

有关岩土材料剪胀的讨论

邓楚键^{1,2}, 郑颖人¹, 王凯¹, 高飞²

(1. 后勤工程学院土木工程系, 重庆 400041; 2. 空防六处, 湖南 衡阳 421001)

摘要: 剪胀是岩土材料一个非常重要的特性, 但目前对于剪胀的描述并不统一。剪胀角在滑移线场理论中主要有两种定义: ①是实际塑性应变 ε 与剪切应变 γ 之间的夹角; ②是破坏面(应力滑移线)与速度矢量方向的夹角(此时也称膨胀角)。在有限元计算中剪胀角则通过塑性势函数来定义, 但对塑性势函数的选择比较随意, 只是将屈服函数中的内摩擦角换成剪胀角, 此时的剪胀角已没有明显的物理意义, 只能在一定程度上反映材料的剪胀特性。阐明了滑移线场理论中有关剪胀的描述, 推导了平面应变条件下考虑剪胀角影响并与Mohr-Coulomb准则精确匹配的广义Mises准则, 研究了剪胀对浅基破坏模式的影响。

关键词: 剪胀; 流动法则; Mohr-Coulomb; 广义Mises准则; 浅基破坏模式

中图分类号: TU443

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2009)07-1110-05

作者简介: 邓楚键(1978-), 男, 博士, 主要从事岩土工程稳定性及其数值分析研究。E-mail: dengchujian@163.com。

Some discussion on the dilatancy of geotechnical materials

DENG Chu-jian^{1,2}, ZHENG Ying-ren¹, WANG Kai¹, GAO Fei²

(1. Department of Civil Engineering, Logistical Engineering University, Chongqing 400041, China; 2. No. 6 Air Defense Engineering

Department of PLA Air Force, Hengyang 421001, China)

Abstract: Dilatancy is a very important property of geotechnical materials, but now there're different definitions about it in geotechnical engineering. In slip line theory there're two definitions: one is the angle between the plastic strain ε and the shear strain γ , the other is the angle between the failure surface (stress slip line) and the strain slip line. In FEM analysis the dilatancy angle is defined by the plastic potential function at discretion which can only express the dilatancy property to a certain extent. The two definitions of dilatancy in slip line theory are clarified, and the generalized Mises yield criterion matching Mohr-Coulomb yield criterion in plane strain condition is put forward where the effect of dilatancy can be considered. Finally, the effect of dilatancy on the failure modes of shallow foundations is studied.

Key words: dilatancy; flow rule; Mohr-Coulomb; generalized Mises yield criterion; failure mode of shallow foundation

0 引言

岩土材料受到剪切时由于颗粒错动, 往往会产生塑性体积变形, 这种特性称为剪胀^[1]。剪胀是岩土材料的一个非常重要的特性, 软土和松砂常表现为剪缩, 紧密砂土和超固结黏土常表现为剪胀。在计算中若采用关联流动法则, 所得的剪胀值远大于实验中的观测值。通常是应用非关联流动法则来纠正计算中过大的剪胀, 即选用不同于屈服函数的塑性势函数来进行计算, 然而在塑性势函数的选择上只是简单的将屈服函数中内摩擦角 φ 用一个剪胀角 ψ 代替, 这样的 ψ 没有明显的物理意义, 它只能从一定的程度上反映出材料的剪胀特性。目前对于剪胀的描述并不统一, 在基于Mohr-Coulomb准则的滑移线场理论中, 剪胀角在滑移线场理论中主要有两种定义: ①是实际塑性应变 ε 与剪切应变 γ 之间的夹角; ②是破坏面(应力滑移线)

与速度矢量方向的夹角(此时也称膨胀角)。

1 滑移线场理论中对剪胀的考虑^[2]

对于一般受力下的岩土, 所考虑的任何一個受力面, 其极限抗剪强度通常可用库仑定律表示:

$$\tau_n = c + \sigma_n \tan \varphi, \quad (1)$$

式中, τ_n 为极限抗剪强度, σ_n 为受剪面上的法向应力(假定以压为正), c , φ 分别为岩土材料的黏聚力及内摩擦角。

利用莫尔定律, 可以把式(1)推广到平面状态而成Mohr-Coulomb(简称M-C)准则:

$$R^{M-C} = c \cos \varphi + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin \varphi, \quad (2)$$

