

封闭环境中群桩桩间横观各向同性土体固结解

高子坤¹, 施建勇²

(1. 莆田学院土木建筑系, 福建 莆田 351100; 2. 河海大学岩土工程研究所, 江苏 南京 210098)

摘要: 通过分析封闭环境中群桩基础成桩后, 桩间土体固结的边界条件和初始条件, 建立了场地边界径向渗流受到阻隔时, 饱和黏土中群桩桩间横观各向同性土体固结的定解条件, 应用数学物理方法求得该问题的级数解答。解答可以计算和预测成桩后, 桩间土体中任一位置任一时刻的超静孔隙水压力和固结度。当初始孔压为常数且假设桩间土体为各向同性时, 级数解答可退化为太沙基单向固结问题的解答, 验证了解答合理性。最后, 通过实例分析, 明确了桩间土体固结快慢的影响因素和规律。

关键词: 土体固结; 空间轴对称; 超静孔隙水压力; 级数解

中图分类号: TU473

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2008)10-1467-05

作者简介: 高子坤(1973-), 男, 博士, 毕业于河海大学土木工程学院, 主要从事岩土力学和地基基础方面研究。E-mail: gaoziku205@126.com。

Consolidation of soil among group-piles after pile sinking in enclosed field

GAO Zi-kun¹, SHI Jian-yong²

(1. Civil Engineering Department of Putian University, Putian 351100, China; 2. Geotechnical Research Institute of Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: The consolidation in saturated orthogonal anisotropic soil among group-piles was studied. Considering the initial distribution and the boundary conditions of excess pore water pressure caused by group-piles, the space consolidation model was established and the progression solutions could be found by using methods of mathematical physics in enclosed field. The solutions could give the results of consolidation degree and pore-water pressure at any point at any time. When the initial distribution of pore pressure was constant and the soil was isotropic, the reasonableness of the solutions was proved by the progression solutions, which could be degenerated to Terzaghi's one-dimensional consolidation solutions. Finally, practical engineering case was presented to illustrate the results and laws of the soil consolidation.

Key words: soil consolidation; space axial-symmetry; excess pore water pressure; progression solution

0 引言

文献[1]显示, 对于某些黏土或软黏土其承载力随时间的增长过程是非常漫长的, 可达十几年或数十年, 例如, 前苏联某挤土桩106 a极限摩阻力增长了2.5倍。预制桩成桩后其承载力随时间而变化的现象在20世纪20年代就被人们发现。胡中雄^[1]和童建国^[2]等对饱和黏性中的桩基进行了观测、试验和分析, 认为桩的竖向极限承载力随时间的增长而增长, 总的变化规律是初始增长速度快, 随后逐渐变缓, 并趋于某一极限值。桩的承载力时效主要受土的触变效应和土的固结时效的影响, 但从承载力的长期时效来说, 桩周土体固结是最主要的影响因素, 所以有必要深入研究桩周土体的固结规律。

姚笑青^[3]分析了桩间土中超孔隙水压力的分布及

大小, 建立了桩间土再固结模型, 用三维固结理论编制了差分法的计算程序, 并将计算的桩间土固结度增长与实测桩承载力的增长进行了对比, 两者的后期增长率吻合较好, 表明可由桩间土固结度的增长来预估桩承载力的增长。固结度与承载力的关系, 从某种程度上可以认为, 固结度随时间的变化和承载力随时间变化是相应的, 所以本文从土体固结的角度对封闭环境中群桩桩间正交各向异性(即横观各向同性)土体固结解展开研究。

所谓封闭环境是指大面积分布的群桩基础, 且桩基础周围的场地排水不畅或周围场地土为经过地基处理的低渗透性的其它已建土木工程基础。在封闭环境

基金项目: 青年人才项目(福建科技厅(2008F3094))

收稿日期: 2007-12-06

下, 群桩场地内固结渗流具有空间性, 但在工程场地以外区域渗流基本不受在建工程的压桩影响, 所以桩间土的固结特性不同于单桩桩周土体固结, 也不同于一般场地条件下的群桩基础桩间土体的固结, 需要根据其独特的边界条件单独研究。

