

考虑剪切硬化的砂土临界状态本构模型

徐舜华¹, 郑刚¹, 徐光黎²

(1. 天津大学建筑工程学院, 天津 300072; 2. 中国地质大学工程学院, 湖北 武汉 400074)

摘要: 基于临界状态土力学框架, 建立了一个剑桥类砂土本构模型, 适用于单调静力荷载, 加入了剪切硬化、依赖状态的剪胀的概念。屈服面采用倒子弹头型, 硬化规律不是采用剑桥模型的体变硬化, 而是借鉴 Hashiguchi 次加载面模型的思想, 推导出与 Norsand 砂模型相同的增量形式的塑性剪应变硬化表达式。流动法则采用加入状态参数概念的修正的 Rowe 应力剪胀关系, 该模型能考虑砂土变形特性对密度和固结压力的双重依赖型, 只用一组材料参数就能模拟不同密度和固结压力下的应力应变响应, 可反映材料的软化。通过与常规三轴试验、等 p 路径三轴试验等结果的对比, 表明该模型是合理的、有效的。

关键词: 剪应变硬化; 临界状态; 弹塑性本构模型; 状态参数; 剪胀

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2009)06-0953-06

作者简介: 徐舜华(1972-), 女, 河南许昌人, 博士后, 主要从事土的工程性质, 本构关系方面的研究。E-mail: xushunhua@eyou.com。

Critical state constitutive model of sand with shear hardening

XU Shun-hua¹, ZHENG Gang¹, XU Guang-li²

(1. School of Architectural Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China; 2. Engineering Faculty, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China)

Abstract: Based on the framework of critical state soil mechanics, a new Cam-type sand model, being applicable to monotonic loading, is proposed. The model combines the concept of state-dependent dilatancy and shear strain hardening rule. Reverse bullet-shaped yielding surface is adopted. Not the volumetric strain hardening in Cam-clay model, but the shear strain hardening rule is used and a new hardening equation is given. The state parameter concept is incorporated in Rowe's stress dilatancy equation. The model accounts for the dependence of dilatancy on the stress state and the material internal state. A single set of model constants, once calibrated, can simulate stress-strain response under different initial void ratios and different confining pressures. The model is validated by comparing the predicted results with triaxial test results.

Key words: shear hardening; critical state; elastoplastic constitutive model; state parameter; dilatancy

0 前言

土的应力应变关系十分复杂。大量的试验研究表明, 砂土的变形行为不仅依赖于其相对密度, 也依赖于所处的固结压力。同一固结压力下, 密砂剪胀, 松砂剪缩; 同一密度的砂, 在低固结压力下可能剪胀, 而在高固结压力下则可能剪缩。以往提出的大多数砂土本构模型忽略了密度和压力的双重依赖性, 将不同密度的同一种砂当作不同的材料, 采用不同的材料参数。这些模型对于加载过程中土的密度不断变化而出现的材料常数变化常无能为力。

为描述土的密度和应力状态, 及其随空间和时间而变化的影响, 要求模型能够明确地区分材料应力状态变量的影响和土的内部常量的影响, 前者应为一组状态变量。后者应为一组与材料状态无关的材料常量。

这种方法不仅可以自动地追踪材料状态随时间的变化, 且不需多组参数来反映初始状态在空间上的变化, 显然这是一种统一的模拟方式。这种方式的关键在于正确模拟土的剪胀性。Li 和 Dafalias^[1-2]指出经典应力剪胀性理论 (stress dilatancy) 本身无法做到这一点, 散粒土的剪胀性必须同时是外部应力状态和材料内部状态的函数, 以与状态相关的剪胀性理论和临界状态土力学理论为平台, 可以建立一种统一的砂土模型框架, 只用一组参数即可模拟砂土在各种密度和应力状态下的剪缩、剪胀及临界状态破坏等不同响应。

众所周知, 剑桥模型的一个重要特点是以各向同

基金项目: 天津市自然科学基金项目 (07JCZDJC09800); 天津市科学技术创新特别基金项目 (07FDZDSF01200)

