



基于 SMP 的粒状材料各向异性强度准则

张连卫, 张建民, 张 嘎

(1. 清华大学土木水利学院岩土工程研究所, 北京 100084; 2. 清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点试验室, 北京 100084)

摘 要: 基于 SMP 准则, 假定不同平面上的摩擦角随该平面与沉积面之间的夹角变化, 提出了一般应力条件下各向异性粒状材料的强度准则, 称为 ASMP 准则, 给出了该强度准则在横观各向同性条件下的表达式。对两种典型条件下各向异性砂土强度特性的模拟结果表明, ASMP 准则能够较好的反映粒状材料在一般应力条件下的强度变化规律, 尤其是材料主轴与应力主轴成任意角度时的强度变化。在此基础上, 进一步提出了该各向异性强度准则在典型条件下的实用表达式。

关键词: 粒状材料; 各向异性; 强度准则; 空间滑动面

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2008)08-1107-05

作者简介: 张连卫(1978-), 男, 山东无棣人, 博士研究生, 主要从事粒状材料各向异性方面的研究。E-mail: zhanglianwei01@mails.tsinghua.edu.cn。

SMP-based anisotropic strength criteria of granular materials

ZHANG Lian-wei, ZHANG Jian-min, ZHANG Ga

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2. State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Assuming that the friction angle on different slip planes varied with the angle between the slip plane and bedding plane, an anisotropic strength criterion was established based on the concept of SMP. The formulation for cross-anisotropic granular materials was then derived. The capability of the newly developed strength criterion, named as ASMP, was examined by comparison between the results of simulation with ASMP and the available experimental data under two typical conditions. It was shown that the anisotropic strength criterion could capture the variation of the shear strength under general stress conditions, especially when the direction of deposition varied arbitrarily. The practical formulations under the above two conditions were also presented.

Key words: granular material; anisotropy; strength criterion; SMP

0 引 言

砂土、粉末等是典型的粒状材料。这类材料具有不同程度的强度各向异性, 对由该类材料形成的结构体的稳定性有重要影响。例如, Oda 的模型试验证实, 不考虑地基土的强度各向异性可能会导致过高估计地基承载力 30%~50%, 使得工程设计偏于危险^[1]。因此, 准确评价由粒状材料构成的结构体(如地基)的安全性, 有赖于在材料强度准则中合理考虑各向异性的影响。目前对于粒状材料强度各向异性的认识尚不充分, 还没有实用的各向异性强度准则, 安全性分析仍多采用基于各向同性假定的强度准则。因此, 深入揭示粒状材料强度各向异性的规律与物理本质, 建立物理概念明确、参数易于确定的各向异性强度准则, 具有重要的理论意义和实用价值。

为揭示粒状材料的强度规律, 人们进行了大量试

验研究, 例如 Yamada 和 Ishihara^[2]以及 Abelev 和 Lade^[3]进行的真三轴试验, Arthur 等^[4]、Tatsuoka 等^[5-6]以及 Yasin 等^[7]进行的平面应变试验, 以及王洪瑾和张国平等^[8]进行的空心圆柱扭剪试验等。这些研究均表明, 在其他条件相同时, 大主应力面与沉积面重合时的抗剪强度最高; 抗剪强度整体上随大主应力方向角(大主应力面与沉积面的夹角)的增大而降低, 具体变化形式因粒状材料的种类不同、试验方法不同而有所区别。Oda^[1]与 Tatsuoka 等^[5-6]的试验表明, 丰浦砂在平面应变条件下的最小抗剪强度出现在大主应力方向角 $\delta = 56^\circ \sim 67^\circ$ 时, 当 δ 继续增加, 直到 90° 时, 抗

基金项目: 国家自然科学基金项目(50478016); 北京市自然科学基金重点项目(8061003)

收稿日期: 2007-09-07

剪强度有所提高。这种情况在平面应变条件下较为常见。与平面应变条件相比,粒状材料在常规三轴条件下的抗剪强度各向异性程度较弱,并且当大主应力面与沉积面垂直时的抗剪强度最低:即 δ 从 0° 变化到 90° 时,中间不存在反弯点。

粒状材料所表现出的宏观力学特性从根本上受其细观组构特征控制。针对粒状材料细观组构的研究发现,引起粒状材料强度各向异性的根本原因是沉积过程中形成的以颗粒定向排列为主的细观组构各向异性特征。这使得与沉积面成不同倾角的斜面上摩擦角随倾角大小发生变化。