式中, R^{M-C} 是莫尔应力圆半径, $R^{M-C} = \left[\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ 。

应力滑移线上的剪应力等于抗剪强度, 它表征材料中真正破坏的面, 其方程为

$$\frac{dx}{dy} = \tan(\theta \pm \mu), \quad (3)$$

式中, $\mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ 。

速度滑移线是理想塑性体达到极限状态时, 塑性流动的方向迹线。理想塑性体在塑性流动阶段, 塑性区域中一点的塑性应变率和塑性流动方向由屈服函数和与其相关联的塑性势面以及流动法则决定。一般把实际塑性应变 ε 与剪切应变 γ 之间的夹角称为剪胀角 ν (图 1), 对应塑性势函数为^[3]

$$\sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \sin \nu - c \cos \nu = 0, \quad (4)$$

此刻速度滑移线方程为

$$\frac{dx}{dy} = \tan(\theta \pm \mu'), \quad (5)$$

式中, $\mu' = \frac{\pi}{4} - \frac{\nu}{2}$ 。

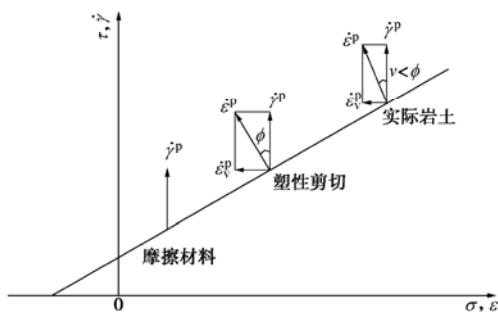


图 1 $\tau(\dot{\gamma}) - \sigma(\dot{\varepsilon}_v)$ 曲线

Fig. 1 The curve for $\tau(\dot{\gamma}) - \sigma(\dot{\varepsilon}_v)$

当 $\nu = 0$ 时, 无塑性体变; $\nu > 0$ 时, 产生剪胀; $\nu < 0$ 时, 产生剪缩。

另外我们有时把破坏面 (应力滑移线) 与速度矢量方向的夹角称为膨胀角 ψ' (图 2)^[4], 但这一名称并不完全合适, 因为实际上只有在 $\psi' = \frac{\varphi}{2} \sim \varphi$ 才会产生剪胀。

而当速度矢量与破坏面的夹角落在 $0 \sim \frac{\varphi}{2}$, 即 $\psi' = 0 \sim \frac{\varphi}{2}$ 时, 此时产生剪缩。

由于应力滑移线与速度滑移线之间的夹角为 $\frac{\varphi - \nu}{2}$, 速度矢量方向与速度滑移线之间的夹角为 ν , 故膨胀角 ψ' (应力滑移线与速度矢量方向的夹角) 与 ν 满足:

$$\psi' = \frac{\varphi - \nu}{2} + \nu = \frac{\varphi + \nu}{2}. \quad (6)$$

从式 (6) 可以看出: 当 $\nu = 0 \sim \varphi$ 时, $\psi' = \frac{\varphi}{2} \sim \varphi$,

此刻产生剪胀; 当 $\nu = 0$ 时, $\psi' = \frac{\varphi}{2}$, 此刻无塑性体变;

当 $\nu = -\varphi \sim 0$ 时, $\psi' = 0 \sim \frac{\varphi}{2}$, 此刻产生剪缩。所以

从某种意义上来说, 这两种关于剪胀的表述是一致的。

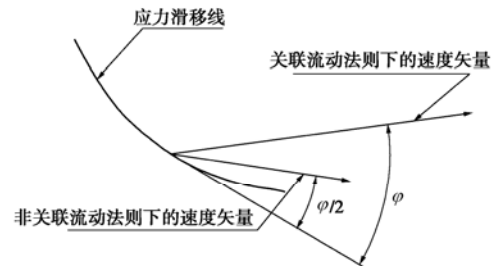


图 2 非关联流动法则下与关联流动法则下的速度矢量方向

Fig. 2 Directions of velocity vectors for associated and non-associated flow rules