收稿日期: 2008-03-14

性压缩规律为硬化规则, 由于塑性体应变 ε_v^p 与硬化参数 p_c 的关系是单调递增的, p_c 越大, ε_v^p 越大, 土越压越密。对于普遍存在的三维应力空间, 剪应力增大可引起土体剪胀与剪缩, 剪应力引起的体变 ε_v^p 依赖土体的密实程度可变大也可变小, 甚至为负值。显然, 用各向同性压缩下的 p_c 与 ε_v^p 的单调关系来反映有剪应力变化产生的体积变化只会剪缩, 不可能剪胀, 只能反映硬化, 不能反映软化。为改进这个缺点, 本文模型的硬化规律采用了以塑性剪应变为硬化参数的形式。

本文结合状态参数概念, 建立了一个数学描述简单, 模型参数较少的砂土弹塑性本构模型。可以描述较大的密度和压力范围内砂土的应力应变响应, 可以模拟密砂的剪胀与软化。数值模拟与试验结果的对比分析表明, 该模型具有较好地描述砂土实际应力-应变响应的能力。

1 模型组成

1.1 屈服面

模型采用的屈服面如图 1 所示, 其表达式为

$$f = \left(\frac{\eta}{M} \right)^3 - \ln \left(\frac{p_c}{p} \right) = 0 \quad (1)$$

式中, p 为平均正应力, η ($\eta = q/p$) 为应力比, M 为临界应力比, p_c 为固结压力, 在这里是硬化参数。

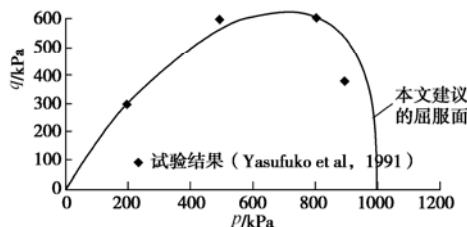


图 1 本文建议屈服面与试验数据^[3-4]的比较 ($M=1.25$)

Fig. 1 Comparison between proposed yield surface and other test results

由式 (1) 微分, 可得

$$\frac{dq}{dp} = M \left[\ln \left(\frac{p_c}{p} \right) \right]^{-1/3} - \frac{1}{3} M \left[\ln \left(\frac{p_c}{p} \right) \right]^{-2/3} \quad (2)$$

$$\text{由} \quad \frac{dq}{dp} = 0 \quad (3)$$

得顶点应力比 M_p 位置,

$$p_p = \frac{p_c}{e^{1/3}} = 0.7165 p_c \quad (4)$$

式中, e 约为 2.718, 是自然对数的底。

为求屈服面与临界状态线 (CSL) 交点位置, 将 $\eta = M$ 代入式 (1), 得

$$p_r = \frac{p_c}{e} = 0.3679 p_c \quad (5)$$

屈服面与临界状态线及屈服面顶点应力比的位置关系如图 2 所示。

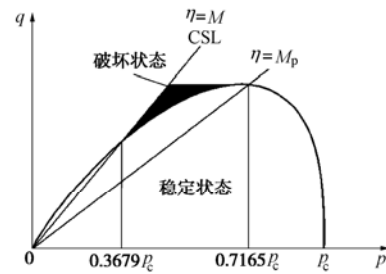


图 2 屈服面与砂土破坏状态的关系

Fig. 2 Relationship between proposed yield surface and collapsible state of sand

1.2 临界孔隙比与平均压力之间的关系

土体的压缩性可通过室内压缩试验或现场原位压缩试验测得压缩曲线, 再用压缩系数 a_v 来衡量其压缩性能的高低。压缩曲线愈陡, 压缩系数就愈大, 则土的压缩性愈高。对于砂、堆石等无黏性土体, 其压缩性通常用孔隙比的变化来反映。试验资料研究表明, 孔隙比与压力之间不存在唯一对应的关系, 这表明在相同的压力情况下, 孔隙比存在一定的变化范围, 而这个可能的变化范围却限制在某个上下界限之内。根据砂的等向压缩试验资料, 上界孔隙比 e_i 与平均压力之间的关系如图 3 中曲线 1 所示, 孔隙比 e_i 随着平均压力增大而减小。当平均压力接近为零时上界孔隙比 e_i 取到初始值 e_{i0} 。当平均压力很大时, 上界孔隙比 e_i 趋近于零。Bauer^[5]于 1995 年建议用下面指数函数来表示上述曲线的变化规律,

