



考虑水平摩阻力的弹性地基梁非线性分析

赵明华, 张 玲, 马宾辉, 赵 衡

(湖南大学岩土工程研究所, 湖南 长沙 410082)

摘 要: 基于传统文克尔弹性地基梁理论, 考虑梁土间的摩阻效应、梁的纵横向变形耦合及变形的几何非线性, 建立出相应的弹性地基梁挠曲变形控制微分方程。引入 Galerkin 法, 导出了对称荷载作用下有限长梁的挠曲变形、转角、剪力及弯矩的非线性解析解。在此基础上, 分析探讨了外加荷载、地基梁刚度、梁与土体之间的水平摩阻力、竖向地基反力系数等因素对地基梁位移及内力的影响。分析结果表明: 水平摩阻力并不影响地基梁位移及内力的整体变化发展趋势, 但将导致地基梁位移及内力值的降低, 且水平摩阻力越大, 其对地基梁位移及内力的影响也就越大, 此外, 当地基梁抗弯刚度越大, 水平摩阻力对梁位移及内力的影响反而越小。

关键词: 弹性地基梁; 水平摩阻力; 变形耦合; 非线性分析; Galerkin 法

中图分类号: TU473.1

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2009)07-0985-06

作者简介: 赵明华(1956-), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事桩基础及软土处理方面的研究工作。E-mail: mhzhaohd@yahoo.com。

Nonlinear analysis of beams on elastic foundation with consideration of horizontal resistance

ZHAO Ming-hua, ZHANG Ling, MA Bin-hui, ZHAO Heng

(Geotechnical Engineering Institute, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: Considering the interface resistance between beam and foundation soil, the longitudinal and transversal coupling-deformation and the nonlinear characteristics of the deformation of the beam, a deformation control differential equation is established based on the Winkler elastic foundation model. The corresponding analytical solutions for the deformation, rotation angle, shear force and moment of the finite-length under symmetric loads are presented using the Galerkin method. In addition, the influences of the load, flexural rigidity, interface resistance and vertical coefficient of subgrade on the behaviors of foundation beams are investigated. The analytic results illustrate that the horizontal resistance has no effect on the change trends of the internal force and deformation of the foundation beams, but has a great effect on the values of them. The larger the horizontal resistance is, the greater the effect of resistance acting on the foundation beam is. Moreover, when the flexural rigidity of the foundation beams is larger, the effects of the horizontal resistance on the behaviors of the foundation beams are smaller.

Key words: beam on elastic foundation; horizontal resistance; deformation-coupling; nonlinear analysis; Galerkin method

0 前 言

文克尔弹性地基模型由于其概念明确、计算简单而广泛应用于工程实际, 然而人们在运用该模型对地基梁进行设计计算时, 往往忽略梁与地基土之间的水平摩阻力对地基梁内力及变形的影响^[1-8]。已有研究表明^[9-11], 梁土间摩阻效应对梁内力及变形有一定程度的影响, 尤其是当地基土比较坚硬且梁土间接触较为粗糙时, 这种影响不能忽略。因此不少学者对传统文克尔弹性地基模型进行改进, 考虑梁土间接触摩擦效应影响, 提出了各自不同的计算方法^[9-15]。然而, 这些方法均未能考虑地基梁在外荷载及水平向与竖向地

基反力共同作用下纵横向变形的耦合特性。

因此, 本文拟考虑地基梁竖向与水平向双向变形及变形的几何非线性, 建立对称荷载作用下梁的挠曲变形控制微分方程, 而后引入 Galerkin 法, 导出有限长梁挠曲变形、转角、剪力及弯矩的表达式。在此基础上进行参数分析, 探讨各参数对弹性地基梁内力及变形的影响。以期获得一些定性结论, 为工程实际提供理论参考。

基金项目: 国家 863 计划资助项目 (2006AA11Z104)

收稿日期: 2008-04-18

1 计算模型及基本方程的建立

设一长为 $2l$ ，宽为 b ，高为 h ，抗弯刚度为 EI 的有限长梁置于文克尔地基上，其上作用关于梁中点 o 对称的集中荷载 P_i ($i \geq 1$)， P_i 作用点距中点 o 的距离为 a_i (图1)。荷载作用下，地基梁产生纵横耦合变形， x 和 z 方向的位移分量分别为

$$\left. \begin{aligned} u(x, z) &= u^0(x) - zw'_x(x), \\ w(x, z) &= w^0(x), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中， $u^0(x)$ ， $w^0(x)$ 分别为梁轴线上 x ， z 方向的位移分量，上标“ $'$ ”表示对 x 求一阶偏导数。