1 定解条件的建立和求解

1.1 定解条件的建立

静压桩基础成桩后, 对于桩基础周围场地为渗透性很低的地层, 或为经地基处理的渗透系数很小的已建工程的地基基础, 其向桩基周围场地的径向排水将受到阻隔, 桩间土体固结排水模型可认为如图 1 所示, 即可通过研究桩基础中某一基桩的桩周土体的固结过程, 得到整个桩基础的固结规律。根据图 1, 设桩尖土体为不透水土层, 地面为自由排水面, 建立桩间横观各向同性土体的空间轴对称固结的微分方程^[4]如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_h \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (1)$$

边界条件:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_c} = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=H} = 0, \quad u|_{z=0} = 0, \quad (2)$$

初始条件:

$$u(r, z, t)|_{t=0} = u(r, z, 0) \quad (r_0 \leq r \leq r_c). \quad (3)$$

式中 $C_h = \frac{(1+\nu)}{3(1-\nu)} \frac{k_h}{m_v \gamma_w}$ 为三向固结时水平向固结系数; $C_v = \frac{(1+\nu)}{3(1-\nu)} \frac{k_v}{m_v \gamma_w}$ 为三向固结时竖直向固结系数; r_0 为桩的半径; γ' 为土的有效重度; r_c 为等效固结计算的区域; H 为桩长; u 为超静孔隙水压力; r 为径向坐标; z 为竖直方向坐标。

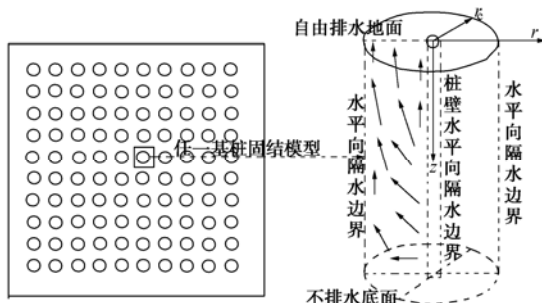


图 1 桩间土体空间轴对称固结模型

Fig. 1 Consolidation model of the soil among the piles

1.2 定解问题的求解

令 $u = R(r)Z(z)T(t)$ 代入式 (1) 可得

$$R(r)Z(z) \frac{\partial T}{\partial t} - C_h Z(z) T(t) \cdot$$

$$\left[\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right] - C_v T(t) R(r) \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0, \quad (4)$$

式 (4) 分离变量, 并考虑问题的边界条件可得

$$T' + \lambda C_h T = 0, \quad (5)$$

$$Z'' + \mu Z = 0, \quad (6)$$

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda - n\mu)r^2 R = 0, \quad (7)$$

式 (6) 的边界条件为 $Z|_{z=0} = 0, Z'|_{z=H} = 0$, 式 (7) 的

边界条件为 $R'|_{r=r_0} = 0, R'|_{r=r_c} = 0$, 式中 $T' = \frac{dT}{dt}$,

$$Z'' = \frac{d^2 Z}{dz^2}, \quad R' = \frac{dR}{dr}, \quad R'' = \frac{d^2 R}{dr^2}; \quad n = \frac{C_v}{C_h}; \quad \lambda, \mu \text{ 为分}$$

离变量时引入的参数。

式 (5) 的通解为

$$T(t) = Ae^{-\lambda C_h t}, \quad (8)$$

式 (6) $Z'' + \mu Z = 0$ 的通解为

$$Z(z) = C_1 \cos \sqrt{\mu} z + C_2 \sin \sqrt{\mu} z, \quad (9)$$

式中, C_1, C_2 为常数。

根据边界条件

$$Z|_{z=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow Z(z) = C_2 \sin \sqrt{\mu} z,$$

