

## 旋转非对称边坡三维安全系数计算

朱大勇<sup>1</sup>, 丁秀丽<sup>2</sup>, 杜俊慧<sup>3</sup>, 邓建辉<sup>4</sup>

(1. 合肥工业大学土木建筑工程学院, 安徽 合肥 230009; 2. 长江科学院水利部岩土力学与工程重点实验室, 湖北 武汉 430019;

3. 长江勘测规划设计研究院, 湖北 武汉 430010; 4. 四川大学水利水电学院, 四川 成都 610065)

**摘要:** 基于滑面正应力修正模式, 推导出旋转非对称边坡三维极限平衡安全系数显式解答。首先假设三维滑面正应力的初始分布, 然后乘以含 2 个待定参数的修正函数; 根据滑体竖直方向力平衡、垂直滑动方向水平力平衡及对旋转轴力矩平衡的条件, 导出关于安全系数的 2 次代数方程; 得到三维安全系数的显式解。本方法不需考虑条柱间具体作用力, 满足主要平衡条件, 计算过程简单, 可应用于实际边坡工程。

**关键词:** 边坡稳定; 三维极限平衡; 安全系数; 显式解; 非对称边坡

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2007)08-1236-04

**作者简介:** 朱大勇(1965-), 男, 安徽枞阳人, 教授, 主要从事岩土工程教学与科研工作。E-mail: zhudymeng@163.com。

## Computation of 3D safety factor of asymmetric and rotational slopes

ZHU Da-yong<sup>1</sup>, DING Xiu-li<sup>2</sup>, DU Jun-hui<sup>3</sup>, DENG Jian-hui<sup>4</sup>

(1. College of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 2. Changjiang Scientific Research Institute, Wuhan

430019, China; 3. Changjiang Institute of Survey Planning Design and Research, Wuhan 430010, China; 4. School of Hydropower,

Sichuan University, Chengdu 610065, China)

**Abstract:** Based upon modification of the normal stresses over the slip surface, the explicit limit equilibrium solution was derived for the 3D safety factor of asymmetric and rotational slopes. The normal stresses over the 3D failure surface were initially assumed and then multiplied by a modification function involving two factors to be determined. According to equilibrium conditions of vertical force, horizontal force perpendicular to the sliding direction and moment about rotational axis, a quadratic equation in terms of the safety factor and then the explicit solution for the 3D safety factor of asymmetric slopes were obtained. In the present method the interaction between the columns was neglected, while the main equilibrium conditions were satisfied, and the computation process of this method was straightforward. This method could be applied for the stability evaluation in practical slope engineering.

**Key words:** slope stability; 3D limit equilibrium; safety factor; explicit solution; asymmetric and rotational slope

## 0 引言

现有的大多数三维边坡稳定性计算方法是二维边坡极限平衡条分法的三维推广<sup>[1-6]</sup>, 又称条柱法。条柱法的局限性是需要假设条柱间作用力分布方式, 而不同的假设导致安全系数的差别很大, 安全系数求解过程一般都比较复杂, 不便于工程应用。对于非对称性滑体, 条柱法适应性更差。笔者曾提出基于滑面正应力修正模式的二维极限平衡法显式解法<sup>[7-8]</sup>, 即直接假设滑面正应力分布形式, 根据滑体平衡条件, 推导出安全系数显式计算公式。本文将这一思路应用于旋转非对称边坡三维稳定性计算, 即不考虑条柱间作用力具体形式, 直接假设三维滑面正应力分布形式, 根据非对称空间滑体的主要平衡条件(竖直方向力平衡、垂直滑动方向水平力平衡及对旋转轴力矩平衡), 推导

出旋转非对称边坡三维安全系数显式解答。

## 1 基本假定

如图 1 所示非对称三维滑面, 边坡表面与滑面  $z$  轴方向坐标为  $g(x, y)$  和  $s(x, y)$  表示。滑体旋转轴平行于  $y$  轴, 坐标为  $(x_m, y, z_m)$ , 滑动方向沿  $x$  轴反向。取微元条柱, 其底面面积为

$$dA = \Delta dx dy, \quad (1)$$

其中,

$$\Delta = (1 + s_x'^2 + s_y'^2)^{1/2}。 \quad (2)$$

滑面沿  $x, y$  轴方向倾角分别为  $\alpha_x, \alpha_y$ ; 滑面法线与

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (40472138)