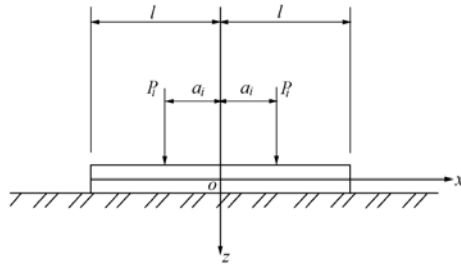


图1 分析模型示意

Fig. 1 Calculation model for beams

设梁所受水平向摩阻力和竖直向地基反力强度分别为

$$\left. \begin{aligned} q_x &= k_x u, \\ q_z &= k_z w, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中， k_x ， k_z 分别为水平和垂直向地基反力系数， q_x ， q_z 的方向如图2所示。

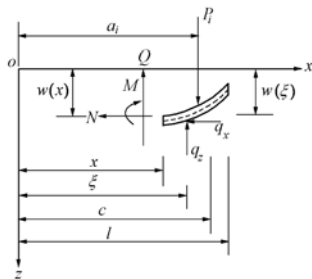


图2 x 截面右边部分受力分析图

Fig. 2 Force analysis of x -cross section on the right hand

根据截面上内力与应力之间的关系可得：

$$\left. \begin{aligned} EA(u^0)'_x + \frac{1}{2}EA(w'_x)^2 &= N, \\ EIw''_x &= -M, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中， A 为梁的横截面积， I 为梁横截面绕 y 轴的惯性矩， N 为轴力，以拉为正， M 为弯矩。

对梁右半部分任意 x 截面进行受力分析 (图2)，该截面上轴力 N 、剪力 Q 、弯矩 M 分别为

$$N(x) = -\int_x^l k_x u^0(\xi) d\xi + \frac{h}{2} k_x \int_x^l w'_x(\xi) d\xi, \quad (4a)$$

$$O(x) = \sum P_i - \int_x^l k_z w(\xi) d\xi, \quad (4b)$$

$$M(x) = \int_x^l k_z w(\xi)(\xi - x) d\xi - \sum P_i(a_i - x) - \int_x^l k_x [u^0(\xi) - \frac{h}{2} w'_x(\xi)] [\frac{h}{2} - w(x) + w(\xi)] d\xi. \quad (4c)$$

根据边界条件及连续性条件，设位移形函数为

$$\left. \begin{aligned} u^0 &= \sum_m U_m \left(\frac{\sinh \alpha_m x}{\sinh \alpha_m l} + \frac{\sin \alpha_m x}{\sin \alpha_m l} \right), \\ w &= W_0 + \sum_m W_m \left(\frac{\cosh \alpha_m x}{\sinh \alpha_m l} - \frac{\cos \alpha_m x}{\sin \alpha_m l} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中， $\alpha_m = \frac{\pi(m-0.25)}{l}$ ， U_m ， W_0 和 W_m 为待定系数。

令 $X_m = \frac{\sinh \alpha_m x}{\sinh \alpha_m l} + \frac{\sin \alpha_m x}{\sin \alpha_m l}$ ， $Y_m = \frac{\cosh \alpha_m x}{\sinh \alpha_m l} - \frac{\cos \alpha_m x}{\sin \alpha_m l}$ ，并将式(4a)、(4b)、(4c)、(5)代入式(3)，可得梁的控制方程为

$$EA \sum_m U_m X'_m(x) + k_x \sum_m U_m \int_x^l X_m(\xi) d\xi - \frac{h}{2} k_x \sum_m W_m \int_x^l Y'_m(\xi) d\xi + \frac{1}{2} EA \left[\sum_m W_m Y'_m(x) \right] \left[\sum_n W_n Y'_n(x) \right] = 0, \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{h}{2} k_x \sum_m [U_m \int_x^l X_m(\xi) d\xi] + k_z W_0 \int_x^l (\xi - x) d\xi + EI \sum_m W_m Y''_m(x) + \\ & k_z \sum_m [W_m \int_x^l Y_m(\xi)(\xi - x) d\xi] + k_x \left[\sum_m W_m Y_m(x) \sum_n U_n \int_x^l X_n(\xi) d\xi - \right. \\ & \left. \int_x^l \sum_m W_m Y_m(\xi) \sum_n U_n X_n(\xi) d\xi \right] + \frac{h^2}{4} k_x \sum_m W_m \int_x^l Y'_m(\xi) d\xi - \\ & \frac{h}{2} k_x \left[\sum_m W_m Y_m(x) \sum_n W_n \int_x^l Y'_n(\xi) d\xi - \int_x^l \sum_m W_m Y_m(\xi) \sum_n W_n Y'_n(\xi) d\xi \right] \\ & = \sum P_j(a_j - x). \end{aligned} \quad (6b)$$

