

平面应变状态下砂土剪切带分析

齐德瑄¹, 张义同¹, 任述光²

(1. 天津大学机械工程学院, 天津 300072; 2. 湖南农业大学工程技术学院, 湖南 长沙 410128)

摘要: 提出一种砂土剪切带的两相平衡模型, 此模型可看作一种新颖的分岔解。把剪切带考虑作高应变相, 剪切带外部其它区域考虑作低应变相。在跨越两相界面处, 考虑了变形梯度和应力的不连续性, 以及拖曳力和位移的连续性, 并且强加了 Maxwell 关系。推导出砂土在平面应变载荷下的控制方程, 并且此分析归结为寻找使控制方程得到唯一一组物理上可以接受的实数解的载荷的最小值。Maxwell 应力、剪切带内部和外部的应力应变、剪切带倾角等均可确定, 并与实验所观察到的结果相一致。

关键词: 砂土; 应变局部化; 剪切带; 应力导致的相变; Drucker-Prager 本构模型

中图分类号: TU452

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2009)07-1014-06

作者简介: 齐德瑄(1983-), 女, 天津市人, 博士研究生, 从事固体力学研究。E-mail: dxqi@tju.edu.cn。

Analysis of shear band in sand under plane strain state

QI De-xuan¹, ZHANG Yi-tong¹, REN Shu-guang²

(1. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China; 2. College of Engineering and Technology, Hunan

Agricultural University, Hunan, 410128, China)

Abstract: A model of two-phase equilibrium for shear bands in sand is suggested in this paper, which may be viewed as a novel bifurcation solution. The shear bands are considered as a high-strain phase and the other regions outside shear bands as a low-strain phase. Across interfaces between two phases, discontinuity of deformation gradient and stress is considered, and continuity of traction and displacements and the Maxwell relation are imposed. Governing equations for sand under plane strain loading are deduced, and the analysis is reduced to finding the minimum value of the loading at which the governing equations have a unique, real, physically acceptable solution. The Maxwell stress, the stresses and strains inside and outside the shear band, and the shear band orientation angle are determined, which are in good agreement with the experimental observations.

Key words: sand; strain localization; shear band; stress-induced phase transformation; Drucker-Prager constitutive model

0 引言

砂土应变局部化研究已有较长的历史, 较早的文献见 Roscoe^[1]和 Arthur 等^[2], 其发展历史和近年来进展见综述文献 Desrues 等^[3]和其中的文献。对砂土应变局部化的研究, 大量的工作是实验工作, 特别是平面应变下砂土应变局部化的研究。对这种局部化的应变, 有的称为剪切带, 有的称为折曲带(Kink bands), 本文中采用剪切带的名称。最近 Alshibli 等^[4]报道了砂土在平面应变下剪切带实验。在实验工作的同时, 对砂土剪切带的理论分析也进行了相应的工作, 一般把剪切带看作分岔问题, 见文献[5, 6]。

本文给出砂土剪切带分析的相变理论模型。在这个模型下, 剪切带被看作是材料的高应变相(塑性相), 而剪切带以外的区域则还处于弹性状态; 允许在跨越剪切带和周围区域界面处出现变形梯度和应力的不连续;

强加了跨越剪切带和周围区域界面处力和位移的连续性以及相变Maxwell关系。第一节中将就简单的一维问题, 说明对于应变软化材料两相共存的解可以看作是相对单相解的一个分岔解, 并且比单相解稳定。但是相变分析和分岔分析的方法不同, 也要困难许多。已有充分的实验资料显示, 出现剪切带的砂土表现了明显的应变软化行为, 例如, 见Alshibli 等^[4]中的砂土应变软化实验曲线。关于有应变软化行为的弹塑性材料可出现两相共存的理论基础见Zhang等^[7-8]。

1 一维问题的两相解

考虑长 L 的杆, 它的单向拉压曲线如图 1, 由弹性段、软化段、塑性硬化段组成。为叙述简单, 取硬

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973)资助(2007CB714001)

收稿日期: 2008-05-15

化模量和弹性模量相同, 均为 η 。杆的左端在坐标原点固定, 杆轴线上一点坐标为 x , 右端施加位移 δ 。

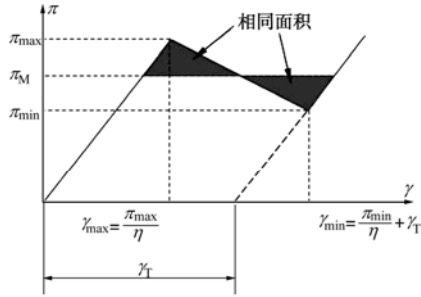


图1 一维杆拉伸的应力应变曲线

Fig. 1 Stress-strain curve under tension in bars

可以得到:

(1) 解一: 当 $-1 < \frac{\delta}{L} < \frac{\pi_{\max}}{\eta}$ (即 $-1 < \gamma < \gamma_{\max}$),

杆件全部处于弹性, 有单相弹性解:

$$\left. \begin{aligned} \gamma(x) &= \frac{\delta}{L}, \\ \pi(x) &= \eta \frac{\delta}{L}, \\ u(x) &= \frac{\delta}{L} x \quad (0 < x < L), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, γ 为应变, π 为应力, u 为位移, $\pi_{\max}$, $\pi_{\min}$, $\gamma_{\max}$, $\gamma_{\min}$ 见图1。

(2) 解二: 当 $\frac{\delta}{L} > \frac{\pi_{\min}}{\eta} + \gamma_T$ (即 $\gamma > \gamma_{\min}$, 其中

$\gamma_T = \gamma_{\min} - \frac{\pi_{\min}}{\eta}$), 杆件全部进入塑性, 有单相塑性解:

$$\left. \begin{aligned} \gamma(x) &= \frac{\delta}{L}, \\ \pi(x) &= \eta \left(\frac{\delta}{L} - \gamma_T \right), \\ u(x) &= \frac{\delta}{L} x \quad (0 < x < L). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(3) 解三: 当 $\frac{\pi_{\max}}{\eta} \leq \frac{\delta}{L} \leq \frac{\pi_{\min}}{\eta} + \gamma_T$ (即 $\gamma_{\max} \leq$

$\gamma \leq \gamma_{\min}$) 时, 我们也可以找到一个和材料软化段对应的单相解, 但它是不稳定的。由相变理论可以得到一个两相解, 设两相的界面在 $x=s$ 处, $x < s$ 段为塑性相, $x > s$ 段为弹性相, 两相解为

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma^+ = \frac{\pi_M}{\eta} + \gamma_T & (0 < x < s) \\ \gamma^- = \frac{\pi_M}{\eta} & (s < x < L) \end{cases}, \quad (3)$$

$$u(x) = \begin{cases} \gamma^+ x & (0 < x < s) \\ \gamma^- x + (\gamma^+ - \gamma^-) s & (s < x < L) \end{cases}, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \pi(x) &= \pi_M, \\ 0 < x < L, \\ s &= \left(\frac{\delta}{L} - \frac{\pi_M}{\eta} \right) \frac{L}{\gamma_T} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中, π_M 是 Maxwell 应力, 即图1中的水平直线, 它等分图1中两个三角形的面积, 上角标“+”和“-”分别表示塑性相和弹性相的解。上述求解的详细过程可以在文献[9, 10]中看到。

由方程(5), 当 $s=0$ 有 $\frac{\delta}{L} = \frac{\pi_M}{\eta}$; 当 $s=L$ 有

$\frac{\delta}{L} = \frac{\pi_M}{\eta} + \gamma_T$, 这样,

$$\frac{\pi_M}{\eta} \leq \frac{\delta}{L} \leq \frac{\pi_M}{\eta} + \gamma_T. \quad (6)$$

式(6)成立时两相解存在。值得注意的是, 由式(6)给出的区间 $[\frac{\pi_M}{\eta}, \frac{\pi_M}{\eta} + \gamma_T]$ 比讨论两相解开始时设定

的区间 $[\frac{\pi_{\max}}{\eta}, \frac{\pi_{\min}}{\eta} + \gamma_T]$ 更大(见图1)。这当

$\frac{\delta}{L} \in (\frac{\pi_M}{\eta}, \frac{\pi_{\max}}{\eta})$ 时, 有解一和解三; 当

$\frac{\delta}{L} \in (\frac{\pi_{\min}}{\eta} + \gamma_T, \frac{\pi_M}{\eta} + \gamma_T)$ 时有解二和解三。这也就是