收稿日期: 2006-09-25

$z$  轴夹角为  $\delta_z$ 。根据几何关系有:

$$\tan \alpha_x = s'_x, \quad (3)$$

$$\tan \alpha_y = s'_y, \quad (4)$$

$$\cos \delta_z = \left( \frac{1}{s'^2_x + s'^2_y + 1} \right)^{1/2} = \frac{1}{\Delta}. \quad (5)$$

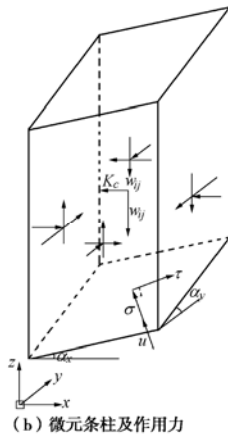
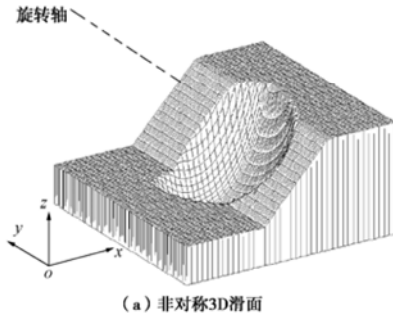


图1 非对称 3D 滑面及条柱受力

Fig. 1 Asymmetric and rotational 3D slip surface and forces acting on a typical column

作用于滑面上的正应力与剪应力分别是  $\sigma(x, y)$  和  $\tau(x, y)$ ; 孔隙水压力为  $u(x, y)$ ; 条柱的中心点坐标为  $(x, y, z_c)$ ;  $\varphi(x, y)$ ,  $c(x, y)$  分别为滑面有效内摩擦角和凝聚力,  $\gamma(x, y)$  为条柱平均重度;  $K_c$  为水平地震影响系数; 条柱重量为  $w(x, y)dx dy$ , 其中

$$w(x, y) = \gamma(x, y) [g(x, y) - s(x, y)]. \quad (6)$$

条柱底面法向力的方向余弦为  $(n^x_\sigma, n^y_\sigma, n^z_\sigma)$ , 剪切力的方向余弦为  $(n^x_\tau, n^y_\tau, n^z_\tau)$ 。由于滑体滑动方向与  $x$  轴平行, 因此  $n^y_\tau = 0$ 。由几何关系得

$$(n^x_\sigma, n^y_\sigma, n^z_\sigma) = \left( -\frac{s'_x}{\Delta}, -\frac{s'_y}{\Delta}, \frac{1}{\Delta} \right), \quad (7)$$

$$(n^x_\tau, n^y_\tau, n^z_\tau) = \left( \frac{1}{\Delta'}, 0, \frac{s'_x}{\Delta'} \right), \quad (8)$$

其中

$$\Delta' = \sqrt{1 + (s'_x)^2}. \quad (9)$$

滑面初始正应力分布假设为  $\sigma_0(x, y)$ ,  $\sigma_0$  可采用

3D 扩展的简化 Bishop 法假设<sup>[2]</sup>, 即条柱间作用力水平。

$$\sigma_0 = \frac{w - (c - u \tan \varphi) \Delta \sin \alpha_x / F_{s0}}{1 + \Delta \sin \alpha_x \tan \varphi / F_{s0}}, \quad (10)$$

式中,  $F_{s0}$  为初始设定安全系数。

显然,  $\sigma_0$  不可能使滑体满足所需的平衡条件, 为此需对其修正, 修正函数包含的未知数个数应与平衡条件个数相匹配。下面将论证对于旋转非对称 3D 滑体, 满足 3 个平衡条件可控制计算精度。因安全系数  $F_s$  本身是未知数, 故修正函数应含 2 个未知变量。由于非对称边坡垂直滑动方向力平衡较难调整, 故修正函数须重点反映  $y$  方向的可调性, 最简单实用的形式为

$$\sigma(x, y) = (\lambda_1 + \lambda_2 y) \sigma_0(x, y). \quad (11)$$

## 2 平衡方程

对于非对称的 3D 滑体, 严格来说, 需要满足所有的 6 个平衡方程即 3 个方向的力平衡及绕 3 个坐标轴的力矩平衡方程。对滑体内力分布或滑面正应力分布假设就愈苛刻, 求解将愈困难<sup>[6]</sup>。通过针对具体问题, 要求滑体满足对安全系数起控制作用的主要平衡方程。