2 有限元计算中对剪胀的考虑及平面应变条件下与 M-C 准则精确匹配的广义 Mises 准则

目前国际上流行的许多大型有限元软件, 比如 ANSYS、ABACUS 以及美国 MSC 公司的 MARC、NASTRAN 等均采用了 Drucker-Prager 准则。在 Drucker-Prager 准则中, 通常是应用非关联流动法则来计算中剪胀, 即选用不同于屈服函数的塑性势函数来进行计算, 它在塑性势函数的选择上比较简单, 只是将屈服函数中内摩擦角 φ 用一个剪胀角 ψ 代替, 以此来考虑剪胀的影响, 但是这样的 ψ 没有明显的物理意义, 它只能从一定的程度上反映出材料的剪胀特性, 当 $\psi = \varphi$ 时为关联流动法则, 当 $\psi \neq \varphi$ 时为非关联流动法则。

广义 Mises 准则可以表达为

$$F = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0, \quad (7)$$

式中, I_1 , J_2 分别为应力张量第一不变量和应力偏量第二不变量, α , k 为相关材料参数。

按照岩土塑性理论, 假设塑性势函数 Q 与 F 相似, 同时引入剪胀角参数 a_ψ , 可得

$$Q = a_\psi I_1 + \sqrt{J_2} - k. \quad (8)$$

可得与广义 Mises 准则相联系的非关联流动法则:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda (a_\psi \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}}). \quad (9)$$

在平面应变条件下, 有 $d\varepsilon_z = d\varepsilon_{xz} = d\varepsilon_{yz} = 0$, 如设在

屈服时, 弹性应变不变, 故 $d\varepsilon_z^p = d\varepsilon_{xz}^p = d\varepsilon_{yz}^p = 0$, 从式 (9) 可得: $S_z = -2\alpha_\psi \sqrt{J_2} = S_3$, $S_{xz} = S_{yz} = 0$, $I_1 =$

$$\frac{3}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - 3\alpha_\psi \sqrt{J_2}, \quad J_2 = \frac{\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2}{1 - 3\alpha_\psi^2} = \frac{R_{M-C}^2}{1 - 3\alpha_\psi^2}.$$

代入式 (7) 可得:

$$\frac{3}{2}\alpha_\phi(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{R_{M-C}(1 - 3\alpha_\phi\alpha_\psi)}{\sqrt{1 - 3\alpha_\psi^2}} - k = 0, \quad (10)$$

$$R_{M-C} = \frac{\sqrt{1 - 3\alpha_\psi^2}}{1 - 3\alpha_\phi\alpha_\psi} \left[\frac{-3\alpha_\phi(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + k \right]. \quad (11)$$

在上述推导中, 符号约定以拉为正, 即 σ_x, σ_y 为拉应力, 此处与式 (1) 对应的式 (11) 与 M-C 准则 (2) 相比, 可得:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= 3\alpha_\phi \frac{\sqrt{1 - 3\alpha_\psi^2}}{1 - 3\alpha_\phi\alpha_\psi}, \\ c \cos \varphi &= k \frac{\sqrt{1 - 3\alpha_\psi^2}}{1 - 3\alpha_\phi\alpha_\psi}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

由式 (12) 可得:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_\phi &= \frac{\sin \varphi}{3\sqrt{1 - 3\alpha_\psi^2} + 3\alpha_\psi \sin \varphi}, \\ k &= \frac{c \cos \varphi}{(\sqrt{1 - 3\alpha_\psi^2} + \alpha_\psi \sin \varphi)}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

利用三角代换, 假设 $\alpha_\psi = \frac{\sin t}{\sqrt{3}} \quad (-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2})$, 有 $\alpha_\phi =$