说, 在这两个区间内解出现了分岔。那么哪一个更稳定呢? 分别计算它们对应的应变能, 容易得到

$$E_1 = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\delta}{L} \right)^2, \quad (7)$$

$$E_2 = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\delta}{L} - \gamma_T \right)^2 + \pi_M \gamma_T, \quad (8)$$

$$E_3 = -\frac{\pi_M^2}{2\eta} + \pi_M \frac{\delta}{L}, \quad (9)$$

而它们的差

$$E_3 - E_1 = -\frac{\eta}{2} \left(\frac{\delta}{L} - \frac{\pi_M}{\eta} \right)^2 \leq 0, \quad (10)$$

$$E_3 - E_2 = -\frac{\eta}{2} \left(\frac{\delta}{L} - \gamma_T - \frac{\pi_M}{\eta} \right)^2 \leq 0. \quad (11)$$

这就是说, 两相解总是有较少的应变能, 所以, 从分岔的意义上讲, 在这两个小区间内, 两相解是一个稳定的分岔解。但是, 相变分析和传统的分岔分析是很不同的, 寻找一个两相解比寻找一个分岔解在许多情况下困难的多。本文寻找砂土在平面应变下的两相解, 它对砂土中出现的局部变形带给出了满意的物理描述和预测。

2 相变控制方程

本文对参考构型和变形构型采用同一个笛卡尔直角坐标系。变形体中在参考构型下坐标为 (X_1, X_2, X_3) 的质点, 在变形构型下其坐标记为 (x_1, x_2, x_3) 。变形梯度的张量形式为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}, \\ F_{iA} &= x_{i,A}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

当材料发生应力的导致的相变后, 在同一材料不同的相之间, 存在相变的分界面。该分界面将变形体分为两相: “+”相和“-”相, 跨越相变界面应力、应变、应力功等发生跳跃。函数 f 跨越该界面的跳跃定义为

$$[f] = f^+ - f^-, \quad (13)$$

式中, “-”与“+”分别表示在“-”相和“+”相内的取值。为避免使用重复上标, 在同时有其他上标出现的时候, “-”或“+”将标为下标。例如, $\mathbf{F}_+^T$ 表示 $\mathbf{F}^+$ 的转置。当界面处的场变量无下标的时候, 意味着该变量可以在界面的任意一侧取值。在本文分析中, 用“-”相和“+”相分别表示弹性相和塑性相。

多相平衡要求在分界面以外的区域满足如下平衡方程(无体积力情况下):

$$\left. \begin{aligned} \text{Div } \boldsymbol{\pi}^T &= 0, \\ \pi_{iA,A} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

这里 Div 为参考构形中的散度算子, $\boldsymbol{\pi}$ 为第一 Piola-Kirchhoff 应力张量。

跨越相变界面的跳跃条件为

$$[\boldsymbol{\pi}] \mathbf{N} = 0, [\pi_{iA}] N_A = 0, \quad (15)$$

$$[W] - \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\pi} \mathbf{N} = 0, [W] - f_i \pi_{iB} N_B = 0, \quad (16)$$

式中, $\mathbf{N} = [N_1, N_2, N_3]^T$ 为初始构形中垂直于相变界面的单位向量, 其方向从“+”相指向“-”相, W 为应力功函数, 满足

$$\frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial E_{AB}} = T_{AB}, \quad (17)$$

式中, T_{AB} 和 E_{AB} 分别是第二 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\mathbf{T}$ 和 Green 应变张量 $\mathbf{E}$ 的分量, $\mathbf{f}$ 的定义为

$$\mathbf{f} = [\mathbf{F}] \mathbf{N}. \quad (18)$$

跨越相变界面的位移必须是连续的, 这意味着跳跃函数 $[\mathbf{F}]$ 可写为

$$[\mathbf{F}] = \mathbf{f} \otimes \mathbf{N}, \quad (19)$$

式中, $\otimes$ 表示张量积。

对于分片均匀变形, 平衡方程(14)自然满足。相变只有在跳跃条件(15)、(16)满足时才会发生。跳跃条件(16)被称为 Maxwell 关系, 它表示 Eshelby

力在跨越两相界面处的连续性。

3 大变形下砂土的 Drucker-Prager 本构模型

Drucker-Prager 模型的屈服准则^[11]采用广义的 von Mises 屈服准则, 其表达式为

$$F = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0, \quad (20)$$

其中在平面应变状态下

$$\alpha = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3} \sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}, \quad (21)$$

$$k = \frac{\sqrt{3} c \cos \varphi}{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}, \quad (22)$$