$$e_i = e_{i0} \exp \left[- \left(\frac{3p}{h_s} \right)^n \right] \quad (6)$$

式中 e_{i0} 为初始上界孔隙比, 即颗粒处于初始最疏松状态 (接近应力自由状态) 时的孔隙比; h_s 和 n 为拟合参数, h_s 为颗粒硬度; e_{i0} , h_s 和 n 为材料常数, 上界孔隙比 e_i 并不是材料常数。

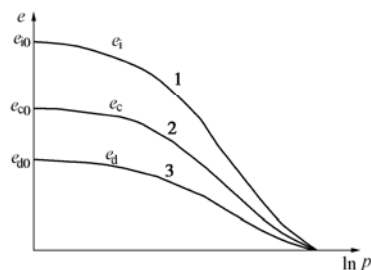


图 3 孔隙比与平均压力之间的关系

Fig. 3 Relationship between pore ratio and mean pressure

Gudehus^[6] (1996) 进一步建议临界孔隙比和下界孔隙比与平均压力之间的关系 (图 3) 中曲线 2 和曲线 3) 与上界孔隙比的变化规律一致,

$$\frac{e_i}{e_{i0}} = \frac{e_c}{e_{c0}} = \frac{e_d}{e_{d0}} = \exp \left[- \left(\frac{3p}{h_s} \right)^n \right], \quad (7)$$

$$\text{即} \quad e_c = e_{c0} \exp \left[- \left(\frac{3p}{h_s} \right)^n \right], \quad (8)$$

式中, e_d 为下界孔隙比, e_{d0} 为初始下界孔隙比, e_c 为临界孔隙比, e_{c0} 为初始临界孔隙比, e_{d0} 和 e_{c0} 为材料常数。

式(7)描述了散粒体材料的几个特征孔隙比随平均压力变化的规律。在相同压力条件下有 $e_{i0} > e_{c0} > e_{d0}$, 其中上界孔隙比 e_{i0} 应代表疏松状态, 临界孔隙比 e_{c0} 代表临界状态, 下界孔隙比 e_{d0} 代表密实状态。实际孔隙比会随受力状态不同在疏松、临界和密实之间发生变化, 但不会超出图3中曲线1和曲线3限定的变化范围。

砂土的临界孔隙比 e_c 与 p 在对数坐标中的直线近似关系只是当 p 在小范围变化时适用,

$$e_c = e_{\text{ref}} - \lambda \ln(p/p_{\text{ref}}), \quad (9)$$

式中, e_{ref} 和 p_{ref} 为参考孔隙比与参考固结压力, 用来确定临界状态线的位置, λ 为临界状态线在对数坐标中的斜率。

1.3 当前孔隙比与体积应变之间的关系

土体中孔隙的体积与固体颗粒的体积之比称为孔隙比。在砂、堆石等散粒体材料中, 孔隙比的变化一般仅指孔隙体积的变化, 砂土等散粒体材料的孔隙比与体积应变之间存在严密的函数变化关系。

孔隙比与体积应变之间一般函数表达式^[7]为

$$e = (1 + e_0) \exp(-\varepsilon_v) - 1, \quad (10)$$

式中, e_0 为材料受力变形前的初始孔隙比, ε_v 为体积应变(以压为正)。上式给出了颗粒材料孔隙比与体积应变之间的非线性关系。当材料压缩时, 孔隙比减小; 当材料剪胀时, 孔隙比增大。