$\frac{\sin \varphi}{3 \cos t + \sqrt{3} \sin t \sin \varphi}$ 。考虑到 $\psi = \varphi$ 时, 有 $\alpha_\psi = \alpha_\phi$, 可得:

$$\frac{\sin t}{\sqrt{3}} = \frac{\sin \psi}{3\sqrt{1 - \sin^2 t} + \sqrt{3} \sin t \sin \psi}, \quad (14)$$

由式 (14) 可解得

$$\frac{\sin t}{\sqrt{3}} = \frac{\tan \psi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \psi}} = a_\psi. \quad (15)$$

这样式 (13)、(15) 便为本文推导得在平面应变条件下的 M-C 准则精确匹配的广义 Mises 准则, 它引入了剪胀角参数 ψ , 能够充分考虑剪胀的影响。该准则在 π 平面上为一系列的同心圆。圆的半径随着 ψ 的变化而变化。当 $\psi = 0$ 时, 有:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_\phi &= \frac{\sin \varphi}{3}, \\ k &= c \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

我们可以知道式 (16) 就是 M-C 匹配 DP 圆准则 (DP5)。而当 $\psi = \varphi$ 时, 有:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_\phi &= \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}, \\ k &= \frac{3c \cos \varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式 (17) 就是 M-C 内切圆准则 (DP3)。另外, 从式 (13)、(15) 可以看出, 随着 ψ 的变化, α_ϕ 及 k 的值都在变化, 这说明与 M-C 准则精确匹配的广义 Mises 准则也随着 ψ 的变化而变化, 它在 π 平面上为一系列的同心圆, 圆的半径 R_ψ 随着 ψ 的变化而变化。

需要指出的是, 此刻 ψ 与前文提及的剪胀角 ν 一致, 下面给出证明。

令塑性势函数

$$Q_1 = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \sin \nu - c \cos \nu, \quad (18a)$$

$$Q_2 = \alpha_\psi I_1 + \sqrt{J_2} - k. \quad (18b)$$

假设以压为正, 有:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= -\frac{3}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - 3\alpha_\psi \sqrt{J_2}, \\ J_2 &= \frac{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}{1 - 3\alpha_\psi^2}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

把式 (18a) 代入式 (18b), 可得:

$$Q_2 = \sqrt{1 - 3\alpha_\psi^2} \left[\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} - \frac{3\alpha_\psi}{\sqrt{1 - 3\alpha_\psi^2}} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{k}{\sqrt{1 - 3\alpha_\psi^2}} \right]. \quad (20)$$

由于 $\alpha_\psi = \frac{\tan \psi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \psi}}$, 代入式 (20), 可得:

$$Q_2 = \sqrt{1 - 3\alpha_\psi^2} \left[\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} - \sin \psi \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{k}{\sqrt{1 - 3\alpha_\psi^2}} \right]. \quad (21)$$

由于 Q_1, Q_2 同为平面应变条件下的塑性势函数, 塑性应变增量的方向应该一致, 比较式 (18a)、(21), 可以发现 $\sin \nu = \sin \psi$, 即 $\nu = \psi$ 。这说明本文推导的在平面应变条件下与 M-C 准则精确匹配的广义 Mises 准则中的剪胀角参数 ψ 有着明显的物理意义, 它与传统的剪胀角 ν 一致, 表示实际塑性应变 ε 与剪切应变 γ 之间的夹角 (图 1)。

3 剪胀对浅基破坏模式的影响^[5]

地基的荷载 - 位移曲线是判断地基 3 种破坏模式

(整体剪切破坏、局部剪切破坏和冲剪破坏) 的重要根据, ψ 作为一个土性参数, 它引入使得有限元计算能够考虑剪胀剪缩 ($\psi > 0$ 时考虑剪胀, $\psi < 0$ 时考虑剪缩, $\psi = 0$ 不考虑体积变化) 等对地基破坏的影响。