基于已有研究成果,已经建立了一些可反映各向异性的强度准则,但大多缺乏明确的物理含义并且适用范围有限。Casagrande 等^[9]根据黏土不排水三轴试验结果提出了黏聚力随加载方向变化的经验公式。Lo^[10]在针对各向异性黏土边坡进行稳定性分析时对该公式作了修改。后来在各向异性边坡稳定性分析中大量采用的各向异性强度准则大多是在此基础上修改而来。陈越^[11]在 Mohr-Coulomb 强度准则基础上,从土单元极限平衡分析的角度建立了平面应变条件下的各向异性强度准则,但无法反映中主应力的影响,不适用于一般应力条件。Abelev 等^[12]提出了绕主应力空间原点旋转的应力变换方法,在 Lade-Duncan 强度准则基础上,建立了适用于 K_0 固结的砂土与正常固结黏土材料的强度准则,但仅适用于应力主轴与材料主轴重合的情况。

适用于一般应力条件的各向异性强度准则应该能够合理反映中主应力的影响。现有的各向同性强度准则中只有 Matsuoka 等^[13]提出的空间滑动面 (SMP) 准则与 Lade-Duncan 准则^[14]对此描述较好。考虑到空间滑动面 (SMP) 准则具有明确的物理意义,本文通过推广空间滑动面概念,提出了一种适用性较广的各向异性强度准则。

1 基于 SMP 的三维各向异性强度准则

在如图 1 所示的主应力空间内,定义任意方向的平面 ABC 为广义空间滑动面。该平面与 3 个主应力面分别相交于 AB , BC , AC 。定义分别过这 3 条线并且与主应力轴平行的平面为广义组合滑动面,如图 1 中平面 ABE , BCF 与 ACG 所示。广义空间滑动面 ABC 的法线方向 n 可用相应的 3 个广义组合滑动面 ABE , BCF 与 ACG 与主应力轴的夹角 α , β 和 γ 表示。

在当前应力状态下,对任意给定的广义空间滑动面 ABC ,可导出各广义组合滑动面上的剪正应力比。分别记为 r_{AB} , r_{BC} 和 r_{CA} ,均为当前应力张量与 n 的函数。以 φ_{AB} , φ_{BC} 和 φ_{CA} 分别表示 3 个广义组合滑动面

上的摩擦角,本文定义广义空间滑动面上的抗剪强度发挥系数为

$$F(\sigma, n) = \left(\frac{r_{AB}}{\tan \varphi_{AB}} \right)^2 + \left(\frac{r_{BC}}{\tan \varphi_{BC}} \right)^2 + \left(\frac{r_{CA}}{\tan \varphi_{CA}} \right)^2 \quad (1)$$

该系数反映了在当前应力状态下给定广义空间滑动面 ABC 上的强度发挥程度。当 $F(\sigma, n)$ 达到某固定值时,在该广义空间滑动面上达到极限平衡。只要有一个广义空间滑动面上达到极限平衡,则整个材料单元达到破坏应力状态。若以 $F_{\max}(\sigma, n)$ 表示在当前应力状态下,材料单元内任意广义空间滑动面上强度发挥系数的最大值,则随着应力状态的变化,当 $F_{\max}(\sigma, n)$ 达到某固定值 c 时,材料单元达到极限平衡状态。该固定值 c 的大小可通过对各向同性材料的如下分析得到。

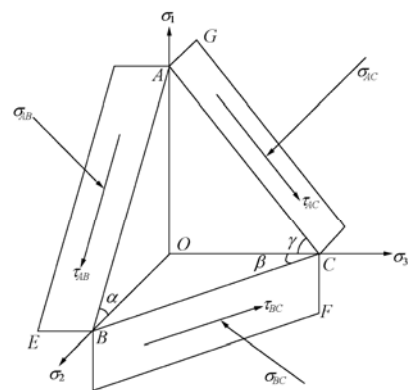


图 1 广义空间滑动面与广义组合滑动面

Fig. 1 Generalized spatial sliding plane and generalized compound sliding plane

各向同性条件下,广义组合滑动面上摩擦角与方向无关,此时 $F(\sigma, n)$ 可写为

$$F(\sigma, n) = \frac{r_{AB}^2}{\tan^2 \varphi} + \frac{r_{BC}^2}{\tan^2 \varphi} + \frac{r_{CA}^2}{\tan^2 \varphi} \quad (2)$$