土力学中的孔隙比与体积应变常见表达式为

$$e = e_0 - (1 + e_0) \varepsilon_v. \quad (11)$$

上式是在小应变的假定下得到的线性关系, 或者说是平均意义上的关系式。式(10)是孔隙比与体积应变之间严密的连续函数表达式, 后者是前者在小应变条件下增量形式的近似表示。

1.4 流动的峰值应力比与相态转换应力比

(1) 状态参数

临界状态是指土在常应力和常孔隙比下不断变形的状态。只有当应力比 η 达到临界应力比, 孔隙比也达到临界孔隙比 e_c 时, 砂土才达到其临界状态。到达临界状态时,

$$\eta = M, \quad (12)$$

式中, M 为临界应力比。

材料的松密状态是以临界状态为参照的。Been 和 Jefferies^[8-9]将状态参数定义为当前孔隙比与相同压力下的临界孔隙比之差, 即

$$\psi = e - e_c, \quad (13)$$

式中, e 为当前孔隙比, e_c 为相同压力下的临界孔隙比。

显然, 式(13)的定义对材料状态的描述包含了密度和压力两个影响因素。当 $\psi > 0$ 时, 当前孔隙比大于相同压力下的临界孔隙比, 材料处于松的状态, 如图4中状态A所示; 当 $\psi < 0$ 时, 当前孔隙比小于相同压力下的临界孔隙比, 材料处于密实状态, 如图1中状态B所示。显然, ψ 值越大, 材料越松; ψ 值越小, 材料越密。

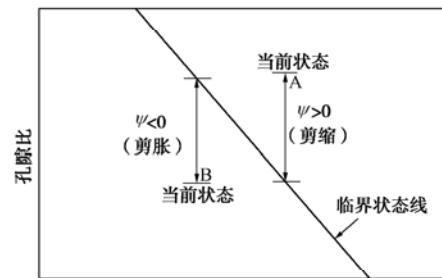


图4 状态参数的定义

Fig. 4 Concept of the state parameter

(2) 峰值应力比与相态转换应力比

Wood 等人^[10]的大量三轴试验数据表明, 峰值应力比 M_f 与状态参数 ψ 有近似线性关系, 即

$$M_f = M - k_1 \psi, \quad (14)$$

式中, k_1 为模型参数。

尽管土最终趋向于达到 $\eta = M$ 状态, 但应力比在 $\varepsilon_q^p \rightarrow \infty$ 时才能达到, 此时, ψ 趋向零值。在加载过程中, 随着应力状态和应变的发展, 土的当前孔隙比, 状态参数和当前的峰值应力比 M_f 都在发生变化, 假如起始状态参数 $\psi_0 < 0$, 那么 M_f 的起始值 $M_{f0} > M$, 土将趋向于比临界状态应力 M 更高的应力比。一旦超过了 M , 土将剪胀 ($d\varepsilon_v^p < 0$), 与此同时, M_f 将减小, 直到再次达到临界状态时的 M 。显然, 在上述过程中, 土表现出软化性质。反之, 假如 $\psi_0 > 0$, 则 $M_{f0} < M$, 土将剪缩并最终达到临界状态, 在这个过程中土表现为硬化性质。

相态转换应力比是指土由收缩转为膨胀时的应力比, 也假定与状态参数 ψ 有近似线性关系

$$\eta_{pt} = M + k_2 \psi, \quad (15)$$

式中, k_2 为模型参数。

1.5 砂土性质与状态相关的剪胀性

流动法则定义为

$$d = \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_q^p} = A(\eta_{pt} - q/p), \quad (16)$$

式中, A 为描述剪胀的模型参数, ε_v^p 是塑性体积应变, 这种定义保证了当应力比到达临界应力比时状态参数为 0, 也保证了孔隙比到达临界状态。

流动方向可写成 $n_g = (n_v, n_s)$,

$$n_v = d \quad (17)$$

$$n_s = 1 \quad (18)$$

本文采用 Rowe 提出的应力 - 剪胀关系形式,

$$d = \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_q} = \frac{9(\eta_{pt} - \eta)}{9 + 3\eta_{pt} - 2\eta_{pt}\eta} \quad (19)$$