对 2D 圆弧滑面, 大量研究表明, 忽略水平力平衡条件的简化 Bishop 法计算精度足以与满足严格平衡条件的 Morgenstern-Price 法一致。因此, 对绕旋转轴旋转的 3D 滑体, 我们也可忽略沿滑动方向的水平力平衡, 只考虑竖向力平衡与绕旋转轴的力矩平衡。对于非对称 3D 滑体, 有些研究者认为还须考虑绕平行滑动方向的水平轴的力矩平衡<sup>[3]</sup>。从直观上讲, 我们认为起更重要控制作用的平衡条件可能是垂直滑动方向的水平力平衡。因此, 我们考虑以下 3 个主要平衡条件, 即垂直滑动方向的水平力平衡, 竖直方向力的平衡及绕旋转轴的力矩平衡, 这 3 个平衡方程分别为

$$-\iint \sigma s'_y dx dy = 0, \quad (12a)$$

$$\iint \left( \sigma + s'_x \frac{\Delta}{\Delta'} \tau \right) dx dy = W, \quad (12b)$$

$$\iint \left( \sigma + s'_x \frac{\Delta}{\Delta'} \tau \right) (x - x_m) dx dy + \iint \left( \sigma s'_x - \frac{\Delta}{\Delta'} \tau \right) (s - z_m) dx dy = M_c. \quad (12c)$$

其中

$$W = \iint w dx dy, \quad (13a)$$

$$M_c = \iint w(x - x_m) dx dy - \iint K_c w(z_c - z_m) dx dy. \quad (13b)$$

根据莫尔-库仑准则,

$$\tau = \frac{(\sigma - u) \tan \varphi + c}{F_s} \quad (14)$$

记

$$\psi = \tan \varphi \quad (15a)$$

$$c_u = c - u \tan \varphi \quad (15b)$$

$$\rho = \frac{\Delta}{\Delta'} \quad (15c)$$

$$r_\sigma = x - x_m + (s - z_m)s'_x \quad (15d)$$

$$r_\tau = s'_x(x - x_m) - s + z_m \quad (15e)$$

平衡方程组 (13a) ~ (13c) 重新整理为

$$-\iint \sigma s'_y dx dy = 0 \quad (16a)$$

$$\iint \left( 1 + s'_x \rho \psi \frac{1}{F_s} \right) \sigma dx dy = W - \frac{1}{F_s} \iint s'_x \rho c_u dx dy \quad (16b)$$

$$\iint \left( r_\sigma + \frac{1}{F_s} \rho \psi r_\tau \right) \sigma dx dy = M_c - \frac{1}{F_s} \iint \rho r_\tau c_u dx dy \quad (16c)$$

将式 (11)、(14) 代入式 (16a) ~ (16c) 得

$$\lambda_1 \iint s'_y \sigma_0 dx dy + \lambda_2 \iint s'_y y \sigma_0 dx dy = 0 \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \iint \left( 1 + s'_x \rho \psi \frac{1}{F_s} \right) \sigma_0 dx dy + \lambda_2 \iint \left( 1 + s'_x \rho \psi \frac{1}{F_s} \right) y \sigma_0 dx dy \\ &= W - \frac{1}{F_s} \iint s'_x \rho c_u dx dy \quad (17b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \iint \left( r_\sigma + \rho \psi r_\tau \frac{1}{F_s} \right) \sigma_0 dx dy + \lambda_2 \iint \left( r_\sigma + \rho \psi r_\tau \frac{1}{F_s} \right) y \sigma_0 dx dy \\ &= M_c - \frac{1}{F_s} \iint \rho r_\tau c_u dx dy \quad (17c) \end{aligned}$$

### 3 安全系数求解

平衡方程组 (17a)、(17b) 和 (17c) 简记为

$$\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 = 0 \quad (18a)$$

$$\lambda_1 \left( A_{11} + \frac{1}{F_s} A'_{11} \right) + \lambda_2 \left( A_{12} + \frac{1}{F_s} A'_{12} \right) = B_1 + \frac{1}{F_s} B'_1 \quad (18b)$$

$$\lambda_1 \left( A_{21} + \frac{1}{F_s} A'_{21} \right) + \lambda_2 \left( A_{22} + \frac{1}{F_s} A'_{22} \right) = B_2 + \frac{1}{F_s} B'_2 \quad (18c)$$

