

指数型变截面桩中的纵波

刘东甲

(合肥工业大学资源与环境工程学院, 安徽 合肥 230009)

摘要: 解析地研究了指数型变截面桩中的纵波。桩顶受到纵向冲击力作用, 桩身为有限长均匀弹性圆杆, 其半径按指数变化, 桩周土剪切波速也按指数变化, 并考虑桩土相互作用。由 Laplace 变换和逆变换, 分别得到纵向振动的桩土系统的传递函数和脉冲响应。进一步得到桩顶纵向振动速度的频响函数、频域和时域表达式。研究了渐缩自由桩和渐扩自由桩的桩顶纵向振动速度时域曲线特征; 研究了渐变截面桩的桩顶纵向振动速度时域曲线、振幅谱曲线和导纳曲线特征; 结果表明: 桩身截面的渐缩和渐扩都产生桩身反射波, 这种桩身反射波是缓变化的, 其大小与桩身截面渐变的程度正相关; 桩身截面的渐变主要影响频域曲线的几个低阶共振峰。由参数研究及推出的理论公式揭示, 桩中纵波的衰减取决于桩周顶部土剪切波速与桩身纵波波速比、桩长与桩顶直径比、桩周土密度与桩身密度比。

关键词: 土动力学; 指数型变截面桩; 纵波; 桩基动测

中图分类号: TU473

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2008)07-1066-06

作者简介: 刘东甲(1957-), 男, 安徽枞阳县人, 副教授, 主要从事桩土动力学及地球物理勘探的教学和科研工作。

E-mail: dongjia-liu@163.com。

Longitudinal waves in piles with exponentially varying cross sections

LIU Dong-jia

(School of Resources and Environmental Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: Longitudinal waves in piles with exponentially varying cross sections were analytically studied. The pile, subjected to longitudinal impact force at the top, was assumed to be a homogeneous elastic circular bar with finite length and exponentially varying radii. The velocity of shear wave in the surrounding soil was also assumed to vary exponentially, and the soil-pile interaction was taken into account. The transfer function and pulse response of the soil-pile system under longitudinal vibration were derived by direct and inverse Laplace transforms, respectively. The frequency response function, frequency-domain and time-domain expressions for the longitudinal vibration velocity at the pile top were obtained further. The characteristics of longitudinal waves for piles with gradually varying and equal cross sections were investigated. It was found that reflected waves could be produced by the gradual variation of the cross section of pile, which varied with the variation of the cross section of pile, mainly affecting the low frequency resonant peaks. It was shown by parametric studies and the proposed theoretical formula that the attenuation of longitudinal waves in the pile depended on three ratios, that is, the ratio of shear wave velocity in soil to longitudinal wave velocity in pile, the ratio of pile length to diameter of pile top, and the ratio of the soil density to the pile density.

Key words: soil dynamics; pile with exponentially varying cross sections; longitudinal wave; dynamic testing of piles

0 引言

在低应变动力测桩的研究中, 假定桩身为等截面或分段等截面, 对桩顶作纵向(即轴向)激振, 获得桩顶或桩身某位置纵向振动速度响应(简称桩顶速度)的研究越来越深入^[1]。但各类工程桩的截面变化(如缩径或扩径)通常是渐变的, 而这种渐变截面桩瞬态纵向振动问题至今未见解析解。Rausche 等通过把桩身分成多个等截面小段, 用数值方法给出渐缩桩的桩顶速度时程^[2]。陈凡等用特征线波动分析(波形拟合)

软件计算了多根渐变截面桩的桩顶速度时程^[3]。王靖涛等通过对渐变缩径模型桩的低应变测试, 揭示了渐变缩径缺陷反射取决于截面缩减率^[4]。

本文对桩身截面和桩周土剪切波速均指数型渐变这一特殊情形, 给出桩顶受纵向冲击作用时桩顶速度的解析解。对比研究渐缩、渐扩和等径自由桩的纵波特征; 分别研究渐缩、渐扩和等径桩的时域和频域曲

线特征; 还研究渐变截面桩中纵波的衰减特征。

1 定解问题及其在变换域中的解

先做以下3点假设(见图1)。

(1) 桩身为指数型渐变截面线弹性圆杆, 桩半径为

$$\left. \begin{aligned} r &= r_0 e^{\alpha z/l} \quad (0 \leq z \leq l), \\ \alpha &= \ln(r_b/r_0), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, l 是桩长, r_0 和 r_b 分别是桩顶半径和桩底半径, 桩身密度 ρ 及弹性模量 E 不变。