本文模型将原式中的 M 修正为相态转换应力比, 以此来考虑状态参数的作用。

1.6 基于次加载面理论^[11-14]的硬化规律

硬化规律定义屈服面的位置与塑性应变的大小间的关系。在中小压力下 (不发生颗粒破碎), 砂土中不可恢复的剪切变形主要随着应力比的变化而变化, 可以把砂土当作剪应变硬化材料, 在 p - q 应力空间中, 正常屈服面取为峰值面, 表达式为

$$f = \left(\frac{\eta}{M}\right)^3 - \ln\left(\frac{p_f}{p}\right) = 0 \quad (20)$$

通过原点和当前应力点的面为次加载面,

$$\bar{f} = \left(\frac{\bar{\eta}}{M}\right)^3 - \ln\left(\frac{p_c}{\bar{p}}\right) = 0 \quad (21)$$

在 p - q 空间建立的次加载面如图 5 所示, 图中给出了模型的示意图及基本映射规则。

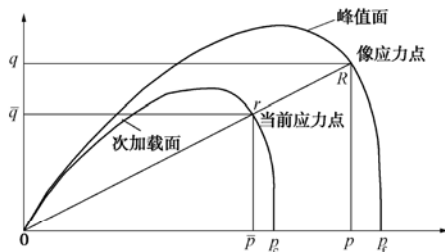


图 5 次加载面模型及其映射规则

Fig. 5 Subloading surface and mapping rule

由上图易得以下几何关系

$$\frac{\bar{p}}{p} = \frac{\bar{q}}{q} = R \quad (22)$$

由式 (20), (21), (22) 可得

$$\frac{\bar{p}}{p} = \frac{\bar{q}}{q} = \frac{p_c}{p_f} = R \quad (23)$$

根据 Hashiguchi 的次加载面理论^[11-14], R 的演化式有两种:

$$dR = U d\varepsilon_q^p = -u \ln R d\varepsilon_q^p \quad (24)$$

$$dR = U d\varepsilon_q^p = u(1-R)/R d\varepsilon_q^p \quad (25)$$

式中, U 为单调减少的函数, u 为材料参数, 描述随着塑性应变发展当前应力到达正常屈服面的速度。

$$\left. \begin{aligned} U < 0 & \quad (R > 1), \\ U = 0 & \quad (R = 1), \\ U > 0 & \quad (R < 1). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

如图 6 所示, 考虑到 $U = u(1-R)$ 同样可以反映 U 随 R 的变化趋势, 由 $U = u(1-R)$ 推导 p_c 的演化方程如下:

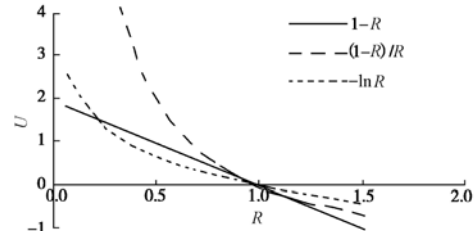


图 6 U 与 R 的关系

Fig. 6 Relationship between U and R

$$\text{由于} \quad R = \frac{p_c}{p_f} \quad (27)$$

$$d\left(\frac{p_c}{p_f}\right) = u\left(1 - \frac{p_c}{p_f}\right) d\varepsilon_q^p \quad (28)$$

$$d(p_c) = u(p_f - p_c) d\varepsilon_q^p \quad (29)$$

此式即为 Jefferies 的硬化规律表达式^[9],

$$dp_c = h(p_f - p_c) d\varepsilon_q^p \quad (30)$$

式中, p_f 为破坏时的 p_c 值, $d\varepsilon_q^p$ 为增量塑性剪应变, h 材料参数。

将峰值应力比 $\eta = M_f$ 代入式 (20), 可得

$$p_f = p \exp\left(\frac{M_f^3}{M^3}\right) \quad (31)$$

由一致性条件

$$\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial p_c} dp_c = 0 \quad (32)$$