式中, c 为黏聚力, φ 为内摩擦角。广义 von Mises 屈服准则在主应力空间中, 屈服面形状为一圆锥面, I_1 和 J_2 分别为应力张量第一不变量和应力偏张量第二不变量。

增量形式的弹塑性本构方程为

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{L}^{\text{ep}} \dot{\mathbf{E}}, \quad (23)$$

式中, $\mathbf{L}^{\text{ep}}$ 为四阶弹塑性刚度张量, 对加载情形其分量形式为

$$L_{ijkl}^{\text{ep}} = L_{ijkl} - \frac{L_{ijpq} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{rs}} L_{rskl}}{A + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} L_{mnuv} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{uv}}}, \quad (24)$$

式中, L_{ijkl} 为四阶弹性刚度张量, g 是塑性势函数, F 为屈服函数, A 为硬化函数。

对于四阶弹性刚度张量 $\mathbf{L}$,

$$\mathbf{L} = 2G \bar{\mathbf{I}} + K \delta \delta, \quad (25)$$

式中, G 为弹性剪切模量, K 为体积模量, δ_{ij} 为 Kronecker δ 符号, $\bar{\mathbf{I}}$ 为四阶特殊等同张量, 其分量形式为

$$\bar{I}_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}. \quad (26)$$

并且

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{L} \mathbf{E}, \\ T_{AB} &= L_{ABCD} E_{CD}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式(27)的逆形式为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{M} \mathbf{T}, \\ E_{AB} &= M_{ABCD} T_{CD}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

其中 $\mathbf{M}$ 为四阶弹性柔度张量, 其形式为

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2G} \bar{\mathbf{I}} + \frac{1}{9K} \delta \delta. \quad (29)$$

可以用不同的硬化规律来确定 A 的数值, 本文采用塑性体应变硬化定律, 那么硬化参数

$$H = H(\varepsilon_v^p) = \varepsilon_v^p, \quad (30)$$

由于 $d\phi = 0$, 得

$$A = -\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial \varepsilon_v^p}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p} \delta_{ij} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (31)$$

$$A = -\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial g}{\partial p}. \quad (32)$$

采用相关联流动法则, 塑性势函数与屈服函数相同, 整理式 (24) 得弹塑性刚度张量的分量形式为

$$L_{ijkl}^{\text{ep}} = L_{ijkl} - \frac{G \frac{1}{\sqrt{J_2}} s_{ij} + 3\alpha K \delta_{ij}}{9K\alpha^2 + G + A} \left(\frac{G}{\sqrt{J_2}} s_{kl} + 3K\alpha \delta_{kl} \right). \quad (33)$$

式中, s_{ij} 为应力偏量的分量, 且 $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ 。

4 平面应变剪切带分析

砂土在平面应变状态下变形示意图如图 2 所示, 剪切带是局部塑性变形状态, 剪切带以外其余部分为纯弹性状态。

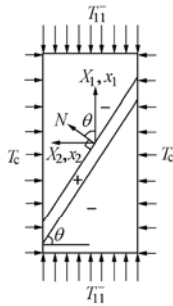


图 2 平面应变状态下的砂土剪切带

Fig. 2 Shear band in sand under plane strain condition

4.1 剪切带外部

剪切带外部始终处于弹性状态, 其应力场与应变场是均匀的, 分别记作 $\mathbf{T}^-$ 和 $\mathbf{E}^-$, 其形式为

$$\mathbf{T}^- = \begin{bmatrix} T_{11}^- & 0 & 0 \\ 0 & T_c & 0 \\ 0 & 0 & \mu(T_{11}^- + T_c) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$\mathbf{E}^- = \mathbf{M} \mathbf{T}^- = \begin{bmatrix} -\frac{T_{11}^- + \mu T_c + \mu^2 T_{11}^- + \mu^2 T_c}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu T_{11}^- - T_c + \mu^2 T_{11}^- + \mu^2 T_c}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

式中, μ 为泊松比, E 为弹性模量。

弹性相变形梯度为

$$\mathbf{F}^- = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{1 + 2E_{11}^-} \\ \lambda_2 &= \sqrt{1 + 2E_{22}^-} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

相应的第一 $P-K$ 应力张量为

$$\pi^- = \mathbf{F}^- (\mathbf{T}^-)^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 T_{11}^- & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 T_c & 0 \\ 0 & 0 & \mu(T_{11}^- + T_c) \end{bmatrix}, \quad (38)$$

