar{\varepsilon}_{ii}^a, H_a). \quad (58)$$

把式 (58) 进行 Legendre 变换后得

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\bar{\sigma}, H_s); \quad \bar{\beta} = \bar{\beta}(s, H_w); \quad \bar{\varsigma} = \bar{\varsigma}(P_a, H_a). \quad (59)$$

(2) 固相

前面已经得到了耗散应力空间中的屈服面, 在真实应力空间, 屈服面函数式 (56) 可表示为

$$f_s(\bar{\sigma}, H_s) = f_s^d(\bar{\sigma} - \bar{\alpha}(\bar{\sigma}, H_s), \bar{\sigma}, H_s) = 0. \quad (60)$$

由一致性条件有

$$\begin{aligned} df_s &= \frac{\partial f_s}{\partial \bar{\sigma}} : d\bar{\sigma} + f_s(\bar{\sigma}, H_s + \delta H_s) - f_s(\bar{\sigma}, H_s) = df_s^d \\ &= \frac{\partial f_s^d}{\partial(\bar{\sigma} - \bar{\alpha})} : d\bar{\sigma} - \frac{\partial f_s^d}{\partial(\bar{\sigma} - \bar{\alpha})} : \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \bar{\sigma}} : d\bar{\sigma} + \frac{\partial f_s^d}{\partial \bar{\sigma}} : d\bar{\sigma} \\ &\quad - \frac{\partial f_s^d}{\partial(\bar{\sigma} - \bar{\alpha})} \delta \bar{\alpha}^p + [f_s^d(\sigma_D, \bar{\sigma}, H_s + \delta H_s) - f_s^d(\sigma_D, \bar{\sigma}, H_s)] \\ &= \left(m - m : \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial f_s^d}{\partial \bar{\sigma}} \right) : d\bar{\sigma} + (\delta f_s^{dp} - m : \delta \bar{\alpha}^p) = 0, \quad (61) \end{aligned}$$

$$\text{令} \quad m - m : \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial f_s^d}{\partial \bar{\sigma}} = \mu = \frac{\partial f_s}{\partial \bar{\sigma}}, \quad (62a)$$

$$f_s(\bar{\sigma}, H_s + \delta H_s) - f_s(\bar{\sigma}, H_s) = \delta f_s^{dp} - m : \delta \bar{\alpha}^p, \quad (62b)$$

则式 (41) 可写成

$$df_s = \mu : d\bar{\sigma} + f_s(\bar{\sigma}, H_s + \delta H_s) - f_s(\bar{\sigma}, H_s) = 0, \quad (63)$$

由式 (62a) 和式 (63) 可见塑性应变式不必与屈服面 f_s 正交。

上两式表示反应力和屈服面 f_s 的发展与变化是由内部结构的微小变化而引起的 (保持其他的自由变量不变)。其反应力由于内部结构的微小变化而引起的增量的发展方程可表示为

$$\begin{aligned} \delta \bar{\alpha}^p &= \bar{\alpha}(\bar{\sigma}, H_s + \delta H_s) - \bar{\alpha}(\bar{\sigma}, H_s) \\ &= [\bar{\alpha}(\bar{\sigma}, H_s' + \delta H_s', H_s'', H_s''') - \bar{\alpha}(\bar{\sigma}, H_s', H_s'', H_s''')] + \\ &\quad [\bar{\alpha}(\bar{\sigma}, H_s', H_s'' + \delta H_s'', H_s''') - \bar{\alpha}(\bar{\sigma}, H_s', H_s'', H_s''')] + \\ &\quad [\bar{\alpha}(\bar{\sigma}, H_s', H_s'', H_s''' + \delta H_s''') - \bar{\alpha}(\bar{\sigma}, H_s', H_s'', H_s''')] \\ &= c_s \langle L_s \rangle + c_w dn^w + c_a d\bar{\varepsilon}_{ii}^a, \quad (64) \end{aligned}$$

其中

$$[\bar{\alpha}(\bar{\sigma}, H_s' + \delta H_s', H_s'', H_s''') - \bar{\alpha}(\bar{\sigma}, H_s', H_s'', H_s''')] = c_s \langle L_s \rangle,$$

$$[\bar{\alpha}(\bar{\sigma}, H_s', H_s'' + \delta H_s'', H_s''') - \bar{\alpha}(\bar{\sigma}, H_s', H_s'', H_s''')] = c_w dn^w,$$

$$[\bar{\alpha}(\bar{\sigma}, H_s', H_s'', H_s''' + \delta H_s''') - \bar{\alpha}(\bar{\sigma}, H_s', H_s'', H_s''')] = c_a d\bar{\varepsilon}_{ii}^a.$$