其中,

$$dp_c = \frac{dp_c}{d\varepsilon_q^p} d\varepsilon_q^p \quad (33)$$

由塑性力学理论, 可知

$$d\varepsilon_q^p = \frac{1}{K_p} \left(\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq \right) \frac{\partial Q}{\partial q} \quad (34)$$

将式 (33), (34) 一起代入式 (32), 化简可得

$$K_p = -\frac{\partial f}{\partial p_c} \frac{d p_c}{d \varepsilon_q^p} \frac{\partial Q}{\partial q} \quad (35)$$

式中, $\partial f / \partial p_c = -1/p_c$ Q 为塑性势函数, 本文中塑性势与屈服面不同, $\partial Q / \partial q = n_s = 1$ 。

任一点的加载方向为 $n_L = (n_p, n_q)$,

$$n_p = \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{-3q^3}{p^4 M^3} + \frac{1}{p} \quad (36)$$

$$n_q = \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{3q^2}{p^3 M^3} \quad (37)$$

表 1 数值试验的模型参数
Table 1 Model constants

参数	弹性参数 G_0	泊松比 ν	压缩性参数		临界状态应 力比 M	峰值应力比 参数 k_1	相态转化应 力比参数 k_2	硬化参数 h
			n	h_s				
建筑砂	65	0.2	0.28	5500	1.20	4.5	2.5	25
福建标准砂	125	0.25	0.27	5800	1.33	3.5	2.0	50

1.7 弹塑性应力与应变关系

弹性模量 G , K 采用以下形式:

$$G = p_a G_0 \frac{(2.97 - e)^2}{1 + e} \left| \frac{p}{p_a} \right|^{0.5}, \tag{38}$$

$$K = G \frac{2(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}, \tag{39}$$

式中, e_0 为初始孔隙比, G_0 为无量纲常数, p_a 为大气压, 取为 101 kPa。

上式最早由 Richart^[15]等提出, 后李相菘^[2]对该式进行了修正, 将原式中的初始孔隙比改为当前孔隙比, 本文采用了后一种形式。

由上述各公式求出加载方向、流动方向、和塑性模量后, 即可由塑性理论得到应力与应变关系式,

$$d\varepsilon_v^p = \frac{1}{K_p} (n_p dp + n_q dq) n_v, \tag{40}$$

$$d\varepsilon_q^p = \frac{1}{K_p} (n_p dp + n_q dq) n_s. \tag{41}$$

2 参数确定

模型涉及 G_0 , ν , k_1 , k_2 , n , h_s , M 和 h 8 个参数, 其中弹性参数为式 (39) 中的常数 G_0 和泊松比 ν , 描述临界状态的参数为 M , n 及 h_s , M 为临界应力比, n 及 h_s 确定临界状态线的位置, 为拟合参数, h_s 称为颗粒硬度, 量纲同应力的量纲, 是对散粒体材料硬度的总体评价, 并不是指单个颗粒的硬度。 k_1 和 k_2 分别描述峰值应力比和相态转换应力比的演化。描述剪胀的模型参数为 h 。

h 可以通过下式来近似,

$$h = G / (p_f - p_c)_{ini}, \tag{42}$$

式中, $(p_f - p_c)_{ini}$ 为 $(p_f - p_c)$ 的初始值。

颗粒硬度 h_s 和指数 n , 用于描述散粒体材料的孔隙比与平均压力之间的关系, 其值可由等向压缩试验得到的上界孔隙比曲线 (图 3) 中的曲线 1 确定。任意选取该曲线上两个不同压力点 p_1 和 p_2 ($p_2 > p_1$), 相应的孔隙比为 e_1 和 e_2 。则 n 可由下式确定,