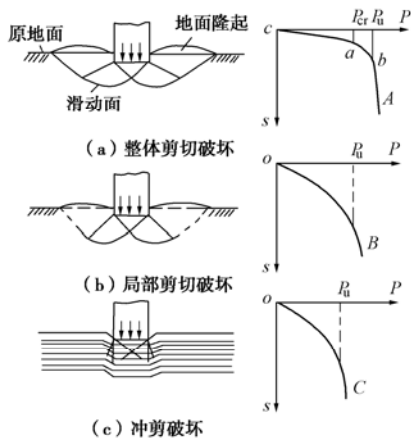


图 3 地基的破坏型式

Fig. 3 Failure modes of shallow foundations

在基底压力作用下, 地基的破坏形式有整体剪切破坏、局部剪切破坏和冲剪破坏 3 种。整体剪切破坏的特征: 当基础荷载较小时, 基底压力 p 与沉降 s 基本上成直线关系, 如图 3 (a) 右侧 A 曲线的 oa 段, 属于线性变形阶段; 当荷载增加到某一数值时, 基础边缘的土开始发生剪切破坏, 随着荷载的增加, 剪切破坏区逐渐扩大, 这时压力 p 与沉降 s 成曲线关系, 如图 3 (a) 右侧 A 曲线的 ab 段, 属于弹塑性变形阶段; 如果荷载继续增加, 剪切破坏区不断扩大, 最终在地基中形成连续的滑动面, 基础急剧下沉, 同时基础两侧的地面隆起, 地基发生整体剪切破坏。局部破坏虽然基底也形成了明显的破坏区并且地面向上微微隆起, 但没能形成延伸值至地面的连续滑动面, 其压力 - 沉降关系从一开始就呈现非线性关系而且没有明显的拐点, 如图 3 (b) 右侧 B 曲线。冲剪破坏先是由于基础下软弱土的压缩变形使基础连续下沉, 如荷载继续增加到某一数值时, 基础可能向下“切入”土中, 基础侧面附近的土体因垂直剪切而破坏, 如图 3 (c) 所示。冲剪破坏时, 地基中没有出现明显的连续滑动面, 基础四周的地面不隆起, 其压力 - 沉降关系与局部剪切破坏情况类似, 不出现明显的转折现象, 如图 3 (c) 右侧 C 曲线。

本文不考虑土重, 利用本文推导的在平面应变条件下的 M-C 准则精确匹配的广义 Mises 准则对条形地基的破坏型式进行有限元数值模拟, 其中 $\varphi = 20^\circ$, ψ 分别为 20° , 0° 及 -15° 。

图 4 为不同 ψ 时地基的 $p-s$ 曲线。当 $\psi = 20^\circ$ 时, $p-s$ 曲线在塑性阶段存在明显的拐点, 这与图 3 (a)

相似, 此刻地基破坏属于整体剪切破坏; 当 $\psi = 0^\circ$ 时, $p-s$ 曲线在塑性阶段不存在明显的拐点, 这与图 3 (b) 相似, 此刻地基破坏倾向于局部剪切破坏; $\psi = -15^\circ$ 时, $p-s$ 曲线在塑性阶段与图 3 (c) 相似, 此刻地基破坏倾向于冲剪破坏。