应力功为

$$W^- = \frac{1}{2} \mathbf{E}^- \mathbf{L} \mathbf{E}^-. \quad (39)$$

4.2 上下屈服点

将上屈服点和下屈服点的应力记为 $\mathbf{T}^{yU}$ 和 $\mathbf{T}^{yL}$, 其形式为

$$\mathbf{T}^{yU} = \begin{bmatrix} S^{yU} & 0 & 0 \\ 0 & T_c & 0 \\ 0 & 0 & \mu(S^{yU} + T_c) \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$\mathbf{T}^{yL} = \begin{bmatrix} S^{yL} & 0 & 0 \\ 0 & T_c & 0 \\ 0 & 0 & \mu(S^{yL} + T_c) \end{bmatrix}, \quad (41)$$

式中, S^{yU} 和 S^{yL} 分别是压缩方向应力-轴向应变曲线上的上屈服应力与下屈服应力。

相应的上屈服点和下屈服点的应变记为 $\mathbf{E}^{yU}$ 和 $\mathbf{E}^{yL}$, 其形式分别为

$$\mathbf{E}^{yU} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{yU} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_v^{yU} - \varepsilon^{yU} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (42)$$

$$\mathbf{E}^{yL} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{yL} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_v^{yL} - \varepsilon^{yL} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

式中, ε^{yU} 和 ε^{yL} 分别为压缩方向应力-轴向应变曲线上的上屈服应变与下屈服应变, ε_v^{yU} 和 ε_v^{yL} 体积应变-轴向应变曲线上与上屈服点和下屈服点对应的上屈服体积应变以及下屈服体积应变。

4.3 剪切带内部

对于如图 2 所示的平面应变状态, 可以设

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N} &= [N_1, N_2, 0]^T, \\ \mathbf{f} &= [f_1, f_2, 0]^T. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

借助式 (19), $[\mathbf{F}]$ 可写为

$$[F] = \begin{bmatrix} f_1 N_1 & f_1 N_2 & 0 \\ f_2 N_1 & f_2 N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

遂有

$$F^+ = F^- + [F]. \quad (46)$$

于是, 应变率张量有如下形式

$$\dot{E} = E^+ - E^{yL}, \quad (47)$$

式中, $E^+ = \frac{1}{2}(F_+^T F_+ - I)$ 。

将式(47)代入式(23)可以得到 $\dot{T}$, 由此得到

$$T^+ = T^{yL} + \dot{T}, \quad (48)$$

以及

$$[\pi] = F^+ T^+ - \pi^-. \quad (49)$$

对于线性弹性-线性应变软化-线性硬化材料, 借助于式(40)~(43)、(47)、(23)以及

$$W = \int_0^E T dE, \quad (50)$$

可得弹塑性相应力功函数为

$$W^+ = \frac{1}{2} T_{AB}^{yU} E_{AB}^{yU} + \frac{1}{2} (T_{AB}^{yU} + T_{AB}^{yL}) (E_{AB}^{yL} - E_{AB}^{yU}) + T_{AB}^{yL} \dot{E}_{AB} + \frac{1}{2} \dot{T}_{AB} \dot{E}_{AB}. \quad (51)$$

将式(44)、(49)代入跳跃条件式(15), 将式(38)、(44)、(39)、(51)代入 Maxwell 关系(16), 得到

$$q_1(T_{11}^-, f_1, f_2, N_1, N_2) = 0, \quad (52)$$

$$q_2(T_{11}^-, f_1, f_2, N_1, N_2) = 0, \quad (53)$$

$$q_3(T_{11}^-, f_1, f_2, N_1, N_2) = 0. \quad (54)$$

至此, 剪切带分析归结为寻求 $|T_{11}^-|$ 的最小值, 在该最小值下, 方程(52)~(54)以及

$$N_1^2 + N_2^2 = 1, \quad (55)$$

所组成的方程组有一个关于 $[N_1, N_2, f_1, f_2]^T$ 的实数解。此实数解还必须是物理上可接受的。比如当 $T_{11}^- < 0$ 时, 对 $N_1 > 0, N_2 > 0$ 的情形, 必须有 $f_1 < 0$ 且 $f_2 > 0$, 以保证 $[E_{11}] < 0$ 及 $[E_{22}] > 0$, 也就是说, 处于剪切带内的材料应该进一步被压缩。