(2) 桩周土剪切波速 v_s 随深度亦按指数变化:

$$\left. \begin{aligned} v_s &= v_{s0} e^{\xi z/l} \quad (0 \leq z \leq l), \\ \xi &= \ln(v_{sl}/v_{s0}), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中, v_{s0} 和 v_{sl} 分别是桩周土顶部剪切波速和底部剪切波速。桩周土的密度 ρ_s 不变。

(3) 桩底土为均匀各向同性弹性半空间, 其密度、剪切波速和泊松比分别为 ρ_b , v_{sb} 和 ν_b 。

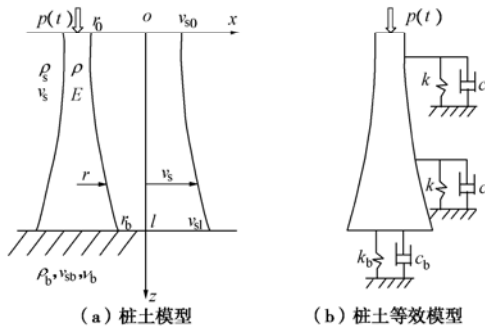


图1 桩土系统示意图

Fig. 1 Schematic diagram of soil-pile system

假设(1)表示桩身的3种情况: $r_0 > r_b$ 时, 桩身渐缩; $r_0 < r_b$ 时, 桩身渐扩; $r_0 = r_b$ 时, 桩身等截面。假设(2)表示桩周土的3种情况。假设(3)使可以直接应用弹性半空间的成果表示桩底土对桩尖的作用。

在桩顶纵向激振力 $p(t)$ 作用下, 桩身纵向运动方程为

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(AE \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \left(c \frac{\partial u}{\partial t} + ku \right) = A \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3)$$

式中, A 为桩身截面积; $u = u(z, t)$ 为桩身 z 处 t 时刻的纵向位移。式(3)中第二项为单位桩段受到桩周土的纵向侧阻力, 其中桩周土的弹簧系数 k 和阻尼系数 c 可表为^[5]

$$\left. \begin{aligned} k &= \pi \rho_s v_s^2, \\ c &= 2\pi r \rho_s v_s \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

初始条件为

$$\left. \begin{aligned} u|_{t=0} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

桩顶边界条件

$$A_0 E \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = -p(t) \quad (6)$$

桩底边界条件

$$\left(A_b E \frac{\partial u}{\partial z} + k_b u + c_b \frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_{z=l} = 0 \quad (7)$$

式中 桩顶截面积 $A_0 = \pi r_0^2$; 桩底截面积 $A_b = \pi r_b^2$; 桩底土弹簧系数 k_b 和阻尼系数 c_b 由 Lysmer 解表示^[6]

$$\left. \begin{aligned} k_b &= 4r_b \rho_b v_{sb}^2 / (1 - \nu_b), \\ c_b &= 3.4 r_b^2 \rho_b v_{sb} / (1 - \nu_b) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

桩顶纵向激振力 $p(t)$ 表为^[5]

$$p(t) = \begin{cases} \frac{I}{t_0} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{t_0} \right) & (0 \leq t \leq t_0) \\ 0 & (\text{其它}) \end{cases} \quad (9)$$

式中, I 和 t_0 分别为激振力的冲量和作用时间。

式(3)、(5)、(6)和(7)构成渐变截面桩纵向振动的定解问题。

考虑初始条件式(5), 对式(3)中位移函数 $u(z, t)$ 作 Laplace 变换, 并假设 $\alpha = \xi$, 即

$$r_b/r_0 = v_{sl}/v_{s0} \quad (10)$$

则式(3)变为

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + \frac{2\alpha}{l} \frac{dU}{dz} - \frac{1}{l^2} (b_2 s^2 + 2b_1 s + b_0) U = 0 \quad (11)$$