对式 (2) 求极值,解以下偏微分方程

$$\frac{\partial F(\sigma, n)}{\partial n} = 0 \quad (3)$$

可得

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_2}} \\ \tan \beta &= \frac{\sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_3}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

结合 SMP 在主应力空间中的位置,可知式 (4) 说明在应力状态给定的情况下, SMP 上的强度发挥系数最大。考虑到 SMP 准则可写为

$$\frac{\tan^2 \varphi_{12}}{\tan^2 \varphi} + \frac{\tan^2 \varphi_{23}}{\tan^2 \varphi} + \frac{\tan^2 \varphi_{31}}{\tan^2 \varphi} = 2 \quad (5)$$

可推断当 $F_{\max} = 2$ 时,粒状材料达到破坏应力状态。式 (5) 中 φ_{12} , φ_{23} 与 φ_{31} 分别为 3 个组合滑动面上的

起动摩擦角。

综合以上分析, 各向异性粒状材料在一般应力条件下的强度准则可表示为

$$F_{\max}(\sigma, n) = 2 \quad (6)$$

与 $F_{\max}(\sigma, n)$ 所对应的广义空间滑动面不仅受应力状态的影响, 还受到材料主轴在主应力空间中方向的影响, 因此该平面不同于空间滑动面 (SMP)。为与空间滑动面区别起见, 可将该平面称为各向异性空间滑动面 (ASMP)。相应的, 把式 (6) 所示的强度准则称为各向异性空间滑动面 (ASMP) 准则。

求解式 (6) 需要给出摩擦角的变化规律。在各向异性粒状材料中, 任意平面上的摩擦角不仅受平面的法线方向影响, 还受剪切方向的影响。本文仅考虑较为常见的横观各向异性材料, 认为任意平面上的摩擦角仅与其法线方向有关, 忽略剪切方向的影响。若以 m 表示沉积面在主应力空间中的单位法线矢量, n_c 表示某广义组合滑动面的单位法线矢量, 则该面上的摩擦角 φ_c 可表示为 m 与 n_c 之间夹角的函数。为简单起见, 采用松冈元等^[11]所建议的线性假定。

$$\tan \varphi_c = \tan \varphi_0 + k\lambda \quad (7)$$

式中, φ_0 与 k 为材料参数, φ_0 表示最小摩擦角, k 的大小反映了强度各向异性的程度。 $\lambda = \cos^{-1}(m \cdot n_c)$, 为 m 与 n_c 之间的夹角, 单位为弧度。

2 ASMP 的验证

式 (6) 难以求得解析解, 需要采用数值方法求解。本文编制了相应的数值计算程序, 在给定沉积面单位法线矢量 m 及其他边界条件的前提下, 对式 (1)、(6)、(7) 组成的方程组求解, 可得到相应的破坏应力状态。下面将针对两种典型加载条件验证该强度准则的有效性。

2.1 应力主轴与材料主轴重合的情况

本文模拟了 Abelev 等^[3]针对 Santa Monica 海滩砂进行的真三轴试验结果。试样沿 Z 向沉积, 故此时 $m = \{0, 0, 1\}^T$ 。

图 2 给出了分别采用 SMP 准则与 ASMP 准则模拟的结果。实心数据点为根据 Abelev 等^[3]所给出的 $b - \varphi$ 试验结果绘制, 其中 b 为中主应力系数, φ 为按照 Mohr - Coulomb 强度准则估计的内摩擦角。SMP 准则的参数由三轴压缩状态所对应的数据点得到, $k_f = 17.4$ 。ASMP 准则的参数为 $\varphi_0 = 38^\circ$, $k = 0.12$ 。模拟结果表明: ①当小主应力位于水平向 (第 I、II 象限与第 V、VI 象限) 时, SMP 准则与 ASMP 准则均与试验结果非常接近; ②当小主应力位于竖直方向 (第 III、IV 象限) 时, 由于 SMP 准则未考虑材料的各向异性, 相对过高的估计了材料的抗剪强度, ASMP