方程组(52)~(54)是非线性的, 表达式冗长, 只能求出数值解。用 Maple 和 PHC (Polynomial Homotopy Continuation 多项式的同伦延拓) 的软件包可以建立和求解此方程组。Maple 大家都知道, 而 PHC 对于多项式系统的特殊软件包。同伦延拓法用于计算所有实数或虚数的孤立解的近似解的可靠有力方法。

5 数值结果

在平面应变压缩试验中, K. Alshibli 和 S. Sture 使用富含石英的砂土作为模型材料, 为观测模型的表面变形, 将一层厚度为 0.3 mm 橡胶薄膜贴在模型表面, 使

用一种特殊的黑色橡胶墨水, 在薄膜上画上 0.5 mm 线宽、5 mm×5 mm 大小的方形栅格, 整个网格大小为 120 mm×180 mm, 图 3 为摄像机拍摄的剪切带发生前后的模型照片^[4]。其中, 标号为 M3 的砂土主应力比一轴向应变曲线以及体积应变-轴向应变曲线如图 4 所示(主应力比即 σ_1/σ_2 等于本文中的 T_{11}/T_c)。M3 砂土泊松比 $\mu = 0.27$, 内摩擦角 $\varphi = 61.8^\circ$, 围压 $T_c = -15$ kPa。对应于图 4 中与 M3 相关的曲线, 上屈服点应力、应变、体积应变分别为 $S^{yU} = -239.25$ kPa, $\varepsilon^{yU} = -0.04$, $\varepsilon_v^{yU} = 0.03$, 下屈服点应力、应变、体积应变分别为 $S^{yL} = -135$ kPa, $\varepsilon^{yL} = -0.071$, $\varepsilon_v^{yL} = 0.045$, 弹性模量 $E = 5981.250$ kPa。

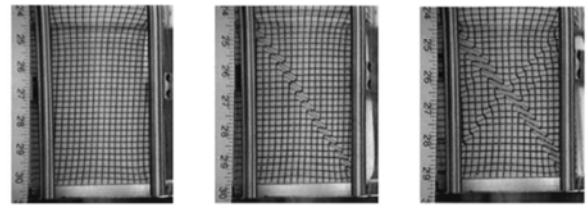


图 3 土体剪切带识别的描画网格法

Fig. 3 Investigation of shear band by drawing grid on specimen

借助于 Maple 语言建立方程, 程序中用 Tm11 代替 T_{11}^- , 方程(52)~(54)仍然冗长。PHC 软件包可以解方程组(52)~(55), 在求解过程中, 对于本算例 $T_{11}^- < 0$ 的情况, 如果 $[N_1, N_2, f_1, f_2]^T$ 是实数解, 那么 $[-N_1, N_2, -f_1, f_2]^T$ 、 $[N_1, -N_2, f_1, -f_2]^T$ 、 $[-N_1, -N_2, -f_1, -f_2]^T$ 也都是实数解, 换句话说就是方程组实数解的数目是以 4 的倍数出现的。后面的三组解都可从第一个解中通过刚体旋转得到, 不失一般性, 在以后的分析中我们将只考虑满足条件 $N_1 > 0, N_2 > 0, f_1 < 0, f_2 > 0$ 的一组解。

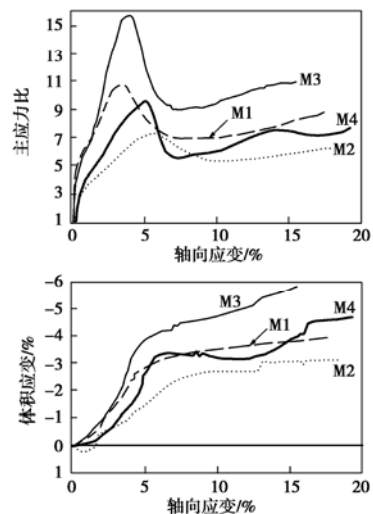


图 4 砂土主应力比-轴向应变曲线以及体积应变-轴向应变曲线

Fig. 4 Principal stress ratio versus axial strain and volumetric strain versus axial strain responses for sand specimens