式中 $U = U(z, s)$ 为 $u(z, t)$ 的 Laplace 变换; s 为 Laplace 变量; 系数 b_2 , b_1 和 b_0 为

$$\left. \begin{aligned} b_2 &= t_l^2, \\ b_1 &= \overline{\rho} v_l t_l, \\ b_0 &= \overline{\rho} v_l^2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中, t_l 为桩中纵波以波速 C_p 传播一个桩长所用时间, $t_l = l/C_p$, $C_p = \sqrt{E/\rho}$, $\overline{\rho}$, $\overline{v}$, $\overline{l}$ 均为无量纲量 $\overline{\rho} = \rho_s/\rho$, $\overline{v} = v_{s0}/C_p$, $\overline{l} = l/r_0$ 。

方程(11)的解为

$$U(z, s) = e^{-\alpha z/l} \left(B \cos \frac{\beta z}{l} + D \sin \frac{\beta z}{l} \right) \quad (13)$$

式中, B 和 D 为待定系数,

$$\beta = \sqrt{-\alpha^2 - (b_2 s^2 + 2b_1 s + b_0)} \quad (14)$$

由式(13)代入 Laplace 变换后的式(6)、(7), 解关于 B 和 D 的线性方程组, 得

$$\left. \begin{aligned} B &= -[(\Psi(s) - \alpha) \sin \beta + \beta \cos \beta] t_l P(s) / Z_0 \Delta, \\ D &= [(\Psi(s) - \alpha) \cos \beta - \beta \sin \beta] t_l P(s) / Z_0 \Delta, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中, $\Delta = [\alpha^2 + \beta^2 - \alpha \Psi(s)] \sin \beta - \Psi(s) \beta \cos \beta$, $\Psi(s) = k_{bp} + c_{bp} s$, $k_{bp} = k_b/k_{pb}$, $k_{pb} = A_b E/l$, $c_{bp} = c_b/k_{pb}$, $P(s)$ 为桩顶纵向激振力 $p(t)$ 的 Laplace 变换, 当桩顶纵向激振力为式(9)时,

$$P(s) = \frac{4\pi^2 I (1 - e^{-st_0})}{st_0 (4\pi^2 + s^2 t_0^2)}, \quad (16)$$

和桩顶波阻抗

$$Z_0 = A_0 \rho C_p. \quad (17)$$

2 桩顶纵向振动响应

由速度和位移关系及式(13), 桩顶测点处纵向振动速度的 Laplace 变换为

$$V(s) = sU|_{z=0} = sB. \quad (18)$$

将式(15)代入式(18), 得桩土系统关于桩顶纵向振动速度的传递函数

$$H_v(s) = \frac{V(s)}{P(s)} = \frac{t_l s}{Z_0} \frac{[(k_{bp} + c_{bp}s - \alpha) \sin \beta + \beta \cos \beta]}{[(k_{bp} + c_{bp}s)(\beta \cos \beta + \alpha \sin \beta) - (\alpha^2 + \beta^2) \sin \beta]}. \quad (19)$$

计算表明, 桩底土的阻尼对桩顶动力响应影响较小。若不计桩底土的阻尼作用, 即取 $c_b = 0$, 式(19)简化为

$$H_v(s) = \frac{V(s)}{P(s)} = \frac{t_l s}{Z_0} \frac{(k_{bp} - \alpha) \sin \beta + \beta \cos \beta}{k_{bp} \beta \cos \beta - (\beta^2 + \alpha_k) \sin \beta}. \quad (20)$$

式中, $\alpha_k = \alpha(\alpha - k_{bp})$ 。 $H_v(s)$ 反映了桩土系统纵向振动特性。

由围道积分和留数计算方法, 对式(20)作 Laplace 逆变换, 推出桩土系统的脉冲响应:

$$h_v(t) = \frac{1}{Z_0 t_l} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \sum_{j=1}^2 \frac{s_{nj}}{s_{nj} + \omega_c} e^{s_{nj} t}. \quad (21)$$

式中, s_{nj} 是 $H_v(s)$ 的一阶极点。令式(20)分母为零, 得特征方程:

$$k_{bp} \cos \beta - (\beta + \alpha_k / \beta) \sin \beta = 0. \quad (22)$$

用二分法求该方程的正根, 由小到大依次排列为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ 。将 β_n 代入式(14)左边, 解出关于 s 的两个根:

$$\left. \begin{aligned} s_{n1} &= -\omega_c + i\omega_n, \\ s_{n2} &= -\omega_c - i\omega_n, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