准则模拟效果相对较好。

2.2 平面应变条件

为验证在平面应变条件下 ASMP 的模拟能力, 本文模拟了 Tatsuoka 等^[5]针对饱和丰浦砂进行的平面应变试验结果。图 3 所示为取强度参数 $\varphi_0 = 33^\circ$, $k = 0.2$ 的模拟效果。需要指出的是, Tatsuoka 等^[5]的试验并未测量中主应力的大小。本文根据 Yasin 等^[7]的试验结果取 $b = 0.33$ 计算中主应力。考虑到试验结果的离散性, 可以认为 ASMP 准则可较好的模拟平面应变条件下各向异性粒状材料的强度特性。

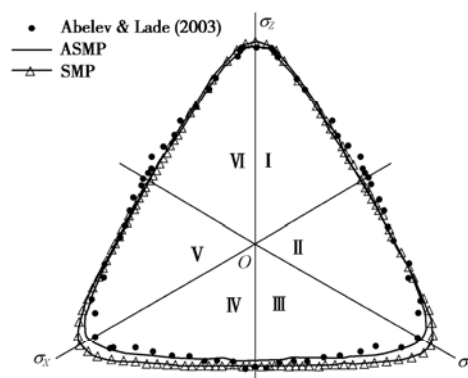


图 2 π 平面上的强度包线模拟效果

Fig. 2 Simulation of the experimental data from Abelev and Lade (2003) using SMP and ASMP respectively

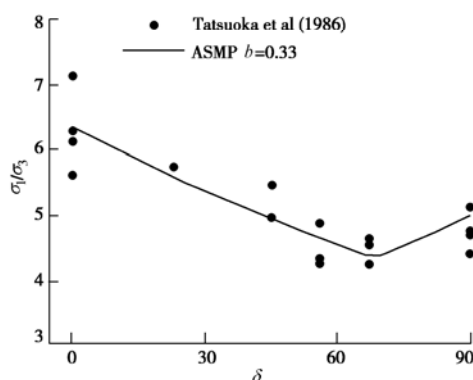


图 3 平面应变条件下 ASMP 验证

Fig. 3 Simulation of the experimental data from Tatsuoka et al (1986) using ASMP

3 ASMP 在常见条件下的实用表达式

ASMP 准则需要通过数值方法求解偏微分方程, 不利于工程应用, 有必要给出其在常见边界条件下的实用表达式。

3.1 应力主轴与材料主轴重合时的实用表达式

比较图 2 所示 SMP 与 ASMP 对同一组试验数据的模拟结果, 可发现在应力主轴与材料主轴重合的情况下, ASMP 的强度包线相当于将 SMP 的强度包线向

σ_z 方向平移一定距离, 并作相应缩放。因此可采用式 (8) 对原应力张量进行变换。

$$\bar{\sigma}_{ij} = p\delta_{ij} + p(r_{ij} - r_{ij,0}) \quad (8)$$

式中, r_{ij} 为原应力张量的偏应力比张量, $r_{ij,0}$ 为移动后强度包线的对称中心, 可根据沉积方向为竖直方向的常规三轴压缩试验结果与三轴伸长试验结果计算。

若常规三轴压缩试验得到的破坏应力比为 M_{TC} , 三轴伸长试验得到的破坏剪应力比为 M_{TE} , 则 $r_{ij,0}$ 与原 π 平面的中心之间的距离为

$$d = M_{TC} - (M_{TC} + M_{TE}) \frac{3 + \sin \bar{\varphi}}{6} \quad (9)$$

式中, $\bar{\varphi}$ 为在变换后的应力空间中, 材料的表观内摩擦角。根据各向同性材料 π 平面上破坏包线的几何含义, 可知 $\bar{\varphi}$ 与 M_{TC} , M_{TE} 之间满足:

$$M_{TC} + M_{TE} = \frac{36 \sin \bar{\varphi}}{9 - \sin^2 \bar{\varphi}} \quad (10)$$

由几何关系, 可得

$$r_{ii,0} = \frac{d}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

变换后, ASMP 准则形式上与 SMP 准则一致, 只需要以变换应力张量的不变量 $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$ 和 $\bar{I}_3$ 分别替换原应力张量的 3 个不变量, 并以新的强度参数 $\bar{k}_f$ 替换 k_f 。其中 $\bar{k}_f$ 的估计方法也与 SMP 准则完全相同, 可表示为

$$\bar{k}_f = 8 \tan^2 \bar{\varphi} + 9 \quad (12)$$

采用该变换应力张量方法对 ASMP 准则的模拟结果示于图 4 (a), 两者非常接近。其中变换应力法所采用的参数 $\bar{\varphi} = 40.3^\circ$, $\bar{k}_f = 14.7$; ASMP 准则采用的参数同上模拟 Abelev 等^[3]试验结果所采用的参数。