由于边界条件为齐次的, 使问题有非零解必须满足, $\mu > 0$, 所以由 $Z'|_{z=H} = 0$ 且 $C_2 \neq 0$ 可得

$$\sqrt{\mu} H = (2k-1) \frac{\pi}{2}, \quad (k=1, 2, 3, \dots),$$

$$\Rightarrow \mu_k = \frac{\pi(2k-1)}{4H^2}.$$

所以, 式 $Z'' + \mu Z = 0$ 的解答可表示为

$$Z_k(z) = C_k \sin \sqrt{\mu_k} z, \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad (10)$$

式 (7) 中, 当 $\alpha \neq 0$ 时, $r^2 R'' + rR' + (\lambda - n\mu)r^2 R = 0$ 为贝塞尔方程, 其通解为

$$R(r) = C_3 J_0(\alpha r) + C_4 Y_0(\alpha r). \quad (11)$$

式中 $\alpha = \sqrt{\lambda - n\mu}$; C_3, C_4 为常数; J_0 为零阶第一类贝塞尔函数; Y_0 为零阶第二类贝塞尔函数。

因为 $\frac{dJ_0(r)}{dr} = -J_1(r) \Rightarrow \frac{dR}{dr} = -C_3 J_1(\alpha r) - C_4 Y_1(\alpha r)$, 所以

$$R'|_{r=r_c} = 0 \Rightarrow C_4 = -C_3 \frac{J_1(\alpha r_c)}{Y_1(\alpha r_c)} \Rightarrow$$

$$R(r) = C_3 J_0(\alpha r) - C_3 \frac{J_1(\alpha r_c)}{Y_1(\alpha r_c)} Y_0(\alpha r).$$

式中 J_0, J_1 为零阶和一阶第一类贝塞尔函数; Y_0, Y_1 为零阶和一阶第二类贝塞尔函数。

从以上推导可知, 为使 $R'|_{r=r_0} = 0$ 时, 式 (11) 有非零解, 必须满足 $J_1(\alpha r_0) Y_1(\alpha r_c) - J_1(\alpha r_c) Y_1(\alpha r_0) = 0$ 。

可以证明, $J_1(\alpha r_0) Y_1(\alpha r_c) - J_1(\alpha r_c) Y_1(\alpha r_0) = 0$ 有

无穷多个正零点, 设为 $\alpha_i (i=1, 2, 3, \dots)$, 所以式 (11) 的特解可表示为

$$R_i(r) = C_i J_0(\alpha_i r) - C_i \frac{J_1(\alpha_i r_e)}{Y_1(\alpha_i r_e)} Y_0(\alpha_i r) \quad , \quad (12)$$

当 $\alpha=0$ 时, $\lambda=n\mu$, 式 (7) 化为

$$r^2 R'' + r R' = 0 \quad , \quad (13)$$

显然, 满足边界条件: $R'|_{r=r_w} = 0, R'|_{r=r_e} = 0$ 时, 式 (13) 的特解为

$$R_0(r) = \text{Const.} \quad , \quad (14)$$

由式 (8)、(10)、(12) 和 (14) 定解问题的解答可写为级数形式:

$$\begin{aligned} u(r, z, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} C_k C_0 \sin(\sqrt{\mu_k} z) A_{k,0} e^{-\lambda_{k,0} C_h t} + \\ &\quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_k C_i M_i \sin(\sqrt{\mu_k} z) A_{k,i} e^{-\lambda_{k,i} C_h t} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} C_{k,0} \sin(\sqrt{\mu_k} z) e^{-\lambda_{k,0} C_h t} + \\ &\quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{k,i} M_i \sin(\sqrt{\mu_k} z) e^{-\lambda_{k,i} C_h t} \quad , \quad (15) \end{aligned}$$

式中, $M_i = \left[J_0(\alpha_i r) - \frac{J_1(\alpha_i r_e)}{Y_1(\alpha_i r_e)} Y_0(\alpha_i r) \right]$, $\lambda_{k,0} = n\mu_k$, $\lambda_{k,i} = \alpha_i^2 + n\mu_k$, $k, i=1, 2, 3, \dots$ 。