式中, $\omega_c = \overline{\rho v l} / t_l$, $\omega_n = \frac{1}{t_l} \sqrt{\beta_n^2 + \alpha^2 + \overline{\rho}(1 - \overline{\rho})v^2 l^2}$ 。

这些一阶极点 s_{nj} ($n = 1, 2, 3, \dots; j = 1, 2$) 对称分布在 Laplace 变换域 (s 平面) 原点左边与虚轴平行的一条直线 ($\operatorname{Re}(s) = -\omega_c$) 上。式(21)中

$$\Phi_n = \frac{[\beta_n^2 + (k_{bp} - \alpha)^2] \beta_n^2}{(\beta_n^2 + \alpha_k)(\beta_n^2 + \alpha_k - k_{bp}) + k_{bp}(k_{bp} + 2)\beta_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (24)$$

对特征方程式(22)出现虚根和零根、桩周有土且桩底无土(“吊脚桩”)、桩周和桩底无土(“自由桩”)

这3种特殊情形, 文中有关公式需修正, 分述如下。

(1) $k_{bp} > 0$ 且 $\alpha_k \geq k_{bp}$

a) 若 $\alpha_k > k_{bp}$

特征方程式(22)有一虚根和一系列正根:

$\beta_1 (= i x_1)$, $\beta_2, \beta_3, \dots$ 。把 $\beta_1 = i x_1$ 代入式(22), 得求解 x_1 的方程

$$k_{bp} \cosh(x) + (x - \alpha_k / x) \sinh(x) = 0, \quad (25)$$

它有唯一正根, 通常 $0 < x_1 < 9$ 。

容易证明该根的存在性。式(25)左边为 x 的连续函数, 记为 $f(x)$ 。当 $k_{bp} > 0$ 时, 若 x 取较大正数 b , 有 $f(b) > 0$; 又 $f(0) = k_{bp} - \alpha_k$, 若 $f(0) < 0$, 即 $\alpha_k > k_{bp}$, 则式(25)在区间 $(0, b)$ 上必存在正根, 还可以证明该正根具有唯一性(证明略)。

式(25)的根 x_1 可用二分法求得。此时, 文中有关各式中

$$\Phi_1 = \frac{[x_1^2 - (k_{bp} - \alpha)^2] x_1^2}{(x_1^2 - \alpha_k)(x_1^2 - \alpha_k + k_{bp}) - k_{bp}(k_{bp} + 2)x_1^2}. \quad (26)$$

b) 若 $\alpha_k = k_{bp}$

方程(25)有唯一根 $x_1 = 0$, 于是, 特征方程式(22)有一零根和一系列正根: $\beta_1 (= i x_1 = 0)$, $\beta_2, \beta_3, \dots$ 。式(26)(或式(24))中先令 $\alpha_k = k_{bp}$, 再令 $x_1 = 0$ (或 $\beta_1 = 0$), 得

$$\Phi_1 = \frac{(k_{bp} - \alpha)^2}{k_{bp}(k_{bp} + 3)}. \quad (27)$$

(2) $k_{bp} = 0$ 且 $v_s \neq 0$ (“吊脚桩”)

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \begin{cases} i\alpha & (\alpha \neq 0) \\ 0 & (\alpha = 0) \end{cases}, \\ \beta_n &= (n-1)\pi \quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\Phi_1 = \begin{cases} \alpha(\coth \alpha - 1)/2 & (\alpha \neq 0) \\ 1/2 & (\alpha = 0) \end{cases}. \quad (29)$$

(3) $k_{bp} = 0$ 且 $v_s = 0$ (“自由桩”)

$$h_v(t) = \frac{1}{Z_0 t_l} \left(2\Phi_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \Phi_n \sum_{j=1}^2 \frac{s_{nj}}{s_{nj} + \omega_c} e^{s_{nj} t} \right), \quad (30)$$

式中, $\beta(n = 1, 2, 3, \dots)$ 由式(28)计算, Φ_1 由式(29)计算。

把式(23)代入式(21), 还可将桩土系统的脉冲响应化为另一形式

$$h_v(t) = \frac{2}{Z_0 t_l} e^{-\omega_c t} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \sqrt{1 + \frac{\omega_c^2}{\omega_n^2}} \cos(\omega_n t + \varphi_n), \quad (31)$$