类似的, 屈服面 f_s 由内部结构的发展变化引起的增量方程为

$$\delta f_s^{dn} = z_s \langle L_s \rangle + z_w dn^w + z_a d\bar{\varepsilon}_{ii}^a. \quad (65)$$

把式 (64) 和 (65) 代入式 (61) 后得

$$df_s = \mu : d\bar{\sigma} - K_p' \langle L_s \rangle - K_p'' dn^w - K_p''' d\bar{\varepsilon}_{ii}^a = 0, \quad (66)$$

其中

$$K_p' = m : c_s - z_s; \quad K_p'' = m : c_w - z_w; \quad K_p''' = m : c_a - z_a. \quad (67)$$

把式 (66) 中的 $\langle L_s \rangle$ 解出, 得到相应的表达式为

$$L_s = \frac{\mu}{K_p'} : d\bar{\sigma} - \frac{K_p''}{K_p'} dn^w - \frac{K_p'''}{K_p'} d\bar{\varepsilon}_{ii}^a. \quad (68)$$

根据式 (53a) 可以求出塑性应变增量为

$$\delta \varepsilon^p = m \langle L_s \rangle = h(L_s) \left(\frac{m \otimes \mu}{K_p'} : d\bar{\sigma} - m \frac{K_p''}{K_p'} dn^w - m \frac{K_p'''}{K_p'} d\bar{\varepsilon}_{ii}^a \right). \quad (69)$$

利用式 (39) 和式 (69) 可以得到

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= \delta \varepsilon^e + \delta \varepsilon^p = \left[M_s + h(L_s) \frac{m \otimes \mu}{K_p'} \right] : d\bar{\sigma} - \\ &\quad h(L_s) \frac{K_p''}{K_p'} m dn^w - h(L_s) \frac{K_p'''}{K_p'} m d\bar{\varepsilon}_{ii}^a. \quad (70) \end{aligned}$$

式 (70) 也可以写成如下的形式:

$$d\bar{\sigma} = \Lambda : d\varepsilon + \Pi_w dn^w + \Pi_a d\bar{\varepsilon}_{ii}^a, \quad (71)$$

其中

$$\Lambda = \left[M_s + h(L_s) \frac{m \otimes \mu}{K_p'} \right]^{-1} = E - h(L_s) \frac{E : m \otimes \mu : E}{\mu : E : m + K_p'},$$

$$\Pi_w = \frac{h(L_s) K_p'' E : m}{\mu : E : m + K_p'}, \quad \Pi_a = \frac{h(L_s) K_p''' E : m}{\mu : E : m + K_p'}, \quad E = M_s^{-1}.$$

(3) 流相弹塑性模拟框架

通过把式 (53b) 和 (54) 代入式 (55b) 前面已

经得到如下面耗散应力空间中的流相屈服面方程式 (56b), 在真实应力空间中可以表示为

$$\begin{aligned} f_w(s, H_w) &= f_w^d(s - \bar{\beta}(s, H_s), s, H_w) \\ &= -(s - \bar{\beta}) \operatorname{sgn}(\delta n^{wp}) - r_i^w \zeta_i^w \\ &= -(s - \bar{\beta}) \operatorname{sgn}(\delta n^{wp}) - \varpi_w = 0, \end{aligned} \quad (72)$$

其中令: $\varpi_w = r_i^w \zeta_i^w$, 由一致性条件得

$$\begin{aligned} df_w &= \frac{\partial f_w}{\partial s} ds + f_w(s, H_w + \delta H_w) - f_w(s, H_w) \\ &= df_w^d = -\operatorname{sgn}(\delta n^{wp}) \frac{\partial(s - \bar{\beta})}{\partial s} ds - \frac{\partial \varpi_w}{\partial s} ds + \\ &\quad \operatorname{sgn}(\delta n^{wp}) \delta \bar{\beta}^p - \delta \varpi_w^p \\ &= \left\{ -\operatorname{sgn}(\delta n^{wp}) \left[1 - \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial s} \right] - \frac{\partial \varpi_w}{\partial s} \right\} ds + \\ &\quad \operatorname{sgn}(\delta n^{wp}) \delta \bar{\beta}^p - \delta \varpi_w^p = 0. \end{aligned} \quad (73)$$