对于式 (15), 当 $t=0$ 时, 初始条件可表示如下:

$$u(r, z, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{k,0} \sin(\sqrt{\mu_k} z) +$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{k,i} \left[J_0(\alpha_i r) - \frac{J_1(\alpha_i r_e)}{Y_1(\alpha_i r_e)} Y_0(\alpha_i r) \right] \sin(\sqrt{\mu_k} z) ,$$

可以证明

$$\left\{ \sin(\sqrt{\mu_k} z) , \left[J_0(\alpha_i r) - \frac{J_1(\alpha_i r_e)}{Y_1(\alpha_i r_e)} Y_0(\alpha_i r) \right] \sin(\sqrt{\mu_k} z) \right\} (k=1, 2, 3, \dots; i=1, 2, 3, \dots) .$$

构成以 r 为权值的完备正交系, 即当 $\alpha_{i1} \neq \alpha_{i2}$ 或 $\mu_{k1} \neq \mu_{k2}$ 时:

$$\int_0^{r_e} \int_0^H M_{i1} M_{i2} \sin(\sqrt{\mu_{k1}} z) \sin(\sqrt{\mu_{k2}} z) r dr dz = 0 \quad ,$$

$$\int_0^{r_e} \int_0^H \sin(\sqrt{\mu_{k1}} z) \sin(\sqrt{\mu_{k2}} z) r dr dz = 0 \quad ,$$

当 $k_1 = 1, 2, 3, \dots; k_2 = 1, 2, 3, \dots$ 时:

$$\int_0^{r_e} \int_0^H M_{i1} \sin(\sqrt{\mu_{k1}} z) \sin(\sqrt{\mu_{k2}} z) r dr dz = 0 \quad ,$$

式中, $M_{i1} = \left[J_0(\alpha_{i1} r) - \frac{J_1(\alpha_{i1} r_e)}{Y_1(\alpha_{i1} r_e)} Y_0(\alpha_{i1} r) \right]$,

$$M_{i2} = \left[J_0(\alpha_{i2} r) - \frac{J_1(\alpha_{i2} r_e)}{Y_1(\alpha_{i2} r_e)} Y_0(\alpha_{i2} r) \right] .$$

根据以上正交性, 式 (15) 的系数可表示为

$$\left. \begin{aligned} C_{k,i} &= \frac{\int_0^{r_e} \int_0^H u(r, z, 0) M_i \sin(\sqrt{\mu_k} z) r dr dz}{\int_0^{r_e} \frac{H}{2} \frac{[J_0(\alpha_i r) Y_1(\alpha_i r_e) - Y_0(\alpha_i r) J_1(\alpha_i r_e)]^2}{J_1^2(\alpha_i r_e)} r dr} \quad , \\ C_{k,0} &= \frac{\int_0^{r_e} \int_0^H u(r, z, 0) r \sin(\sqrt{\mu_k} z) dr dz}{\int_0^{r_e} \int_0^H r \sin^2(\sqrt{\mu_k} z) dr dz} \quad , \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中, $M_i = J_0(\alpha_i r) - \frac{J_1(\alpha_i r_e)}{Y_1(\alpha_i r_e)} Y_0(\alpha_i r)$ 。

由式 (15) 可定义研究区域的固结度

$$U(t) = 1 - \frac{\int_0^{r_e} \int_0^H u(r, z, t) r dr dz}{\int_0^{r_e} \int_0^H u(r, z, 0) r dr dz} \quad . \quad (17)$$

2 退化为单向固结问题

以上求解的式 (15)、(17) 为一般解答, 其初始条件可为任意函数。特别, 当 $u(r, z, 0) = u_0$ 为常数时:

$$\int_0^{r_e} \int_0^H u_0 M_i \sin(\sqrt{\mu_k} z) r dr dz = 0 \quad ,$$

所以, 由式 (16) 知: $C_{k,i} = 0$, 且

$$C_{k,0} = \frac{\int_0^{r_e} \int_0^H u_0 r \sin(\sqrt{\mu_k} z) dr dz}{\int_0^{r_e} \int_0^H r \sin^2(\sqrt{\mu_k} z) dr dz} = \frac{4u_0}{\pi(2k-1)} \quad ,$$