式中, $\varphi_n = \arctg(\omega_c / \omega_n)$ 。式(31)表明, 脉冲响应 $h_v(t)$ 由无数个振幅按指数衰减的谐振动(称衰减振动)叠加而成, 衰减系数均为 ω_c , 第 n 个固有频率(即共振频率或谐振频率)为 ω_n 。

由式(20), 得桩顶纵向振动速度 $v(t)$ 的 Laplace

变换为

$$V(s)=H_v(s)P(s)。(32)$$

对式(32)作 Laplace 逆变换, 得

$$v(t)=\int_0^t h_v(t-\tau)p(\tau)d\tau。(33)$$

把式(21)代入式(33), 得桩顶纵向振动速度:

$$v(t)=\frac{1}{Z_0 t_l} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \sum_{j=1}^2 \frac{s_{nj}}{s_{nj}+\omega_c} e^{s_{nj} t} \int_0^t e^{-s_{nj} \tau} p(\tau) d\tau。(34)$$

若给定激振力的表达式, 对式(34)积分, 便可求出 $v(t)$ 的具体形式。

3 速度的频响函数、频谱函数和时域表达式

在式(14)、(20)中令 $s=i\omega$, 即让 $H_v(s)$ 在复平面的虚轴上变化, 得桩顶纵向振动速度的频响函数(简称速度频响函数或称速度导纳):

$$H_v(\omega)=\frac{V(\omega)}{P(\omega)}=\frac{i\omega t_l}{Z_0} \frac{[(k_{bp}-\alpha)\sin\beta+\beta\cos\beta]}{[k_{bp}\beta\cos\beta-(\beta^2+\alpha_k)\sin\beta]}。(35)$$

式中,

$$\beta=\sqrt{b_2\omega^2-\alpha^2-b_0-i2b_1\omega}。(36)$$

速度导纳的模

$$N(\omega)=|H_v(\omega)|,。(37)$$

称 $N(2\pi f)$ 关于频率 f 的曲线为速度导纳曲线, 它在 f 取一阶极点 s_{n1} ($n=1, 2, 3, \dots$) 虚部的那些频率点上获极大值, 这些极大值点对应桩土系统共振频率 f_n ($n=1, 2, 3, \dots$), 简称峰频。由式(23)中 ω_n 的表达式, 得第 n 阶共振频率计算式:

$$f_n=\frac{\omega_n}{2\pi}=\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im}[s_{n1}]=\frac{1}{2\pi t_l} \sqrt{\beta_n^2+\alpha^2+\bar{\rho}(1-\bar{\rho})v^{-2}l^2}。(38)$$

由式(35)求出桩顶速度频谱

$$V(\omega)=H_v(\omega)P(\omega)。(39)$$

当桩顶纵向激振力为式(9)时, 式(16)中代入 $s=i\omega$, 得式(39)中 $p(t)$ 的频谱

$$P(\omega)=\frac{i4\pi^2 I(e^{-i\omega t_0}-1)}{\omega t_0(4\pi^2-\omega^2 t_0^2)}。(40)$$

将式(35)、(40)入式(39), 就可计算 $v(t)$ 的频谱 $V(\omega)$ 、振幅谱 $|V(\omega)|$ 。 $v(t)$ 由式(39)的快速 Fourier 逆变换计算

$$v(t)=\text{FFT}^{-1}[H_v(\omega)P(\omega)]。(41)$$

还可由式(9)代入式(34), 求得 $v(t)$ 的解析表达式

$$v(t)=\frac{4\pi^2 I}{Z_0 t_l} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \sum_{j=1}^2 \frac{Q_{nj}(t)}{(s_{nj} t_0 + \omega_c t_0)(s_{nj}^2 t_0^2 + 4\pi^2)}。(42)$$

式中,

$$Q_{nj}(t)=\begin{cases} e^{s_{nj} t} + \frac{(s_{nj} t_0)^2}{4\pi^2} \left[\cos\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) - 1 \right] - \\ \frac{s_{nj} t_0}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) - 1 & (0 \leq t \leq t_0) \\ e^{s_{nj} t} \left(1 - e^{-s_{nj} t_0} \right) & (t \geq t_0) \end{cases}。(43)$$