将式(5)及 $Q|_{x=0} = 0$ 代入式(4b)，则有

$$k_z W_0 l + k_z \sum_m W_m \int_0^l Y_m(\xi) d\xi = \sum P_i. \quad (7)$$

2 基本方程的求解

对由式(6a)、(6b)和式(7)组成的非线性方程组采用迭代求解方法，以下是第 k 步的求解过程。

采用 Galerkin 方法，以试函数中的基函数 $X_i(x)$ 乘以式(6a)中的各项，并在 $0 \leq x \leq l$ 内积分，整理后可得 (假设试函数取 s 项)：

$$[B]\{U\} + [C]\{W\} = 0, \quad (8)$$

式中， $\{U\} = \{U_1, U_2, \dots, U_s\}^T$ ， $\{W\} = \{W_1, W_2, \dots, W_s\}^T$ ， $[B]$ 和 $[C]$ 均为 $s \times s$ 阶矩阵， $[B]$ 和 $[C]$ 中的元素为

$$\left. \begin{aligned} B_{im} &= EA \int_0^l X_m'(x) X_i(x) dx + k_x \int_0^l \int_x^l X_m(\xi) d\xi X_i(x) dx, \\ C_{im} &= -\frac{h}{2} k_x \int_0^l \int_x^l Y_m'(\xi) d\xi X_i(x) dx + \\ &\quad \frac{1}{2} EA \int_0^l \sum_n W_n^{(k-1)} Y_n'(x) Y_m'(x) X_i(x) dx, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中,上标 $(k-1)$ 为上一迭代步所求得值。

再以试函数中的基函数 $Y_i(x)$ 乘式(6b)中的各项,并在 $0 \leq x \leq l$ 内积分,整理后可得(设试函数取 s 项):

$$W_0\{g\} + [T]\{U\} + [R]\{W\} = \{d\} \quad (10)$$

式中 $\{g\} = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}^T$; $\{d\} = \{d_1, d_2, \dots, d_s\}^T$, $[T][R]$ 为 $s \times s$ 阶矩阵; $\{g\}$, $\{d\}$, $[T]$ 和 $[R]$ 中的元素为

$$\left. \begin{aligned} g_i &= \int_0^l [k_x \int_x^l (\xi - x) d\xi] Y_i(x) dx, \\ d_i &= \sum P_i (a_i - x) Y_i(x) dx, \\ T_{im} &= -\frac{h}{2} k_x \int_0^l \int_x^l X_m(\xi) dx Y_i(x) dx, \\ R_{im} &= R_{im}^{(a)} + R_{im}^{(b)} + R_{im}^{(c)} + R_{im}^{(d)} + R_{im}^{(e)} + R_{im}^{(f)} + R_{im}^{(g)}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} R_{im}^{(a)} &= EI \int_0^l Y_m''(x) Y_i(x) dx, \\ R_{im}^{(b)} &= k_z \int_0^l \int_x^l Y_m(\xi) (\xi - x) d\xi Y_i(x) dx, \\ R_{im}^{(c)} &= \frac{h^2}{4} k_x \int_0^l \int_x^l Y_m'(\xi) d\xi Y_i(x) dx, \\ R_{im}^{(d)} &= k_x \int_0^l \{Y_m(x) [\sum_n U_n^{(k-1)} \int_x^l X_n(\xi) d\xi] Y_i(x)\} dx, \\ R_{im}^{(e)} &= -k_x \int_0^l \{Y_m(\xi) [\sum_n U_n^{(k-1)} X_n(\xi)] d\xi\} Y_i(x) dx, \\ R_{im}^{(f)} &= -\frac{h}{2} k_x \int_0^l \{Y_m(x) \sum_n W_n^{(k-1)} \int_x^l Y_n'(\xi) d\xi\} Y_i(x) dx, \\ R_{im}^{(g)} &= \frac{h}{2} k_x \int_0^l \{Y_m(\xi) \sum_n W_n^{(k-1)} Y_n'(\xi)\} d\xi Y_i(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