$$n = \frac{\ln(e_1 c_{c1} / e_2 c_{c2})}{\ln(n_2 / n_1)}, \tag{43}$$

式中, c_{c1} 和 c_{c2} 分别为点 p_1 和 p_2 的压缩指数。

确定了指数 n 后, 颗粒硬度 h_s 可由下式确定

$$h_s = 3p \left(\frac{ne}{c_c} \right)^{1/n}, \tag{44}$$

式中, p 是介于 p_1 和 p_2 之间的某个压力值, e 和 c_c 为相应于压力点 p 的孔隙比和压缩指数。初始上界孔隙比 e_{i0} 的定义是在零压力下的最大孔隙比, 这种状态在实际中是不存在的, 只能通过图 3 中上界孔隙比曲线 1 的合理外推得到。一般 e_{i0} 可近似取为 1.2 倍的实际最大孔隙比 e_{max} , 对初始临界孔隙比 e_{c0} 和初始下界孔隙 e_{d0} 也有同样的问题。一般地, 初始临界孔隙比 e_{c0} 可近似取为最大孔隙比 e_{max} , 初始下界孔隙 e_{d0} 可近似取为最小孔隙比 e_{min} 。

临界应力比 M 直接由几组三轴试验结果对应的临界应力比取平均值得到。

本文通过对福建标准砂及建筑砂的模拟来检验模型的预测效果, 两种砂的模型参数值见表 1。

3 模型验证

3.1 福建标准砂常规三轴试验验证

模拟的初始孔隙比 $e_0=0.73$ 。围压 σ_3 分别为 100, 200 kPa, 与本文的试验数据进行对比。

由图 7 可见, 模型的预测是合理的, 能较好地反映砂土变形特性同时受密度及围压双重影响, 围压越大, 剪胀越小, 初始孔隙比越大, 剪胀越小。

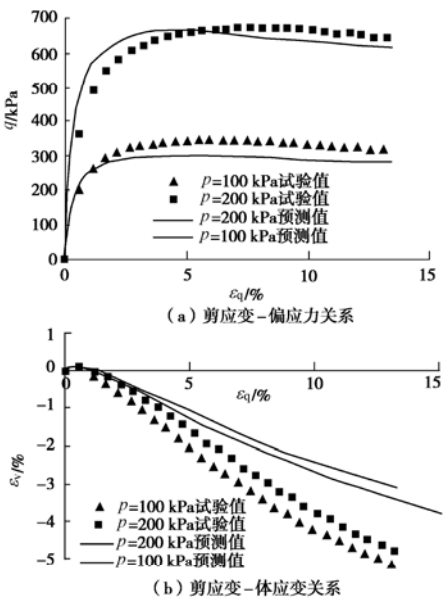


图 7 福建标准砂排水剪切模型预测结果

Fig. 7 Comparison between predicted and test results in drained triaxial tests on Fujian standard sand

3.2 建筑砂等 p 应力路径三轴试验验证

模拟的初始孔隙比 $e_0=0.66$, 平均正压力 p 分别为 150, 200, 250 kPa, 试验数据来自文献[16]。由图 8 可见, 模型的模拟是合理的。

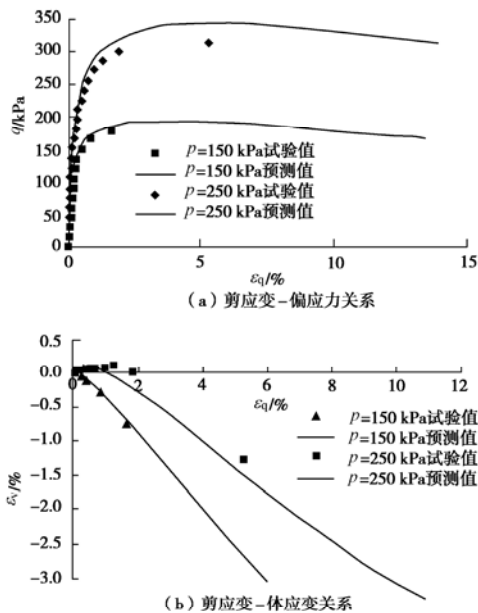


图 8 建筑砂排水剪切模型预测结果 ($p=150$ kPa)

Fig. 8 Comparison between predicted and test results in drained triaxial tests on construction sand ($p=150$ kPa)