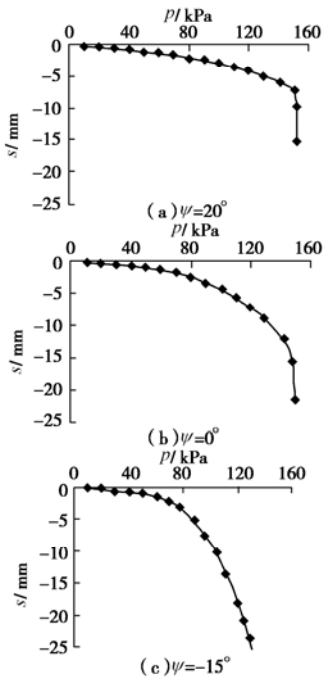


图 4 不同 ψ 时地基的 $p-s$ 曲线

Fig. 4 Curves of foundation for different ψ

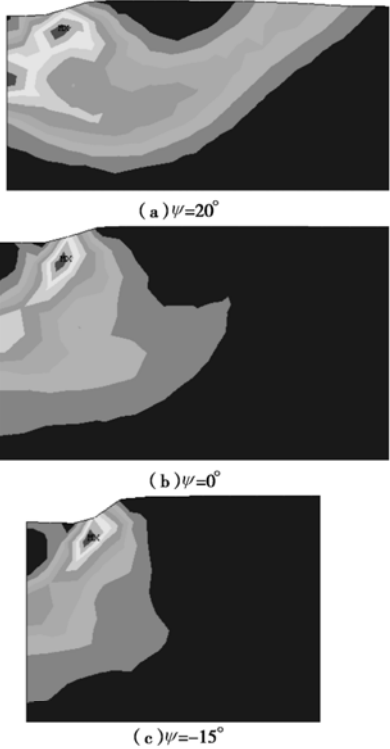


图 5 不同 ψ 时地基极限状态塑性区示意图

Fig. 5 Plastic zones of foundation in the limit status for different ψ

图5为不同 ψ 时地基极限状态塑性区示意图。当 $\psi = 20^\circ$ 时,剪切破坏区在地基中形成了连续的滑动面,这与图3(a)相似,此刻地基破坏属于整体剪切破坏;当 $\psi = 0^\circ$ 时,基底形成了明显的破坏区并且地面向上微微隆起,但没能形成延伸值至地面的连续滑动面,这与图3(b)相似,此刻地基破坏倾向于局部剪切破坏; $\psi = -15^\circ$ 时,地基中没有出现明显的连续滑动面,基础四周的地面不隆起,这与图3(c)相似,此刻地基破坏倾向于冲剪破坏。

4 结 论

(1) 本文阐明了滑移线场理论中有关剪胀的描述,给出了剪胀角 ν (实际塑性应变 ε 与剪切应变 γ 之间的夹角)与膨胀角 ψ' (破坏面与速度矢量方向的夹角)的关系式($\psi' = \varphi + \nu/2$)。

(2) 推导了平面应变条件下考虑剪胀角 ψ 影响并与Mohr-Coulomb准则精确匹配的广义Mises准则,此刻剪胀角 ψ 有明确的物理意义,它与传统的剪胀角 ν 一致($\nu = \psi$),这样在有限元计算过程中可以方便地考虑剪胀角的影响。

(3) 对于条形浅基,剪胀对地基破坏模式有明显的影响,当内摩擦角较大时,随着 ψ 的由大到小,地基由整体破坏型式逐渐过渡到局部剪切破坏型式及冲剪破坏型式。

(4) 对不同类型的岩土材料, ψ 如何通过试验确定,需做进一步的研究。

参考文献:

[1] 张鲁渝,时卫民,郑颖人. 平面应变条件下土坡稳定有限

元分析[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(4): 487 - 490. (ZHANG Lu-yu, SHI Wei-ming, ZHENG Ying-ren. The slope stability analysis by FEM under plane strain conditions[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(4): 487 - 490. (in Chinese))

[2] 郑颖人,沈珠江,龚晓南. 广义塑性力学—岩土塑性力学原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002. (ZHENG Ying-ren, SHEN Zhu-jiang, GONG Xiao-nan. Generalized plastic mechanics—the principles of geotechnical plastic mechanics[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2002. (in Chinese))

[3] 张学言. 岩土塑性力学[M]. 北京: 人民交通出版社, 1993. (ZHANG Xue-yan. Geotechnical plastic mechanics[M]. Beijing: China Communications Press, 1993. (in Chinese))

[4] 孔位学,邓楚键,芮勇勤,等. 滑移线场理论中不同流动法则的极限分析有限元解[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2007, 28(3): 430 - 433, 453. (KONG Wei-xue, DENG Chu-jian, RUI Yong-qin, et al. FEM analysis of associated and non-associated flow rules in theory of slip line field[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 2007, 28(3): 430 - 433, 453. (in Chinese))

[5] 邓楚键. 有限元极限法及其在地基工程中的应用[D]. 重庆: 后勤工程学院, 2007. (DENG Chu-jian. Finite element limit analysis method and its application in foundation engineering[D]. Chongqing: Logistical Engineering University, 2007. (in Chinese))