其中有关系数可直接比较式 (17)、(18) 容易得出, 此处不一一列出。

由式 (18b)、(18c), 得

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{A_1}{A_b} \\ \lambda_2 &= \frac{A_2}{A_b} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{vmatrix} F_s A_{11} + A'_{11} & F_s A_{12} + A'_{12} \\ F_s A_{21} + A'_{21} & F_s A_{22} + A'_{22} \end{vmatrix} \\ &= F_s^2 \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} + F_s \left( \begin{vmatrix} A'_{11} & A_{12} \\ A'_{21} & A_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A'_{12} \\ A_{21} & A'_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{vmatrix} \right) \\ &= F_s^2 A_{00} + F_s A_{01} + A_{02} \quad (20a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{vmatrix} F_s B_1 + B'_1 & F_s A_{12} + A'_{12} \\ F_s B_2 + B'_2 & F_s A_{22} + A'_{22} \end{vmatrix} \\ &= F_s^2 \begin{vmatrix} B_1 & A_{12} \\ B_2 & A_{22} \end{vmatrix} + F_s \left( \begin{vmatrix} B'_1 & A_{12} \\ B'_2 & A_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1 & A'_{12} \\ B_2 & A'_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B'_1 & A'_{12} \\ B'_2 & A'_{22} \end{vmatrix} \right) \\ &= F_s^2 A_{11} + F_s A_{12} + A_{13} \quad (20b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{vmatrix} F_s A_{11} + A'_{11} & F_s B_1 + B'_1 \\ F_s A_{21} + A'_{21} & F_s B_2 + B'_2 \end{vmatrix} \\ &= F_s^2 \begin{vmatrix} A_{11} & B_1 \\ A_{21} & B_2 \end{vmatrix} + F_s \left( \begin{vmatrix} A'_{11} & B_1 \\ A'_{21} & B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & B'_1 \\ A_{21} & B'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A'_{11} & B'_1 \\ A'_{21} & B'_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= F_s^2 A_{21} + F_s A_{22} + A_{23} \quad (20c) \end{aligned}$$

将式 (20a)、(20b)、(20c) 代入式 (18c) 得

$$t_2 F_s^2 + t_1 F_s + t_0 = 0 \quad (21)$$

$$t_2 = D_1 A_{11} + D_2 A_{12} \quad (22a)$$

其中

$$t_1 = D_1 A_{12} + D_2 A_{21} \quad (22b)$$

$$t_0 = D_1 A_{13} + D_2 A_{23} \quad (22c)$$

方程 (21) 有两个根, 如果安全系数有解, 必为最大的实根, 因为不可能存在两个大于 0 且不相等的实数同时使滑体满足极限平衡, 故取最大的根:

$$F_s = \frac{-t_1/t_2 + \sqrt{(t_1/t_2)^2 - 4t_0}}{2} \quad (23)$$

### 4 算例分析

(1) 例 1

引自文献[5]的三维边坡算例, 3D 滑面的主剖面及有关参数如图 2 所示, 3D 滑面为椭球面, 取滑体体积与文献[5]相同即 11106 m<sup>3</sup>。

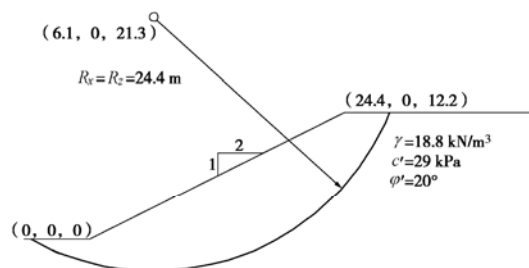


图 2 3D 滑面主剖面 (例 2)

Fig. 2 The main cross-section of 3D slip surface (Example 2)

此例为对称 3D 滑体, 文献[5]给出 3D 安全系数

为 2.122, 文献[9]给出安全系数 2.18。本文提出的显式解给出的 3D 安全系数为 2.162, 与它们很接近, 验证了本文方法的有效性, 同时也表明了对于旋转 3D 滑体, 忽略沿滑动方向水平力平衡对计算精度影响较小。

(2) 例 2

边坡高 50 m, 坡面斜率 1 : 1.5, 土体物理力学参数:  $\gamma=20 \text{ kN/m}^3$ ,  $c=50 \text{ kPa}$ ,  $\varphi=20^\circ$ 。旋转轴位于边坡脚正上方 100 m, 空间滑面在坡顶几何形态见图 3。共有 5 个滑面, 滑面 1 呈对称, 其余均不对称, 滑面 5 右侧几乎垂直。滑面 2 空间形态见图 4。