3.2 平面应变条件下的实用表达式

观察到图 3 中 ASMP 准则预测的强度与大主应力方向角 δ 的关系基本为分段线性, 表示为

$$\tan \varphi(\delta) = \frac{1}{2} \left(\tan \varphi_1 + \tan \varphi_2 - \tilde{k} \frac{\pi}{2} + |f(\delta)| \right) \quad (13)$$

式中, $\tilde{k}$ 为强度各向异性参数, φ_1 与 φ_2 分别为大主应力方向角 $\delta = 0^\circ$, 90° 时的表观摩擦角, 均通过试验得到。

$$f(\delta) = \tan \varphi_1 - \tan \varphi_2 + \tilde{k} \frac{\pi}{2} - \tilde{k} \delta \quad (14)$$

$\tilde{k}$ 则可估计为

$$\tilde{k} = \frac{\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2}{\frac{\pi}{2}} \frac{180^\circ}{\pi} \quad (15)$$

按照上述近似公式对 ASMP 准则进行了模拟, 所采用的参数为 $\varphi_1 = 46.7^\circ$, $\varphi_2 = 41.9^\circ$ 。ASMP 准则采用的参数同上模拟 Tatsuoka 等^[5]试验结果所采用的

参数。模拟效果示于图 4 (b), 表明近似公式与 ASMP 准则的模拟结果非常接近。

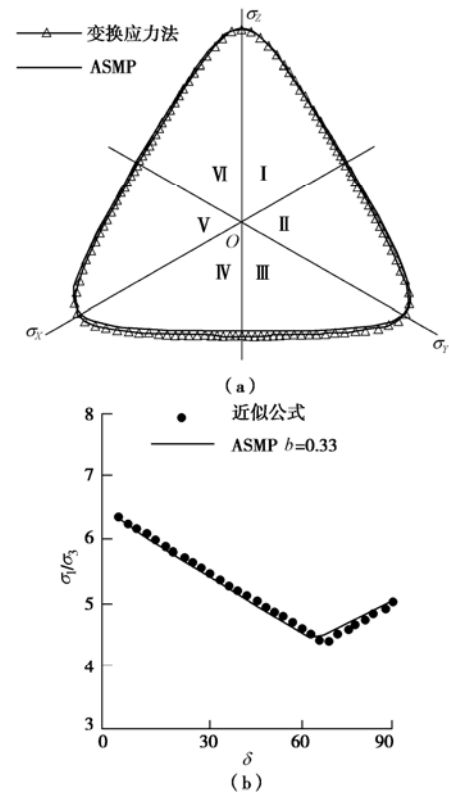


图 4 ASMP 准则在两种典型条件下的近似公式验证

Fig. 4 Demonstration of the approximate failure criterion under two typical conditions

4 讨 论

ASMP 既能反映应力主轴与材料主轴重合时的强度变化规律, 又能反映平面应变条件下强度随大主应力方向角 δ 变化的规律。实际上 ASMP 准则可给出沉积面法线与应力主轴成任意角度时的强度变化规律。图 5 所示为当沉积面法线方向不同时 ASMP 准则在 π 平面上的强度包线。

图 5 反映了两点特征: ①当沉积面法线与主应力空间中的空间对角线重合时 (图 5 (a) 中 $\omega = 54.7^\circ$), 各向异性粒状材料的强度包线类似于各向同性材料; ②当沉积面法线方向既不与材料主轴重合, 也不与空间对角线重合时 (图 5 (b) 中 $\omega = 30^\circ$), π 平面上的强度包线不具有对称性。

需要指出, ASMP 准则的具体表达形式依赖于其基本假定: 与沉积面夹角为 ξ 的平面上, 摩擦角与 ξ 之间的关系具有唯一性, 忽略在该平面上具体剪切方向的影响。目前还没有试验能够在严格意义上直接验证该假定的合理性。但是, ASMP 准则能较好地反映强度变化规律, 间接证实了该假定在一定程度上具有合