将 $C_{k,i}, C_{k,0}$ 代入式 (15), 并假设土体为各向同性, 即

$n = \frac{C_v}{C_h} = 1$, 即可得太沙基单向固结公式

$$u(r, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4u_0}{\pi(2k-1)} \sin(\sqrt{\mu_k} z) e^{-\lambda_{k,0} C_h t} \quad . \quad (18)$$

由上述分析可知, 当初始孔隙水压力为均匀分布时, 式 (15) 可退化为单向固结问题的解, 验证了上述解答的合理性。

3 实例分析

上海某试桩资料^[3]: 试验用桩为一个 $d \times d = 50 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$ 的混凝土方桩, 桩体自重 125 kN, 入土深度 24.5 m。桩群范围为 15 m $\times$ 15 m, 桩距 1.5 m。成桩 409 d 后的固结度为 92%。

取桩入土深度为计算深度, 以层厚为权重加权平均的计算参数值如下:

$$\gamma' = 7.97 \text{ kN/m}^3; E_s = 3.53 \times 10^3 \text{ kN/m}^2; k_v = 1.30 \times 10^{-4}$$

$$(\text{m} \cdot \text{d}^{-1}); k'_h = \frac{2}{3} k_h = 8.64 \times 10^{-4} (\text{m} \cdot \text{d}^{-1}); \nu = 0.48; c_u =$$

$$12.4 \text{ kPa}; C_v = \frac{(1+\nu)k_v E_s}{3(1-\nu)\gamma_w} = 0.0309 (\text{m}^2 \cdot \text{d}^{-1}); C_h =$$

$$\frac{(1+\nu)k'_h E_s}{3(1-\nu)\gamma_w} = 0.26 (\text{m}^2 \cdot \text{d}^{-1}) .$$

几何参数: 桩长, $H = 24.5 \text{ m}$; $r_0 = \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{\pi}} = 0.28 \text{ m}$; $r_c = \sqrt{\frac{1.5 \times 1.5}{\pi}} = 0.84 \text{ m}$ 。

初始条件确定: 姚笑青^[3]和唐世栋^[5]研究表明, 桩距较小、沉桩速率较快时, 桩群内超孔隙水压力瞬时可能达 $(15 \sim 2.0) \gamma' h$, 有的甚至达到 $(3 \sim 4) \gamma' h$, 这就是孔压叠加的结果。由于这很高的超孔隙水压力, 导致土中竖向有效应力等于 0, 土中出现横向裂缝, 裂缝致使超孔隙水压力迅速消散, 裂缝闭合, 整个桩群内超孔隙水压力趋于一个稳定值 $\gamma' h + c_u$ (横向裂缝处为 $\gamma' h$)。唐世栋、王永兴等^[6]也认为, 群桩基桩周围超孔隙水压力的分布规律和影响范围, 主要受到水裂作用的限制, 为分析群桩桩间土中初始超孔隙水压力的分布规律提供了依据。根据上述分析, 取初始条件为

$$u(r, z, t)|_{t=0} = \gamma' z + c_u \quad (r_0 \leq r \leq r_c) \quad (19)$$

式 (19) 与空间坐标 r 无关, 这种初始条件的假设适用于桩间距较小的群桩基础。对于桩间距较大的情况, 水裂作用局限于紧靠基桩周围的局部区域, 初始超静孔隙应力分布应与径向坐标有关, 此时, 需要对初始孔压进行专门的研究和测试。

由式 (15)、(17) 和 (18) 结合以上各计算参数进行计算。计算过程中, 对工程实例的某个土性或几何参数进行调整, 其它参数保持不变, 求解可得图 2~6。由图可知, 计算参数, 特别是竖向向渗透系数对固结度影响很大, 这是封闭环境下成桩后土体固结的特性。总体上看, 各计算参数对固结度计算结果的影响都主要从对固结系数的影响体现出来。