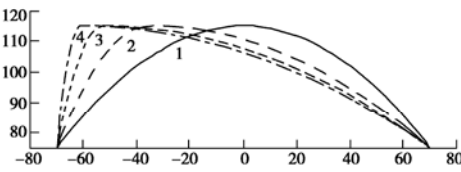


图 3 滑面在坡顶几何形态

Fig. 3 Geometry of 3D slip surface on the top of slope

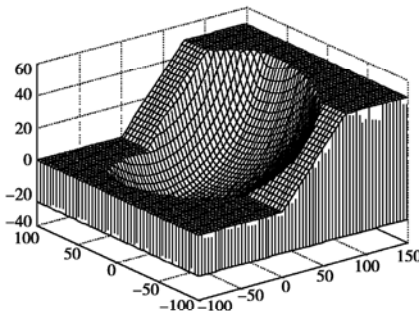


图 4 非对称 3D 滑面 (例 2)

Fig. 4 Asymmetric 3D slip surface (Example 2)

表 1 例 2 边坡 3D 安全系数计算结果

Table 1 Results of 3D safety factors for example 2

| 滑面编号 | $F_s$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ |
|------|-------|-------------|-------------|
| 1    | 1.702 | 1.0032      | 0           |
| 2    | 1.728 | 0.9969      | 0.0008      |
| 3    | 1.773 | 0.9745      | 0.0022      |
| 4    | 1.815 | 0.9360      | 0.0043      |

各滑面 3D 安全系数计算结果见表 1, 由表可见随着不对称性的增大, 3D 安全系数将所增大, 最大增幅在 6% 左右。其安全系数增幅较小的原因可能是这些滑体的体积大小相当。

5 结 语

非对称边坡三维稳定性分析是边坡理论一个重要难点, 现行的各种条柱法因需假设条柱间作用力分布

而求解过程非常复杂, 且不易考虑非对称滑体纵向的平衡条件。本文基于滑面正应力修正模式, 根据滑体竖直方向力平衡、垂直滑动方向水平力平衡及对旋转轴力矩平衡条件, 得到旋转非对称边坡三维安全系数的显式解。本方法的优点是不需要考虑条柱间具体作用力分布形式, 满足主要平衡条件特别是滑体纵向力的平衡条件, 计算过程简单实用, 结果可靠, 可供实际三维边坡稳定评价与设计。

参考文献:

[1] HOVLAND H J. Three-dimensional slope stability analysis method[J]. J Geotech Eng, ASCE, 1977, **103**(9): 971 - 986.

[2] BALIGH M M, AZZOUZ A S. End effects on cohesive slopes [J]. Geotech Eng, ASCE, 1975, **101**(11): 1105 - 1107.

[3] 郑榕明, 朱禄娟, 谷兆祺. 非对称旋转破坏的三维 Bishop 边坡稳定算法[J]. 岩土工程学报, 2002, **24**(6): 706 - 709. (CHENG Rong-ming, ZHU Lu-juan, GU Zhao-qi. Rotational failure of 3D non-symmetric slope predicted by Bishop's method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, **24**(6): 706 - 709. (in Chinese))

[4] HUNGR O. An extension of Bishop's simplified method of slope stability analysis to three dimension[J]. Geotechnique 1987, **37**: 113 - 117.

[5] XING Z. Three-dimensional stability analysis of concave slopes in plan view[J]. J Geotech Eng, **114**(6): 658 - 671.

[6] LAM L, FREDLUND D G. A general limit equilibrium model for three-dimensional slope stability analysis[J]. Can Geotech J, 1993, **30**: 905 - 919.

[7] 朱大勇. 极限平衡法显式解与统一格式[D]. 南京: 河海大学, 2002. (ZHU D Y. Explicit solution to limit equilibrium and generalised formulation[D]. Nanjing: Hohai University, 2002. (in Chinese))

[8] ZHU D Y, LEE C F, JIANG H D. Generalised framework of limit equilibrium methods and numerical procedure for slope stability analysis[J]. Geotechnique, 2003, **53**(4): 377 - 395.

[9] 陈祖煜, 弥宏亮, 汪小刚. 边坡稳定三维分析的极限平衡方法[J]. 岩土工程学报, 2001, **23**(5): 525 - 529. (CHEN Zu-yu, MI Hong-liang, WANG Xiao-gang. A three-dimensional limit equilibrium method for slope stability analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, **23**(5): 525 - 529. (in Chinese))