其中由内部结构变化引起的增量的方程可以表示为

$$\begin{aligned} \delta \bar{\beta}^p &= \bar{\beta}(s, H_w + \delta H_w) - \bar{\beta}(s, H_w) \\ &= [\bar{\beta}(s, H'_w + \delta H'_w, H''_w, H'''_w) - \bar{\beta}(s, H'_w, H''_w, H'''_w)] + \\ &\quad [\bar{\beta}(s, H'_w, H''_w + \delta H''_w, H'''_w) - \bar{\beta}(s, H'_w, H''_w, H'''_w)] + \\ &\quad [\bar{\beta}(s, H'_w, H''_w, H'''_w + \delta H'''_w) - \bar{\beta}(s, H'_w, H''_w, H'''_w)] \\ &= b_w \langle L_w \rangle + b_s : d\varepsilon + b_a d\bar{\varepsilon}_{ii}^a, \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \delta \varpi_w^p &= \varpi_w(s, H_w + \delta H_w) - \varpi_w(s, H_w) \\ &= g_w \langle L_w \rangle + g_s : d\varepsilon + g_a d\bar{\varepsilon}_{ii}^a. \end{aligned} \quad (75)$$

把式 (74) 和 (75) 代入到式 (73) 中, 可以得到

$$\begin{aligned} df_w &= \left\{ -\operatorname{sgn}(\delta n^{wp}) \left[1 - \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial s} \right] - \frac{\partial \varpi_w}{\partial s} \right\} \times \\ &\quad [ds - H'_p \langle L_w \rangle - H''_p : d\varepsilon - H'''_p d\bar{\varepsilon}_{ii}^a] = 0. \end{aligned} \quad (76)$$

其中

$$H'_p = -\frac{\operatorname{sgn}(\delta n^{wp}) b_w - g_w}{\operatorname{sgn}(\delta n^{wp}) [1 - \partial \bar{\beta} / \partial s] + \partial \varpi_w^p / \partial s}, \quad (77a)$$

$$H''_p = -\frac{\operatorname{sgn}(\delta n^{wp}) b_s - g_s}{\operatorname{sgn}(\delta n^{wp}) [1 - \partial \bar{\beta} / \partial s] + \partial \varpi_w^p / \partial s}, \quad (77b)$$

$$H'''_p = -\frac{\operatorname{sgn}(\delta n^{wp}) b_a - g_a}{\operatorname{sgn}(\delta n^{wp}) [1 - \partial \bar{\beta} / \partial s] + \partial \varpi_w^p / \partial s}. \quad (77c)$$

把式 (76) 中的 $\langle L_w \rangle$ 解出, 得到相应的表达式为

$$\langle L_w \rangle = \frac{1}{H'_p} ds - \frac{H''_p}{H'_p} : d\varepsilon - \frac{H'''_p}{H'_p} d\bar{\varepsilon}_{ii}^a. \quad (78)$$

利用式 (53b) 可以得到塑性饱和度增量为

$$\delta n^{wp} = \operatorname{sgn}(\delta n^{wp}) \langle L_w \rangle$$

$$= \operatorname{sgn}(\delta n^{wp}) \left[\frac{1}{H'_p} ds - \frac{H''_p}{H'_p} : d\varepsilon - \frac{H'''_p}{H'_p} d\bar{\varepsilon}_{ii}^a \right], \quad (79)$$

所以利用式 (43) 和 (79) 有

$$\begin{aligned} dn^w &= \delta n^{wc} + \delta n^{wp} = \left[M_w + \frac{\operatorname{sgn}(\delta n^{wp})}{H'_p} \right] ds - \\ &\quad \left[\operatorname{sgn}(\delta n^{wp}) \frac{H''_p}{H'_p} : d\varepsilon - \left[\operatorname{sgn}(\delta n^{wp}) \frac{H'''_p}{H'_p} \right] d\bar{\varepsilon}_{ii}^a \right]. \end{aligned} \quad (80)$$