将式(7)写为

$$aW_0 + \{b\}^T \{W\} = c \quad (13)$$

式中, $a = k_z l$, $c = \sum P_i$, $b_m = k_z \int_0^l Y_m(\xi) d\xi$ 。

式(8)、(10)和(13)构成 $2s+1$ 个式子的第 k 迭代步的方程式组,即

$$\left. \begin{aligned} [B]\{U\} + [C]\{W\} &= 0, \\ W_0\{g\} + [T]\{U\} + [R]\{W\} &= \{d\}, \\ aW_0 + \{b\}^T \{W\} &= c, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

由式(14)可求解第 k 迭代步的 $U_1, U_2, \dots, U_s$,

$W_0, W_1, W_2, \dots, W_s$ 共 $2s+1$ 个未知数。

式(14)对应的几何非线性问题可采用迭代方法求解,具体步骤如下:

(1) 当 $k=1$ 时(初始迭代步),在式(9)、(12)中上标为 $(k-1)=0$ 对应的 $\{U^{(0)}\}$ 和 $\{W^{(0)}\}$ 中的元素都取为0,得到式(14)对应的初始步的线性方程式组,由此方程式组可求得一组解,作为第一步的迭代结果,记为 $\{U^{(1)}\}$, $\{W_0^{(1)}\}$ 和 $\{W^{(1)}\}$ 。

(2) 将求得的 $\{U^{(1)}\}$, $\{W_0^{(1)}\}$ 和 $\{W^{(1)}\}$ 代入式(9)和式(12)中上标为 $(k-1)=1$ 对应的值,得到式(14)对应的第二迭代步的线性方程式组,由此方程式组可求得第二步迭代结果,记为 $\{U^{(2)}\}$, $\{W_0^{(2)}\}$ 和 $\{W^{(2)}\}$ 。

(3) 依次类推,直至

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{\|\{U^{(i)}\}^T \{U^{(i)}\}\| - \|\{U^{(i-1)}\}^T \{U^{(i-1)}\}\|}{\|\{U^{(i)}\}^T \{U^{(i)}\}\|} \right| &< \varepsilon, \\ \left| \frac{\|\{W^{(i)}\}^T \{W^{(i)}\}\| - \|\{W^{(i-1)}\}^T \{W^{(i-1)}\}\|}{\|\{W^{(i)}\}^T \{W^{(i)}\}\|} \right| &< \varepsilon, \\ \left| \frac{\|(W_0^{(i)})\| - \|(W_0^{(i-1)})\|}{\|(W_0^{(i)})\|} \right| &< \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

判断式(15)成立。其中 ε 为设定的收敛误差。若式(15)满足,则 $\{U^{(i)}\}$, $\{W_0^{(i)}\}$ 和 $\{W^{(i)}\}$ 即为所求;否则,重复第(2)步骤,直至式(15)满足。

将由迭代法求得的 $\{U^{(i)}\}$, $\{W_0^{(i)}\}$ 和 $\{W^{(i)}\}$ 对应的 $U_1, U_2, \dots, U_s, W_0, W_1, W_2, \dots, W_s$ 代入式(5),可求得中面上的位移 $u^0(x)$ 和 $w(x)$,再代入式(1),可求得梁内任一点的位移 $u(x, z)$ 和 $w(x, z)$ 。将 $u(x, z)$ 和 $w(x, z)$ 代入式(4),可求得梁内任一截面上的内力。

特别的,由本文推导可见,当不考虑水平摩阻力时,水平向位移 $u=0$,水平向与竖向变形不发生耦合,因此本文所研究的问题将简化为线弹性地基梁课题。

3 计算分析

为验证本文解析解的正确性,取如图3所示弹性地基梁进行分析,该梁两端自由,梁长 $2l=29.0$ m,宽 $b=3.0$ m,高 $h=1.0$ m,抗弯刚度 $EI=5.125 \times 10^6$ kN·m²,梁中点作用荷载 $P=2000$ kN,取竖直向地基反力系数 $k_v=1 \times 10^4$ kN/m³,水平向地基反力系数 $k_x=0$,即不考虑水平摩阻力,并将计算结果与传统弹性地基梁法^[4]进行比较,比较结果如图4、5所示。