对上述的特殊情形(3) $k_{bo}=0$ 且 $v_s=0$ (自由桩),

$$v(t)=\frac{I}{Z_0 t_l} [2\Phi_1 Q_1(t) + 4\pi^2 \sum_{n=2}^{\infty} \Phi_n \sum_{j=1}^2 \frac{Q_{nj}(t)}{(s_{nj} t_0 + \omega_c t_0)(s_{nj}^2 t_0^2 + 4\pi^2)}],。(44)$$

式中,

$$Q_1(t)=\begin{cases} \frac{t}{t_0} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) & (0 \leq t \leq t_0) \\ 1 & (\text{其它}) \end{cases}。(45)$$

4 波形特征分析

4.1 自由桩桩顶振动速度时程

应用以上建立的渐变截面桩瞬态纵向振动模型及其解答, 由给定桩、土、激振参数, 正演桩顶纵向振动速度响应, 从理论上揭示桩中纵波传播特征。

各参数取值为: 桩长 $l=10.0\text{m}$, 桩顶直径 $d_0=0.6\text{m}$, 桩底直径 $d_b=2r_b$, 桩身密度 $\rho=2400\text{kg/m}^3$, 桩弹性模量 $E=2.94 \times 10^{10}\text{N/m}^2$; 激振力冲量和作用时间分别为 $I=1\text{N}\cdot\text{s}$, $t_0=1.2 \times 10^{-3}\text{s}$; 图2, 3中有些是对这些参数值作部分改变算出的。

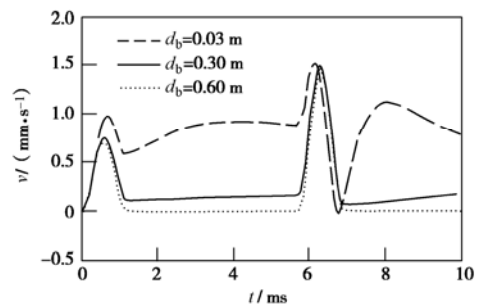


图2 渐缩自由桩的桩顶振动速度曲线

Fig. 2 Velocity of the top of free pile with gradually decreasing cross sections

渐缩自由桩(即桩周和桩底无土的渐缩桩)在桩顶纵向激振力作用下, 其桩顶纵向振动速度曲线如图2所示。图中短虚线($d_b=0.60\text{m}$)是等截面桩情形。图中左右二峰分别对应入射波峰和桩底反射波峰。由图可见, 渐缩的桩身产生与入射波同相的反射波, 而等截面的桩身不产生反射波; 随渐缩程度的增加, 入射波和桩身反射波幅度增加, 桩底反射波幅度略有增加; 随渐缩程度的增加, 桩底反射波峰值点稍微左移。

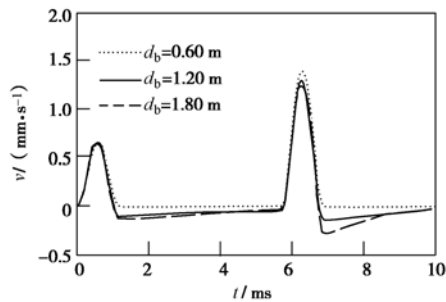


图 3 渐扩自由桩的桩顶振动速度曲线

Fig. 3 Velocity of the top of free pile with gradually enlarging cross sections

图 3 是渐扩自由桩的桩顶纵向振动速度曲线。渐扩的桩身产生与入射波反相的反射波；随渐扩程度的增加，入射波和桩底反射波峰下降，桩身反向反射波增强；随渐缩程度的增加，桩底反射波峰值点稍微左移。

4.2 非自由桩桩顶振动速度响应

图 4 是桩周和桩底有土时渐变截面桩的桩顶振动速度响应。桩周顶部土剪切波速和桩周土密度分别为 $v_{s0} = 100 \text{ m/s}$ 和 $\rho_s = 1800 \text{ kg/m}^3$ ；桩底土剪切波速、密度和泊松比为 $v_{sb} = 120 \text{ m/s}$ ， $\rho_b = 1900 \text{ kg/m}^3$ ， $\nu_b = 0.4$ ；等截面桩 $d_b = 0.60 \text{ m}$ ，渐缩桩 $d_b = 0.30 \text{ m}$ ，渐扩桩 $d_b = 1.20 \text{ m}$ 。