式 (80) 也可改写成如下形式:

$$\begin{aligned} ds &= \frac{H'_p}{[M_w H'_p + \operatorname{sgn}(\delta n^{wp})]} dn^w + \\ &\quad \frac{H''_p}{[M_w H'_p / \operatorname{sgn}(\delta n^{wp}) + 1]} : d\varepsilon + \\ &\quad \frac{H'''_p}{[M_w H'_p / \operatorname{sgn}(\delta n^{wp}) + 1]} d\bar{\varepsilon}_{ii}^a \\ &= Y dn^w + \Xi_s : d\varepsilon + \Xi_a d\bar{\varepsilon}_{ii}^a. \end{aligned} \quad (81)$$

(4) 气相弹塑性模拟框架

通过把式 (53c) 和 (54) 代入式 (55c) 前面已经得到了气相屈服面方程为式 (56c), 在真实应力空间中屈服函数可以表示成

$$\begin{aligned} f_a(P_a, H_a) &= f_a^d[P_a - \bar{\zeta}(P_a, H_a), P_a, H_a] \\ &= (P_a - \bar{\zeta}) \operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap}) - \zeta_i^a r_i^a \\ &= (P_a - \bar{\zeta}) \operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap}) - \varpi_a = 0, \end{aligned} \quad (82)$$

其中令: $\varpi_a = r_i^a \zeta_i^a$, 一致性条件为

$$\begin{aligned} df_a &= \frac{\partial f_a}{\partial P_a} dP_a + f_a(P_a, H_a + \delta H_a) - f_a(P_a, H_a) \\ &= df_a^d = \operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap}) \frac{\partial(P_a - \bar{\zeta})}{\partial P_a} dP_a - \frac{\partial \varpi_a}{\partial P_a} dP_a - \\ &\quad \operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap}) \delta \bar{\zeta}^p - \delta \varpi_a^p \\ &= \left\{ \operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap}) \left[1 - \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial P_a} \right] - \frac{\partial \varpi_a}{\partial P_a} \right\} dP_a - \\ &\quad \operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap}) \delta \bar{\zeta}^p - \delta \varpi_a^p = 0. \end{aligned} \quad (83)$$

其中内部结构微小变化引起的增量方程可以表示为

$$\begin{aligned} \delta \bar{\zeta}^p &= \bar{\zeta}(P_a, H_a + \delta H_a) - \bar{\zeta}(P_a, H_a) \\ &= [\bar{\zeta}(P_a, H'_a + \delta H'_a, H''_a, H'''_a) - \bar{\zeta}(P_a, H'_a, H''_a, H'''_a)] + \\ &\quad [\bar{\zeta}(P_a, H'_a, H''_a + \delta H''_a, H'''_a) - \bar{\zeta}(P_a, H'_a, H''_a, H'''_a)] + \\ &\quad [\bar{\zeta}(P_a, H'_a, H''_a, H'''_a + \delta H'''_a) - \bar{\zeta}(P_a, H'_a, H''_a, H'''_a)] \\ &= w_a \langle L_a \rangle + w_s : d\varepsilon + w_w dn^w, \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \delta \varpi_a^p &= \varpi_a(P_a, H_a + \delta H_a) - \varpi_a(P_a, H_a) \\ &= l_a \langle L_a \rangle + l_s : d\varepsilon + l_w dn^w. \end{aligned} \quad (85)$$

把式(84)和(85)代入到式(83)中去,可以得到

$$d f_a = \left\{ \operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap}) \left[1 - \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial P_a} \right] - \frac{\partial \varpi_a}{\partial P_a} \right\} \times \\ \left[d P_a - G'_p \langle L_a \rangle - G''_p : d \varepsilon - G'''_p d n^w \right] = 0, \quad (86)$$

其中

$$G'_p = \frac{\operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^a) w_a + l_a}{\operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^a) [1 - \partial \bar{\zeta} / \partial P_a] - \partial \varpi_a / \partial P_a}, \quad (87a)$$

$$G''_p = \frac{\operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^a) w_s + l_s}{\operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^a) [1 - \partial \bar{\zeta} / \partial P_a] - \partial \varpi_a / \partial P_a}, \quad (87b)$$

$$G'''_p = \frac{\operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^a) w_w + l_w}{\operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^a) [1 - \partial \bar{\zeta} / \partial P_a] - \partial \varpi_a / \partial P_a}. \quad (87c)$$