由图4、5可见,当不考虑摩阻力时,按本文解析解法得到的梁的挠曲变形曲线及弯矩曲线与按传统弹性地基梁法得到的挠曲变形曲线及弯矩曲线均极为一致。因此,本文的解析解是正确的。

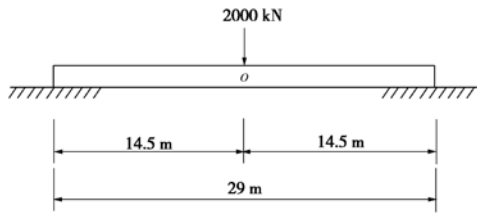
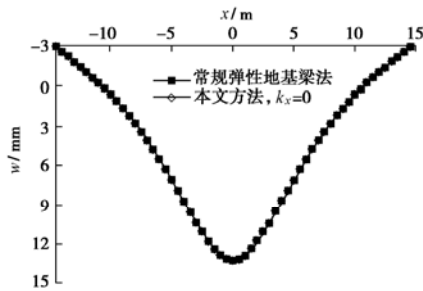
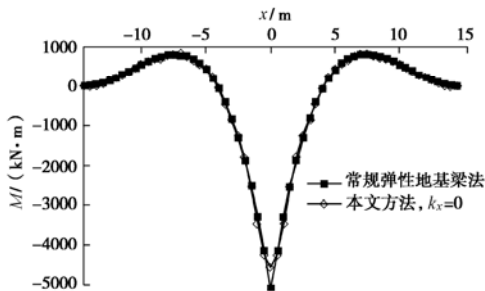


图3 弹性地基梁及其荷载分布

Fig. 3 Elastic subgrade with loads on it

图4 $k_x=0$ 时 w 与 x 的变化关系Fig. 4 Relationship between w and x when $k_x=0$ 图5 $k_x=0$ 时 M 与 x 的变化关系Fig. 5 Relationship between M and x when $k_x=0$

4 影响因素分析

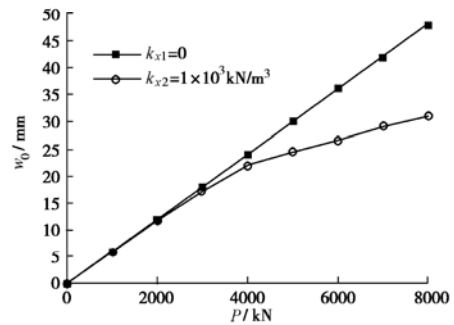
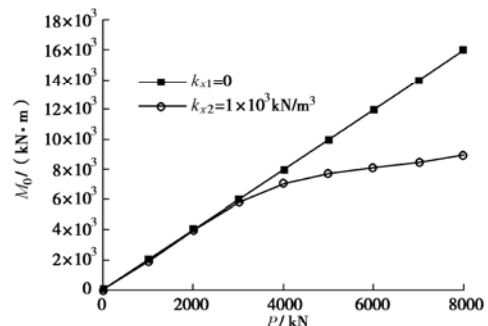
仍对如图3所示有限长梁进行分析，进一步研究荷载 P 、地基梁刚度 EI 、水平向地基反力系数 k_x 、竖向地基反力系数 k_v 等因素对弹性地基梁位移及内力的影响。

4.1 w_0 及 M_0 与 P 的关系

取竖向地基反力系数 $k_v=1 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$ ，分别取梁与土体之间摩阻力 $k_{x1}=0$ ， $k_{x2}=1 \times 10^3 \text{ kN/m}^3$ ，分析不同荷载水平下梁中点挠曲变形 w_0 及弯矩 M_0 的变化情况，如图6、7所示。由图可见，当 $k_{x1}=0$ ，即不考虑摩阻力时，梁中点挠曲变形 w_0 及弯矩 M_0 均随外荷载 P 的增加而增大，且 $P-w_0$ 、 $P-M_0$ 均呈线性变化。而当 $k_{x2} \neq 0$ ，即考虑梁土间水平摩阻力时，水平向位移 $u \neq 0$ ，此时地基梁纵向变形发生耦合。当荷载 P 较小时， $P-w_0$ 、 $P-M_0$ 曲线接近直线，但随 P 的逐渐增大， $P-w_0$ 、 $P-M_0$ 呈明显的非线性变化趋势。