4 结 论

(1) Rowe 剪胀和修正剑桥模型以及其他许多砂土模型中广泛采用的应力比 η 和剪胀 D 之间的唯一关系, 实际上并不存在; 这种假定阻碍了在大范围的密度和应力水平上建立松砂和密砂的统一本构模型。为了克服上述不足, 需要建立剪胀函数对材料内部状态的依赖关系。分析表明, 用状态参数作为模型的状态变量是合理而适当的, 状态依赖剪胀函数的通用表达式包含状态参数作为一个变量, 并与临界状态的基本概念相结合, 可以构建松砂和密砂的统一本构模型。

(2) 借鉴 Hashiguchi 次加载面模型的思想, 推导出与 Norsand 砂模型相同的增量形式的塑性剪应变硬化表达式。克服了剑桥模型只能反映剪缩, 无法反映剪胀的缺点, 能够模拟密砂的软化变形行为。

通过与常规三轴试验、等 p 压缩三轴试验的对比, 表明该模型是合理的、有效的。

参考文献:

- [1] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. Geotechnique, 2000, **50**(4): 449 - 460.
- [2] LI X S, DAFALGIAS Y F, WANG Z L. State dependent dilatancy in critical state constitutive modeling of sand[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1999, **36**(4): 559 - 611.

- [3] YASUFUKU N, MURATA H, HYODO M, AND HYDE A F L. A stress-strain relationship for anisotropically consolidated sand over a wide stress region[J]. Soils and Foundations, 1991, **31**(4): 75 - 92.
- [4] YASUFUKU N, MURATA H, AND HYODO M. Yield characteristics of anisotropically[J]. Geotechnique, 1985, **35**(2): 99 - 102.
- [5] BAUER E. Constitutive modeling of critical state in hypoplasticity[C]// Proceeding of the Fifth International Symposium on Numerical Models in Geomechanics. Davos, 1995: 15 - 20.
- [6] GUDEHUS G. A Comprehensive constitutive equation for granular material[J]. Soils and Foundations, 1996, **36**(1): 1 - 12.
- [7] 王金昌, 陈页开. ABAQUS 在土木工程中的应用[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2007: 55. (WANG Jin-chang, CHEN Ye-kai. Application of ABAQUS in civil engineering[M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2007: 55. (in Chinese))
- [8] BEEN K, JEFFERIES M G. The critical state of sands[J]. Geotechnique, 1991, **41**(3): 365 - 381.
- [9] JEFFERIES M G. Nor-sand: a simple critical state model for sand[J]. Geotechnique, 1993, **43**(1): 91 - 103.
- [10] WOOD D M, BELKHEIR K, SHEN C K. Strain softening and parameter for sand modeling[J]. Geotechnique, 1994, **44**(2): 335 - 339.
- [11] HASHIGUCHI K. Subloading surface model in unconventional plasticity[J]. Int J Solids Structure, 1989, **25**(8): 917 - 945.
- [12] HASHIGUCHI K. The extended flow rule in plasticity[J]. International Journal of Plasticity, 1997, **13**(1): 37 - 58.
- [13] HASHIGUCHI K, CHEN Z P. Elastoplastic constitutive equation of soils with the subloading surface and rotational hardening[J]. Int J Numer Anal Meth Geomech, 1998, **22**(2): 197 - 227.
- [14] HASHIGUCHI K, TSUTSUMI S. Shear band formation analysis in soils by the subloading surface model with tangential stress rate effect[J]. International Journal of Plasticity, 2003, **19**(10): 1651 - 1677.
- [15] RICHART F E JR, HALL J R, WOODS R D. Vibrations of soils and foundation[M]. Englewood Cliff: Prentice-Hall Inc, 1970.
- [16] 杨 杰. 砂土弹塑性_损伤本构关系的数值建模[D]. 武汉: 华中科技大学, 2005. (YANG Jie. Numerical modeling of the elastoplastic damage constitutive relations of sand[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2005. (in Chinese))