把式(86)中的 $\langle L_a \rangle$ 解出得

$$\langle L_a \rangle = \frac{1}{G'_p} d P_a - \frac{G''_p}{G'_p} : d \varepsilon - \frac{G'''_p}{G'_p} d n^w. \quad (88)$$

利用式(53c)可以得到

$$\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap} = \operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap}) \langle L_a \rangle = \frac{\operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap})}{G'_p} d P_a - \\ \operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap}) \frac{G''_p}{G'_p} : d \varepsilon - \operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap}) \frac{G'''_p}{G'_p} d n^w. \quad (89)$$

利用式(47)和(89),可以得到

$$d \bar{\varepsilon}_{ii}^a = \delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ac} + \delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap} = \left[M_a + \frac{\operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap})}{G'_p} \right] d P_a - \\ \left[\operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap}) \frac{G''_p}{G'_p} \right] : d \varepsilon - \left[\operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap}) \frac{G'''_p}{G'_p} \right] d n^w. \quad (90)$$

式(90)也可以写成如下形式:

$$d P_a = \frac{G'_p}{M_a G'_p + \operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap})} d \bar{\varepsilon}_{ii}^a + \\ \frac{G''_p}{M_a G'_p / \operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap}) + 1} : d \varepsilon + \\ \frac{G'''_p}{M_a G'_p / \operatorname{sgn}(\delta \bar{\varepsilon}_{ii}^{ap}) + 1} d n^w \\ = \Gamma d \bar{\varepsilon}_{ii}^a + \Omega_s : d \varepsilon + \Omega_w d n^w. \quad (91)$$

(5) 非饱和土弹塑性框架总结

根据以上的推导已经得到了如下的本构关系:

$$d \bar{\sigma} = \Lambda : d \varepsilon + \Pi_w d n^w + \Pi_a d \bar{\varepsilon}_{ii}^a, \quad (71)$$

$$d s = \Upsilon d n^w + \Xi_s : d \varepsilon + \Xi_a d \bar{\varepsilon}_{ii}^a, \quad (81)$$

$$d P_a = \Gamma d \bar{\varepsilon}_{ii}^a + \Omega_s : d \varepsilon + \Omega_w d n^w. \quad (91)$$

从这些方程中可以看到,非饱和土中固液气三相是相互影响耦合在一起的。这个模型虽然很复杂,但是他能很好的反映非饱和土的实际情况,尤其是它可以反映气体的耗散和塑性变形对非饱和土的影响,这是目前其他很多模型都办不到的。

4 结 语

本文介绍了用连续孔隙介质土力学的理论基础和建立非饱和土本构关系的理论框架。连续孔隙介质土力学结合了多相孔隙介质理论、热动力学和内变量理论,为土力学的研究和发展提供了又一新的研究思路,并为土力学奠定了统一和一致的理论基础。在建立非饱和土本构关系的理论框架中,其关键是要给出两个热力学势函数即自由能势函数和耗散势函数。文中详细的推导了非饱和土中功的表达式,认为能量耗散是由于土的内部结构重新组构或变化引起的,并引入 ξ_i 作为内变量用于反映内部结构的变化,最后给出了自由能表达式。然后将自由能分解成三部分,并分别对非饱和土中三相进行了分析,得到了非饱和土各相的本构方程(见式(71)、(81)cm、(91))。从其本构方程中可以看到,在非饱和土中,固、液、气三相是相互影响并耦合在一起的。本文提出的本构方程与已有的非饱和土本构方程的主要区别是包括了气相能量耗散和塑性变形的影响。

多相孔隙介质理论从基本的物理规律出发,针对问题的具体情况进行数学演绎,所以在该理论框架下所建立的本构方程都可以按一定的规则提出,所考虑的多相介质的物理性质,物理规律的限制,分析、演绎中的具体假定和简化都有清楚的表述。所以这种本构方程具有系统性,对各种因素的考虑也具有一致性,可以避免得出不协调的结论。把非饱和土作为一种三相多孔介质,运用体积分数的概念,结合实际情况做出假设,使模型尽量简化,利用这种方法建立非饱和土的本构模型将会是一个很有前途的研究方向。限于篇幅本文仅给出理论部分,关于非饱和土本构关系的实验和具体应用部分将另文给出。

参考文献:

- [1] 赵成刚,白冰,等.土力学的现状及其数值分析方法中某些问题的讨论[J].岩土力学,2006,27(8):1361-1364. (ZHAO Cheng-gang, BAI Bing, et al. Discussion on state-of-art of soil mechanics and some problems with applications of numerical method to geotechnical engineering[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(8): 1361 - 1364. (in Chinese))
- [2] WEI C. Static and dynamic behavior of multiphase porous media: governing equation and finite element implementation[D]. Norman: University of Oklahoma, 2001.
- [3] 匡震邦.非线性连续介质力学[M].上海:上海交通大学出版社,2002. (KUANG Zhen-bang. Nonlinear continuum

- mechanics[M]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 2002. (in Chinese))
- [4] LUBARDA V A. Elastoplasticity theory[M]. New York: CRC Press, 2002.
- [5] MAUGIN G A. The thermomechanics of nonlinear irreversible behaviors[M]. Singapore: World Scientific Press, 1999.
- [6] de Borer R. Theory of porous media[M]. Berlin: Springer, 2000.
- [7] HUTTER K, JÖHNK K. Continuum methods of physical modeling[M]. Berlin: Springer, 2004.
- [8] 赵成刚, 张雪东, 郭 璇. 土的本构方程与热力学[J]. 力学进展, 2006, **35**(4): 611 – 618. (ZHAO Cheng-gang, ZHANG Xue-dong, GUO Xuan. Constitutive equations of soil and thermodynamics[J]. Advances in Mechanics, 2006, **35**(4): 611 – 618. (in Chinese))
- [9] 赵成刚, 刘 艳, 等. 非饱和土本构模型研究进展[J]. 北京工业大学学报, 2008, **34**(8). (ZHAO Cheng-gang, LIU Yan, et al. Research progress in constitutive models for unsaturated soils[J]. Journal of Beijing University of Technology, 2008, **34**(8). (in Chinese))
- [10] HANSSANIZADEH M, GRAY W G. General conservation equations for multi-phase systems:1. averaging procedure[J]. Advances in Water Resources, 1979, **12**: 131 – 144.
- [11] TRUSDELL C, TOUPIN R. The classical field theory[C]// Flugge's Handbush de Physik. Vol.III/1, Berlin: Springer-Verlag, 1960: 226 – 793.
- [12] ZIEGLER H, WEHRLI C. The derivation of constitutive relations from the free energy and the dissipation function[J]. Advances in Applied Mechanics, 1987, **25**: 183 – 238.
- [13] COLLINS I F, HOULSBY G T. Application of thermomechanical principles to the modeling of geotechnical materials[C]// Proc Royal society of London, Series A, 1997, 453: 1975 – 2001
- [14] HOULSBY G T. The work input to an unsaturated granular material[J]. Géotechnique, 1997, **47**(1): 193 – 196.
- [15] LI X S. Thermodynamics-based constitutive framework for unsaturated soils: 1: theory[J]. Géotechnique, 2007, **57**(5): 411 – 422.
- [16] 赵成刚, 蔡国庆, 张雪东, 等. 非饱和土广义有效应力原理[J]. 岩土力学, 2009, **30**(5). (ZHAO Cheng-gang, CAI Guo-qing, ZHANG Xue-dong, et al. Generalized effective stress principle of unsaturated soils[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, **30**(5). (in Chinese))
- [17] HANSEN A C. Reexamining some basic definitions of modern mixture theory[J]. Int J Engineering Science, 1989, **27**(12): 1531 – 1544.
- [18] 赵成刚, 张雪东. 非饱和土中功的表述以及有效应力与相分离原理的讨论[J]. 中国科学(E 辑), 2008, **38**(9): 1453 – 1463. (ZHAO Cheng-gang, ZHANG Xue-dong. Derivation of the work expression and discussion on the effective principle and the phase separation theorem in unsaturated soil[J]. Science in China (Ser. E), 2008, **38**(9): 1453 – 1463. (in Chinese))
- [19] HOULSBY G T, PUZRIN A M. A thermomechanical framework for constitutive models for rate-independent dissipative materials[J]. International Journal of Plasticity, 2000, **16**: 1017 – 1047.
- [20] COLLINS I F. The concept of stored plastic work for frozen elastic energy in soil mechanics[J]. Géotechnique, 2005(5): 373 – 382.