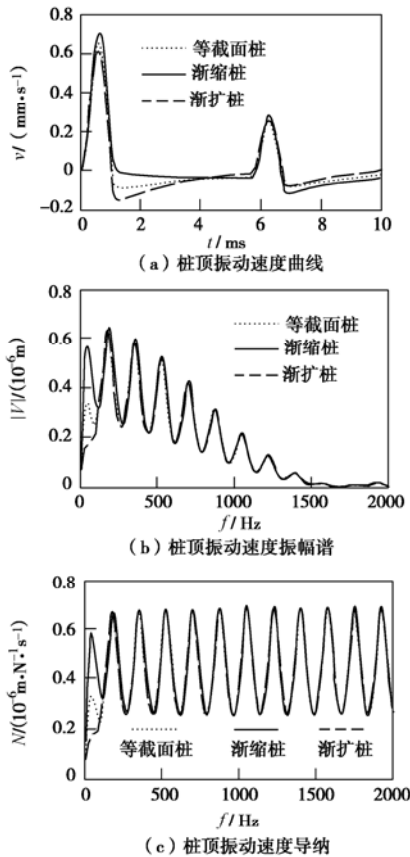


图 4 渐变截面桩桩顶响应

Fig. 4 Response of the top of pile with gradually varying cross sections

在图 4 (c) 桩顶振动速度导纳图上，共振峰的横坐标为共振频率 f_n ， $n = 1, 2, 3, \dots$ ， f_n 还可以由式 (38) 计算，结果见表 1。图 4 (a) 表明，桩身截面的渐变影响入射波和桩底反射波的峰值，也影响桩身和桩侧土产生的反射波。图 4 (b)、图 4 (c) 和表 1 表明，桩身截面的渐变只影响低阶共振峰，主要影响一阶共振峰的幅值、二阶和三阶共振频率。

表 1 共振频率

d_b/m	共振频率/Hz				
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0.6	27	178	351	526	701
0.3	27	183	354	528	702
1.2	27	181	353	527	702

4.3 桩顶振动速度响应的衰减

图 5 研究了桩周土剪切波速对桩顶振动速度的影响。随桩周土剪切波速的增加，在桩顶振动速度曲线上，桩底反射减弱，入射波也略有减弱，而桩周土阻力产生的反射波则增强；在桩顶振动速度振幅谱和桩顶振动速度导纳图上，各共振峰的幅值减小，谷值增加，共振频率几乎不变。

图 6 研究了桩长对桩顶振动速度的影响。随桩长的增加，在桩顶振动速度曲线上，桩底反射减弱且到时延迟，入射波不变；在桩顶振动速度振幅谱和桩顶振动速度导纳图上，各共振峰的幅值减小，谷值增加，相邻共振峰的频率差（简称频差）减小。

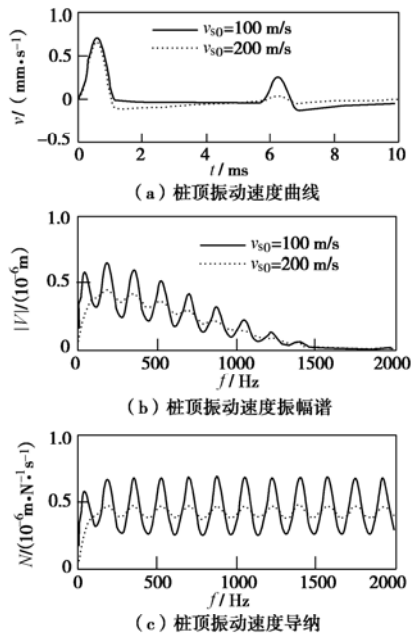


图 5 桩周土对渐变截面桩桩顶响应的影响

Fig. 5 Effect of velocity of shear wave in surrounding soil on the response of pile top