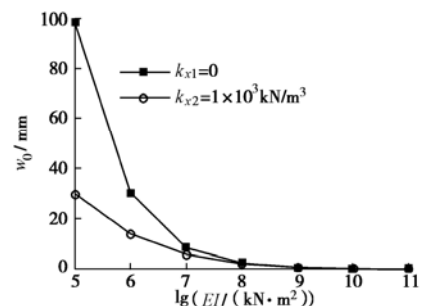
此外，由图6、7亦可见，考虑摩阻力时的 $P-w_0$ 、 $P-M_0$ 曲线均位于不考虑摩阻力时的 $P-w_0$ 、 $P-M_0$ 曲线的下方，即考虑摩阻力较不考虑摩阻力时梁

中点的挠曲变形及弯矩值均有所降低。

图6 P 与 w_0 关系曲线Fig. 6 Relationship between P and w_0 图7 P 与 M_0 关系曲线Fig. 7 Relationship between P and M_0

4.2 w_0 及 M_0 与 EI 的关系

取竖向地基反力系数 $k_v=1 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$ ，分别取梁与土体之间摩阻力 $k_{x1}=0$ ， $k_{x2}=1 \times 10^3 \text{ kN/m}^3$ ，分析不同抗弯刚度下梁中点挠曲变形 w_0 及弯矩 M_0 的变化情况（图8、9）。由图可见，梁中点挠曲变形 w_0 随地基梁抗弯刚度的增大而减小，弯矩 M_0 随地基梁抗弯刚度 EI 的增大而增大。同样的，梁土间水平摩阻力并不影响 $EI-w_0$ 、 $EI-M_0$ 曲线的整体变化趋势，但考虑摩阻力时对应的 w_0 值及 M_0 值均较不考虑摩阻力时的小。但是，当梁的抗弯刚度达到某一值时，图8、9中当 $EI > 1 \times 10^7 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ 时，摩阻力对梁的内力及位移几乎没有影响。

图8 EI 与 w_0 关系曲线Fig. 8 Relationship between EI and w_0

4.3 w_0 及 M_0 与 k_x 及 k_v 的关系

分别取竖向地基反力系数 $k_{v1}=1 \times 10^3 \text{ kN/m}^3$ ， $k_{v2}=1 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$ ， $k_{v3}=1 \times 10^5 \text{ kN/m}^3$ ，分析梁中点挠

曲变形 w_0 及弯矩 M_0 随水平向地基反力系数 k_x 的变化情况, 结果如图 10, 11 所示。

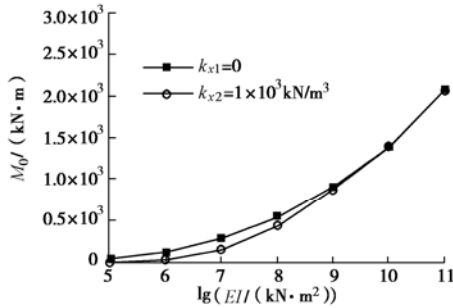


图 9 EI 与 M_0 关系曲线

Fig. 9 Relationship between EI and M_0

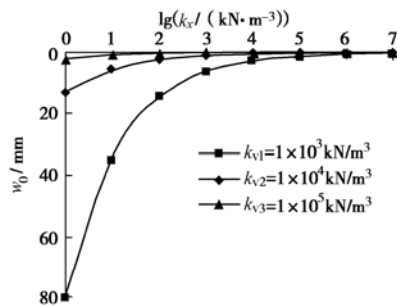


图 10 不同 k_v 时 w_0 与 k_x 的关系

Fig. 10 Relationship between w_0 and k_x under different k_v

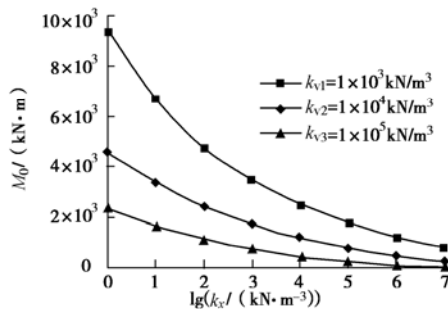


图 11 不同 k_v 下 M_0 与 k_x 的关系

Fig. 11 Relationship between M_0 and k_x under different k_v

由图 10, 11 可见, 梁中点的挠曲变形 w_0 及弯矩 M_0 随水平向地基反力系数 k_x 的增大而减小, 且开始时减小幅度较大, 而后随 k_x 的增大减小幅度逐渐减小, 最后逐渐趋于平缓。