由图 2~6 还可知, 桩间土在 4500 d 的固结度基本上达不到 92%, 即其固结过程是非常漫长的, 与实际成桩 409 d 后的固结度为 92% 明显不同。

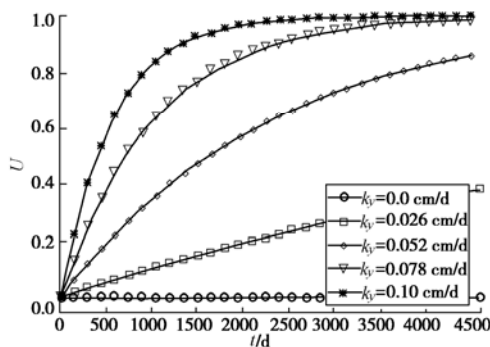


图 2 竖向方向渗透系数的变化对固结度的影响

Fig. 2 Degrees of consolidation under variable coefficients of vertical permeability

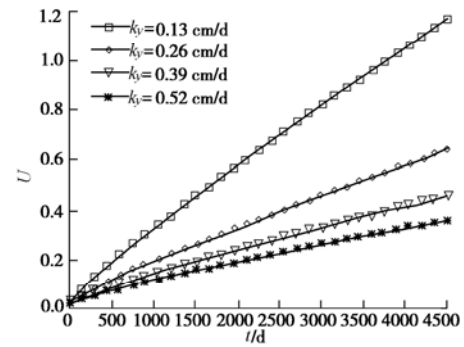


图 3 径向渗透系数的变化对固结度的影响

Fig. 3 Degrees of consolidation under variable coefficients of radial permeability

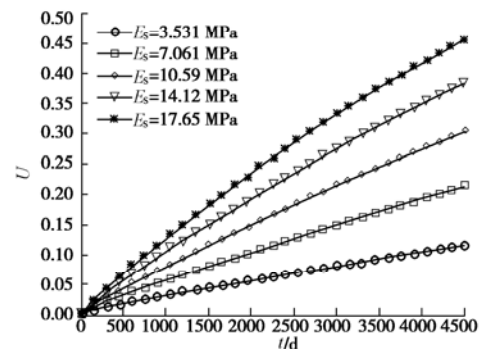


图 4 压缩模量的变化对固结度的影响

Fig. 4 Degrees of consolidation under variable moduli of compressibility

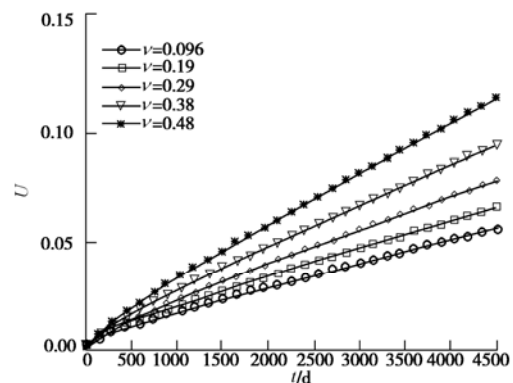


图 5 泊松比的变化对固结度的影响

Fig. 5 Degrees of consolidation under variable Poisson's ratios

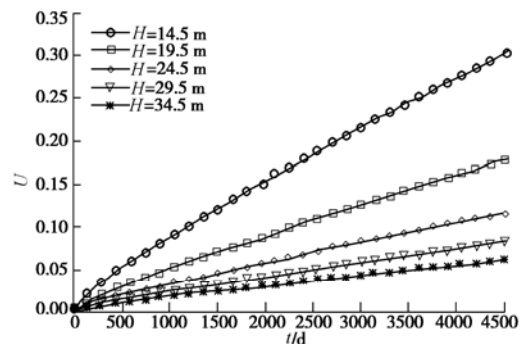


图 6 桩长的变化对固结度的影响

Fig. 6 Degrees of consolidation under variable length of pile

在封闭环境下, 根据式(15), 场地内部仍然可能存在水平渗流固结, 但场地边界上的排水受到阻隔, 因此水平向渗透系数对土体固结的影响也不同于一般情况, 图3表示径向渗透系数的变化对固结度计算结果的影响, 由图可知, 其影响较小, 且随水平向渗透系数的增大, 同一时刻的固结度计算结果反而减小, 这是由于径向渗透系数会对固结比 $n = C_v/C_h$ 产生影响, 从而影响级数解答的收敛速度和固结度的计算结果。