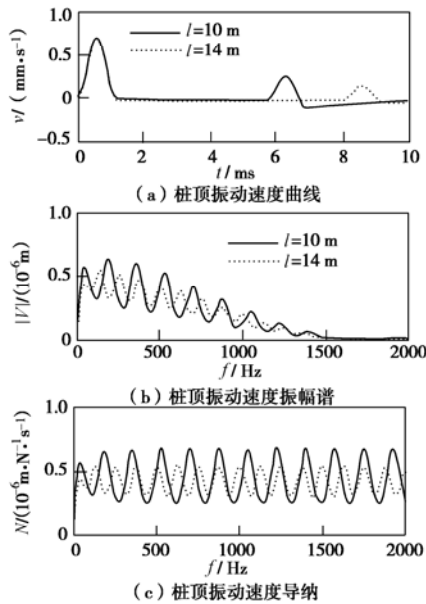


图6 桩长对渐变截面桩桩顶响应的影响

Fig. 6 Effect of pile length on the response of pile top

渐变截面桩的桩顶纵向振动响应的衰减规律可以由桩土系统脉冲响应表达式 (31) 中的衰减因子 $\exp(-\omega_c t)$ 推导出来。引入无量纲时间变量 $\tau = t/t_l$, 则衰减因子可为

$$e^{-\omega_c t} = e^{-\theta_c \tau} \quad (46)$$

根据式 (23) 和式 (12), 得到式 (46) 中无量纲衰减参数 θ_c 的表达式

$$\theta_c = \omega_c t_l = \frac{\rho_s v_{s0}}{\rho C_p} \frac{l}{d_0} \quad (47)$$

因为土和桩的密度比变化范围小, 式 (47) 表明, 渐变截面桩的桩顶纵向振动响应的衰减主要取决于: ① 桩周顶部土剪切波速和桩身纵波波速之比; ② 桩长和桩顶直径之比。

5 结 论

(1) 对指数型变截面桩, 可在变换域和时域中得到桩的瞬态纵向振动解析解。

(2) 指数型变截面桩产生桩身反射波; 而等截面桩无桩身反射波。

(3) 对指数型截面渐缩桩, 其桩身反射波与入射波同相位; 对指数型截面渐扩桩, 其桩身反射波与入射波反相位; 桩身反射波的幅度与截面渐变程度正相关。

(4) 指数型变截面桩的桩身反射波变化较缓, 它

只影响桩顶纵向振动速度导纳的低阶共振峰。

(5) 由理论导出的指数型变截面桩纵向振动衰减因子 $\exp(-\theta_c \tau)$ ($\theta_c = 2(v_{s0}/C_p)(l/d_0)(\rho_s/\rho)$) 及实际模型计算揭示: 当桩周顶部土的剪切波速和桩身纵波波速比、桩周土密度与桩身密度比、桩长与桩顶直径比增大时, 桩顶纵向振动速度的衰减增大。

本文方法可推广到对局部渐变缩径 (或扩径) 桩中纵波的研究。

参考文献:

- [1] 陈云敏. 桩基动力学及其工程应用[C]//第六届全国土动力学学术会议论文集. 2002: 60 - 65. (CHEN Yun-min. Pile dynamics and its application[C]// The Sixth National Symposium on Soil Dynamics. Beijing: China Architecture & Building Press. 2002: 60 - 65. (in Chinese))
- [2] RAUSCHE F. Pile integrity testing and analysis for pile integrity[C]// Proc of the Fourth International Conference on Application of Stress Wave Theory to Piles. The Netherlands, 1992.
- [3] 陈 凡, 徐天平, 陈久照, 关立军. 基桩质量检测技术[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2003: 165 - 167. (CHEN Fan, XU Tian-ping, CHEN Jiu-zhao, GUAN Li-jun. Testing techniques of foundation piles quality[M]. Beijing: China Architecture & Building Press. 2003: 165 - 167. (in Chinese))
- [4] 王靖涛, 李国成, 丁美英. 桩基完整性检测的模型试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 1998, 17(增): 808 - 812. (WANG Jing-tao, LI Guo-cheng, DING Mei-ying. Model studies for pile integrity detection[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1998, 17(S): 808 - 812. (in Chinese))
- [5] 刘东甲. 纵向振动桩侧壁切应力频率域解及其应用[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(5): 544 - 546. (LIU Dong-jia. Frequency-domain solution of shear stress along pile-soil interface for longitudinal vibration of piles and its application[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23(5): 544 - 546. (in Chinese))
- [6] LYSMER J, RICHART F E. Dynamic response of footing to vertical loading[J]. Journal Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 1966, 92(SM1): 65 - 91.