4.4 w_0 及 M_0 与 k_x/k_v 的关系

一般的, 水平向地基反力系数小于竖向地基反力系数, 即 $k_x/k_v < 1$, 故本文只对 $0 < k_x/k_v < 1$ 时 w_0 及 M_0 与 k_x/k_v 的关系进行探讨研究。由图 12 可见, k_x/k_v 逐渐增大至 1 时, w_0 与 M_0 均随 k_x/k_v 的增大而逐渐减小, 且开始时减小幅度较小, 而当 $0.1 < k_x/k_v < 1$ 时, 减小幅度较大。

4.5 w 及 M 与 k_x 的关系

取竖向地基反力系数 $k_v = 1 \times 10^4$ kN/m³, 分别取梁与土体之间摩阻力 $k_{x1} = 0$, $k_{x2} = 1 \times 10^3$ kN/m³, $k_{x3} = 1$

$\times 10^5$ kN/m³, 分析不同水平摩阻力情况下梁的挠曲变形 w 及弯矩 M 沿梁长的变化情况 (图 13, 14)。

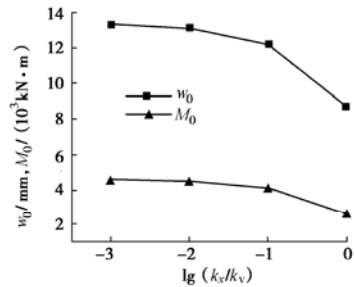


图 12 w_0 与 k_x/k_v 及 M_0 与 k_x/k_v 关系

Fig. 12 Relationship among w_0 , M_0 and k_x/k_v

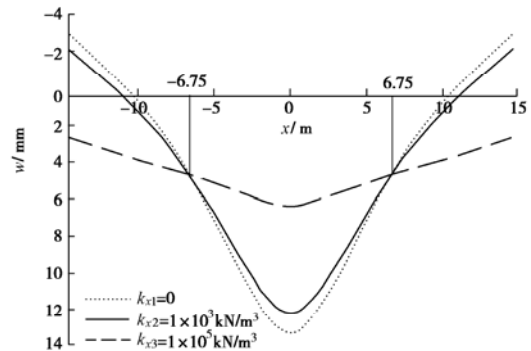


图 13 w 与 k_x 的关系

Fig. 13 Relationship between w and k_x

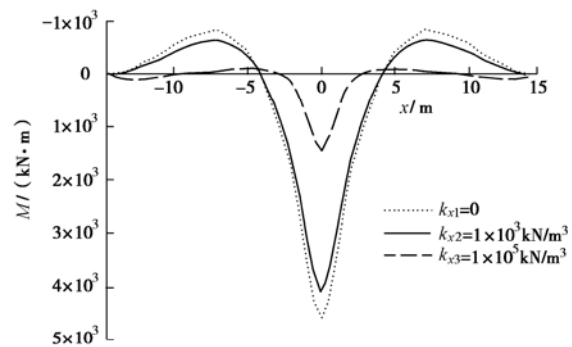


图 14 M 与 k_x 的关系

Fig. 14 Relationship between w and k_x

由图 13, 14 可见, 梁与土体间的水平摩阻力对梁的位移值及内力值有较大影响, 当水平摩阻力越大时, 其影响程度也越大。此外, 当 $0 < |x| < 6.75$ 时, 水平摩阻力越大, w 就越小; 当 $|x| > 6.75$ 时, 水平摩阻力越大, w 就越大。当 $0 < |x| < 4.3$ 时, 水平摩阻力越大, M 就越小; 当 $|x| > 4.3$ 时, 水平摩阻力越大, M 就越大。

5 结 论

(1) 当不考虑梁土间水平摩阻力时, 纵横向变形不发生耦合, 外加集中荷载与梁的位移及内力呈线性变化关系; 当考虑梁土间水平摩阻力时, 纵横向变形耦合, 外加集中荷载与梁的位移及内力呈明显的非线性

性变化关系。

(2) 水平摩阻力不影响梁内力及位移的整体变化趋势, 但将导致梁节点挠度值及弯矩值的降低, 且水平摩阻力越大, 水平摩阻效应对梁内力及位移的影响也就越大。

(3) 当地基梁抗弯刚度越大, 水平摩阻力对梁内力及位移的影响反而越小。

(4) 水平与垂直向地基反力系数之比 k_x/k_v 对地基梁的内力及位移也有一定程度影响, 当 $k_x < k_v$ 时, 地基梁的位移及内力均随 k_x/k_v 的增大而减小。