此方程组由包含 5 个未知数的 4 个方程组成。解此方程就要不断改变 T_{11}^- 的数值, 使其在上下屈服极限之间变化。当 T_{11}^- 的值变化时, 实数解的个数亦随之发生变化。 f_1 , f_2 和 N_1 会在 T_{11}^- 的取值范围内发生一个跳跃, 该点称为跳跃点。当 $|T_{11}^-|$ 小于跳跃点处对应的值时, 方程组无实数解; 当 $|T_{11}^-|$ 大于跳跃点处对应的值时, 方程组至少有两组物理上可接受的实数解。该方程组一定存在一组唯一的、物理上可以接受的实数解, 那么, 跳跃点处的 T_{11}^- 值就是我们要寻找的 $|T_{11}^-|$ 的最小值, 在该最小值下, 方程组有一个关于 $[N_1, N_2, f_1, f_2]^T$ 的物理上可以接受的实数解。

当取 $|T_{11}^-| < 172$ 时, 得不到实数解, 当取 $|T_{11}^-| > 173$ 时, 得到两组物理上可以接受的实数解。当 $T_{11}^- = -172.056$ kPa 时, 最终得到唯一一组物理上可以接受的实数解为

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.569738747099172 \\ 0.821825869666966 \\ -0.111932613748531 \\ 0.135619481655784 \end{Bmatrix}。 \quad (56)$$

于是, 我们得到 Maxwell 应力

$$\pi^- = \begin{bmatrix} -167.556 & 0 & 0 \\ 0 & -15.11 & 0 \\ 0 & 0 & -50.505 \end{bmatrix}, \quad (57)$$

此时剪切带内部应力和应变为

$$\pi^+ = \begin{bmatrix} -177.247 & 6.71843 & 0 \\ -7.77123 & -9.72517 & 0 \\ 0 & 0 & -89.4779 \end{bmatrix}, \quad (58)$$

$$E^+ = \begin{bmatrix} -0.0828949 & 0.00137138 & 0 \\ 0.00137138 & 0.122735 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。 \quad (59)$$

可以确定剪切带倾角

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{N_2}{N_1} \right) = 55.26^\circ, \quad (60)$$

此结果与实验中测得的剪切带倾角 55° 相吻合, 仅有 0.47% 的误差。

6 结 语

本文通过建立应力导致的相变模型研究砂土平面应变下变形局部化问题。将该问题归结为解一个强非线性方程组, 该方程组来源于跨越相变界面的跳跃条件。提出一种求解该方程组的计算方案, 并给出算例。

求解过程表明变形局部化显然发生在有应变软化行为的弹塑性连续体上, 并可得到唯一一组物理上可以接受的实数解。Maxwell 应力、剪切带内部和外部的应力应变、剪切带倾角都可以确定, 并与实验相吻合。

参考文献:

- [1] ROSCOE K H. The influence of strains in soil mechanics[J]. Geotechnique, 1970, 20(2): 129 - 170.
- [2] ARTHUR J F R, DUNSTAN T, AL-ANI Q A J, ASSADI A. Plastic deformation and failure in granular media[J]. Geotechnique, 1977, 27(1): 53 - 74.
- [3] DESRUES J, VIGGIANI G. Strain localization in sand: an overview of the experimental results obtained in Grenoble using stereophotogrammetry[J]. Int J Numer Anal Meth Geomech, 2004, 28: 279 - 321.
- [4] ALSHIBLI K A, STURE S. Shear band formation in plane strain experiments of sand[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2000, 126(6): 495 - 503.
- [5] VARDOULAKIS I, SULEM J. Bifurcation analysis in geomechanics[M]. London: Blackie Academic and Professional, 1995.
- [6] LABUZ J, DRESCHER A. Bifurcations and instabilities in geomechanics[C]// Lisse: Swets & Zeitlinger Publishers, 2003.
- [7] ZHANG Y T, REN S G, AO T. Elastoplastic modeling of materials supporting multiphase deformations[J]. Materials Science and Engineering A, 2007, 447: 332 - 340.
- [8] ZHANG Y T, QIAO J L, AO T. Strain softening of materials and Lüders-type deformations[J]. Modeling and Simulation in Materials Science and Engineering. 2007. 15: 147 - 156.
- [9] ERICKSEN J L. Equilibrium of bars[J]. Journal of Elasticity, 1975, 5: 191 - 201.
- [10] ABEYARATNE R, BHATTACHARYA K, KNOWLES J K. Nonlinear elasticity theory and applications[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001: 433 - 490.
- [11] 郑颖人, 沈珠江, 龚晓南. 岩土塑性力学原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002. (ZHENG Ying-ren, SHEN Zhu-jiang, GONG Xiao-nan. The principles of geotechnical plastic mechanics[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2002. (in Chinese))