理性。当然, 更为准确地描述粒状材料的强度特性, 应当考虑到剪切方向的影响, 这还有待于进一步研究。

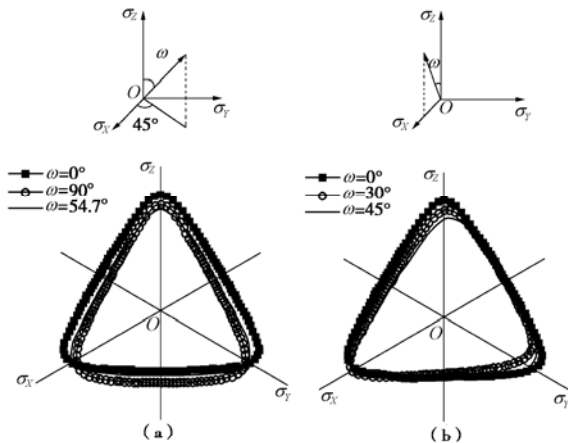


图5 沉积面法线取不同方向时 π 平面上的强度包线

Fig. 5 Failure envelopes of ASMP on octahedral plane with different directions of the bedding plane

5 结 语

在 SMP 基础上, 假定不同平面上的摩擦角随该平面与沉积面之间的夹角变化, 提出了各向异性粒状材料的强度准则, 称为 ASMP 准则, 具有以下 3 个特点。

(1) 适用范围广, 不仅适用于应力主轴与材料主轴重合的情况, 还适用于应力主轴与材料主轴成任意角度的情况。

(2) 物理含义明确, 是 SMP 准则在各向异性条件下的扩展。

(3) 对现有试验结果的模拟效果较好, 表明 ASMP 准则可较好的反映粒状材料在一般应力条件下强度的变化规律。

本文还给出了 ASMP 准则在两种典型条件下的实用表达式。其参数可通过三轴压缩等常规试验与简单条件下的平面应变试验确定, 模拟效果与 ASMP 准则非常接近。

参考文献:

- [1] ODA M. Experimental study of anisotropic shear strength of sand by plane strain tests[J]. Soils and Foundations, 1978, **18**(1): 25 - 38.
- [2] YAMADA Y, ISHIHARA K. Anisotropic deformation characteristics of sand under three-dimensional stress conditions[J]. Soils and Foundations, 1979, **19**(2): 79 - 94.
- [3] ABELEV A V, LADE P V. Effects of cross anisotropy on three-dimensional behavior of sand, I: stress-strain behavior and shear banding[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2003, **129**(2): 167 - 174.
- [4] ARTHUR J R F, MENZIES B K. Inherent anisotropy in a sand[J]. Geotechnique, 1972, **22**(1): 115 - 128.
- [5] TATSUOKA F, SAKAMOTO M, et al. Strength and deformation characteristics of sand in plane strain compression at extremely low pressures[J]. Soils and Foundations, 1986, **26**(1): 65 - 84.
- [6] TATSUOKA F, NAKAMURA S, et al. Strength anisotropy and shear band direction in plane strain tests of sand[J]. Soils and Foundations, 1990, **30**(1): 35 - 54.
- [7] YASIN S J M, UMETSU K, et al. Plane strain strength and deformation of sands affected by batch variations and different apparatus types[J]. Geotechnical Testing Journal, 1999, **22**(1): 80 - 100.
- [8] 王洪瑾, 张国平, 周克骥. 固有和诱发各向异性对击实粘性土强度和变形特性的影响[J]. 岩土工程学报, 1996, **18**(3): 1 - 10. (WANG Hong-jin, ZHANG Guo-ping, ZHOU Ke-ji. Effects of inherent and induced anisotropy on strength and deformation characteristics of compacted cohesive soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1996, **18**(3): 1 - 10. (in Chinese))
- [9] CASAGRANDE A, CARRILLO N. Shear failure of anisotropic materials[J]. Boston Society of Civil Engineers, 1944, **31**(2): 74 - 87.
- [10] LO K Y. Stability in anisotropic soils[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 1965, **91**(S4): 85 - 104.
- [11] 陈 越. 粒状材料强度异向性的物理实质和数学表现形式[J]. 岩土工程学报, 1992, **14**(1): 1 - 13. (CHEN Yue. Physical essence and mathematical expressions of strength-anisotropy for granular materials[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1992, **14**(3): 1 - 13. (in Chinese))
- [12] ABELEV A V, LADE P V. Characterization of failure in cross-anisotropic soils[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2004, **130**(5): 599 - 606.
- [13] MATSUOKA H, NAKAI T. Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses [C]// Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, 1974.
- [14] LADE P V, DUNCAN J M. Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soils[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1975, **101**(10): 1037 - 1053.