参考文献:

- [1] 赵艳林. 弹性地基梁与高层框架相互作用的混合分析法[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(5): 84 - 88. (ZHAO Yan-lin. The mixed analysis of the interaction between the elastic foundation beam and high rise building[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, 16(5): 84 - 88. (in Chinese))
- [2] 卜小明. 无拉力 Winkler 弹性地基深浅梁的统一解[J]. 工业建筑, 1996, 26(1): 28 - 30. (BU Xiao-ming. Unified solution of non-tension Winkler elastic foundation beams[J]. Industrial Construction, 1996, 26(1): 28 - 30. (in Chinese))
- [3] 赵宝生, 王敏中, 于新. Winkler 弹性地基上梁的精细化理论[J]. 应用力学学报, 2005, 22(4): 602 - 605. (ZHAO Bao-sheng, WANG Min-zhong, YU Xin. Refined theory of beam on winkler foundation[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2005, 22(4): 602 - 605. (in Chinese))
- [4] 龙驭球. 弹性地基梁的计算[M]. 北京: 人民教育出版社, 1981. (LONG Yu-qiu. Calculation of elastic foundation beam[M]. Beijing: People's Education Press, 1981. (in Chinese))
- [5] 王立峰, 朱向荣. 土钉墙面层位移和内力的计算分析[J]. 岩土力学, 2008, 29(2): 437 - 441. (WANG Li-feng, ZHU Xiang-rong. Analysis of displacement and inner force in soil-nailing walls[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(2): 437 - 441. (in Chinese))
- [6] 朱碧堂, 杨敏. 基坑支护结构弹塑性计算方法与 m 法的对比分析[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(增): 1387 - 1393. (ZHU Bi-tang, YANG Min. Comparison between elasto-plastic method and m -method for retaining structures[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(S): 1387 - 1393. (in Chinese))
- [7] SELVADURAI A P S. Elastic analysis of soil-foundation interaction[M]. New York: Elsevier Scientific Publishing Company, 1979.
- [8] MAHESHWARI Priti, VILADKAR M N. A mathematical model for beams on geosynthetic reinforced earth beds under strip loading[J]. Applied Mathematical Modelling, 2008.
- [9] 谈至明. 具有水平摩阻力的弹性地基上梁的解[J]. 力学与实践, 1997, 19(3): 33 - 35. (TAN Zhi-ming. The solution of elastic foundation beam considering horizontal frictional resistance[J]. Mechanics in Engineering, 1997, 19(3): 33 - 35. (in Chinese))
- [10] 杨敏, 廖凯霞. 考虑摩擦效应时文克尔弹性地基上的杆系有限单元法[J]. 上海地质, 2001, 22(2): 34 - 37. (YANG Min, LIAO Kai-xia. The finite-element method of beam on Winkler elastic subgrade considering contact frictional effect[J]. Shanghai Geology, 2001, 22(2): 34 - 37. (in Chinese))
- [11] 马飞, 艾智勇. 考虑接触摩擦效应时的弹性地基杆系有限单元法[J]. 岩土力学, 2002, 23(1): 93 - 96. (MA Fei, AI Zhi-yong. The finite element method of elastic subgrade beam with the contact friction effect considered[J]. Rock and Soil Mechanics, 2002, 23(1): 93 - 96. (in Chinese))
- [12] 周继凯, 杜钦庆. 考虑水平力作用的改进型文克勒地基模型[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2004, 32(6): 669 - 673. (ZHOU Ji-kai, DU Qin-qing. Modified Winkler foundation model with horizontal force taken into account[J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 2004, 32(6): 669 - 673. (in Chinese))
- [13] 赵明华, 张玲, 马宾辉. 基于 Winkler 假定的土工格室加筋体受力分析[J]. 水利学报, 2008, 39(6): 697 - 702. (ZHAO Ming-hua, ZHANG Ling, MA Bin-hui. Deformation analysis of geocell reinforcement based on Winkler model[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2008, 39(6): 697 - 702. (in Chinese))
- [14] YIN Jian-hua. Comparative modeling study of reinforced beam on elastic foundation[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2000, 126(3): 265 - 271.
- [15] YIN Jian-hua. Closed-form solution for reinforced Timoshenko beam on elastic foundation[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2000, 126(8): 868 - 874.