4 结 语

推导了封闭环境下, 饱和软土中静力压桩引起的群桩桩间横观各向同性土体固结问题的二维级数解答, 能够有效计算和预测群桩基础成桩后, 桩间土体中任一位置任一时刻的超静孔隙水压力和研究区域的固结度。

本文解答是针对初始孔压为任意函数的条件下得出的一般解答, 当初始条件为常数且假设桩间土体为各向同性时, 该解答可退化为太沙基单向固结问题的解答。通过实例计算分析, 得出了计算参数对固结度影响的可能规律, 并解释了在某些条件下, 成桩后桩间土体的固结过程非常漫长的原因。

超静孔隙水压力和固结度可进一步用于计算饱和软土中随时间变化的桩的承载力。特别, 对于群桩基础的承载力时效的定量确定是很难用试验来实现的, 所以通过计算群桩基础的固结度, 来换算承载力的时间效应, 提供了解决该问题的较为有效的办法。

参考文献:

- [1] 胡中雄. 饱和软黏土中单桩承载力随时间的增长[J]. 岩土工程学报, 1985, 7(3): 58 - 61. (HU Zhong-xiong. The time-related increases of bearing capacity of single pile in saturated soft clay[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering[J]. 1985, 7(3): 58 - 61. (in Chinese))
- [2] 童建国. 单桩承载力时间效应的试验分析[C]// 浙江省第五届土力学及基础工程学术讨论会论文集. 杭州: 浙江大学出版社, 1992: 65 - 69. (Tong Jian-guo. Experimental analysis of time effect for bearing capacity of single pile[C]// Proceedings of the 5th Soil Mechanics and Foundations Colloquium. Ningbo: Zhejiang University Press, 1992: 65 - 69. (in Chinese))
- [3] 姚笑青. 桩间土的再固结与桩承载力的时效[J]. 上海铁道大学学报(自然科学版), 1997, 18(4): 91 - 94. (YAO Xiao-qing. The reconsolidation of the soil among piles and the time effect of pile bearing capacity[J]. Journal of Shanghai Tiedao University (Natural Science), 1997, 18(4): 91 - 94. (in Chinese))
- [4] 赵维炳, 施建勇. 软土固结与流变[M]. 南京: 河海大学出版社, 1996. (ZHAO Wei-bing, SHI Jian-yong. Consolidation and rheology of soft soil[M]. Nanjing: Hohai University Press, 1996. (in Chinese))
- [5] 唐世栋. 用有效应力原理分析桩基承载力的变化全过程[D]. 上海: 同济大学, 1990. (TANG Shi-dong. Analysis on the complete variation process of bearing capacity of pile footing using principle of effective stress[D]. Shanghai: Tongji University, 1990. (in Chinese))
- [6] 唐世栋, 王永兴, 等. 饱和软土地基中群桩施工引起的超孔隙水压力[J]. 同济大学学报, 2003, 31(11): 1290 - 1294. (TANG Shi-dong, WANG Yong-xing, et al. Excess pore water pressure caused by installing pile group in saturated soft soil[J]. Journal of Tongji University, 2003, 31(11): 1290 - 1294. (in Chinese))
- [7] TYN MYINT. 数学物理方程[M]. 杨年钧, 姜广良, 允全德, 译. 沈阳: 辽宁科学技术出版社, 1985. (TYN MYINT. Differential equations in mathematical physics[M]. YANG Nian-jun, JIANG Guang-liang, YUN Quan-de, trans. Shenyang: Liaoning Science & Technology Publishing House, 1985. (in Chinese))