

基于 Dijkstra 算法的边坡极限平衡有限元分析

徐卫亚¹, 周家文¹, 邓俊晔¹, 石 崇¹, 张宗亮²

(1. 河海大学岩土工程研究所, 江苏 南京 210098; 2. 国电昆明勘测设计研究院, 云南 昆明 650051)

摘 要: 基于有限元计算结果, 将边坡稳定性问题转化为图论中寻找最短路问题。通过引入图论中解决最短路问题的 Dijkstra 算法到搜索边坡最危险滑动面及其安全系数中去, 对 Dijkstra 算法作了一定的改进, 建立了一种新的边坡稳定性分析方法——基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法。通过一算例对该法进行验证, 计算得的安全系数和危险滑动面位置与推荐答案基本一致, 说明该方法应用于边坡工程的可行性。将该方法应用于糯扎渡水电站右岸泄洪洞出口边坡的稳定性分析, 与极限平衡法和强度折减法作了比较。研究表明, 该方法计算得到的安全系数介于极限平衡法和强度折减法之间; 危险滑动面位置与这两种方法计算得到的危险滑动面位置基本一致, 该方法应用于复杂岩体边坡的稳定性分析可行。最后, 对于逆坡向发展的滑动面, 以洛古水电站右岸边坡的稳定性分析为实例, 研究了逆坡向发展的滑动面滑动力计算方法; 比较分析 3DEC 和该方法的计算结果, 说明该方法适用于逆坡向发展的滑动面的稳定性分析。
关键词: 岩石力学; 边坡; 稳定性分析; 极限平衡有限元; 强度折减; Dijkstra 算法

中图分类号: TU413

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2007)08-1159-14

作者简介: 徐卫亚(1962-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事岩石力学与工程应用方面的研究。E-mail: wyxu@hhu.edu.cn。

Slope stability analysis of limit equilibrium finite element method based on the Dijkstra algorithm

XU Wei-ya¹, ZHOU Jia-wen¹, DENG Jun-ye¹, SHI Chong¹, ZHANG Zong-liang²

(1. Research Institute of Geotechnical Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China; 2. Kunming Investigation & Design Institute of China Hydropower Consulting Group, Kunming 650051, China)

Abstract: Based on the calculated results of finite element method, the problem of slope stability could be converted into searching for the shortest path in graph theory. A new method of slope stability, limit equilibrium finite element method based on Dijkstra algorithm, was established by applying the improved Dijkstra algorithm which was an algorithm to seek the shortest path in graph theory to search for the minimum safety factor of slopes and the position of most dangerous sliding plane. A classical slope case was specialized to validate this method. The safety factor of slopes and the position of most dangerous sliding plane according to this method were basically consistent with the propositional answer so its feasibility was proved. This method was applied in the stability analysis for the slope of the outlet of the flood discharge tunnel in the right bank of Nuozhadu Hydropower Station. It was shown that the safety factor of slopes from this method was between that of the limit equilibrium method and that of the strength reduction method, and the position of dangerous sliding plane was basically consistent with that of these two methods. This method could be applied in the stability analysis of complicated rock slopes. Finally, with regard to the sliding surface developing opposite to the slope direction, it was illustrated how to compute the stress of the sliding surface through an example in the stability analysis of the right bank slope in Luogu Hydropower Station. Comparison between the computed results of 3DEC and those of this method shows that the present method is suitable for the stability analysis of the sliding surface developing opposite to the slope direction.

Key words: rock mechanics; slope; stability analysis; limit equilibrium FEM; strength reduction; Dijkstra algorithm

0 引 言

确定边坡的最危险滑动面位置和边坡的抗滑安全系数对边坡工程实际有着重要的意义^[1-2]。目前, 研究边坡稳定性的主要方法有地质力学法(赤平投影法)、

极限平衡法、有限单元法、块体单元法、显式拉格朗

基金项目: 国家重点基础研究发展规划项目(973)(2002CB412707); 国家自然科学基金重点资助项目(50539110)

收稿日期: 2006-11-30

日差分法等^[1-7]。极限平衡分析并不考虑岩土体内部的应力应变关系,难以分析边坡破坏的发生和发展过程,在求解安全系数时需要事先假定滑裂面形状和进行条间力简化等。利用有限元进行边坡稳定性分析考虑了岩土体的本构关系,可以合理的反映岩土体的真实工作状态,不需要事先假设滑动面和进行条间力的简化等。但工程中的有限元计算虽然能反映边坡的变形特征、应力状态和破坏机理,但是尚不能给出一个直观的安全系数。刚体极限平衡分析方法,虽然能够得到直观的安全系数和危险滑弧位置,但是在破坏机理研究上有一定的局限。边坡工程的研究需要发展一种将有限元计算结果同极限平衡分析方法相结合的极限平衡有限元方法。

本文从高边坡稳定性分析现状入手,将图论中解决最短路问题的 Dijkstra 算法^[8-12]引入到搜索边坡最危险滑动面及其安全系数中去,将边坡的稳定问题转化为图论中寻找最短路问题,对 Dijkstra 算法作了相应的改进,编制了相应的计算程序。通过一个经典边坡核算例对基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法进行验证,计算结果表明,该方法应用于岩土边坡稳定性分析是合理可行的。

将本文提出的理论方法应用于糯扎渡水电站右岸泄洪洞出口边坡的稳定性分析。为了比较分析,采用边坡稳定性分析的极限平衡法和强度折减法对糯扎渡右岸泄洪洞出口边坡进行了计算分析。计算结果表明:用极限平衡法计算得到的边坡安全系数比较小;强度折减法计算得到边坡安全系数比极限平衡计算和基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法计算得到的边坡安全系数要大;而基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法计算得到的安全系数介于两者之间。3 种方法计算得到的潜在危险滑动面位置基本一致,该方法应用于复杂的岩体边坡是可行的。

通过对洛古水电站右岸坝址边坡的稳定性分析,阐述了基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法对于逆坡向发展的滑动面的安全系数计算处理方法。比较分析该方法和 3DEC 的计算结果,表明基于 Dijkstra 算法极限平衡有限元方法适用于逆坡向发展的滑动面的稳定性分析。

1 高边坡稳定性研究现状

高边坡稳定性分析目前使用较多的研究方法有以下 5 种:刚体极限平衡法、极限分析法(上、下限分析法)、有限元(有限差分)法、离散元法和非连续变形分析法等。

1.1 刚体极限平衡法

刚体极限平衡法是边坡稳定分析领域中最古老,

也是目前工程应用较多的一种方法。它以 Mohr-Coulomb 抗剪强度理论为基础,先设定滑体的滑动面,并将滑动面所划分出来的滑体划分成若干垂直条块,建立作用在这些条块上力及力矩的平衡方程,根据这些平衡方程求解出各个条块受到的滑动力及其所能提供的抗滑力,再将这些滑动力和抗滑力叠加得到整个滑动体上产生的滑动力和所能承受的抗滑力,两者相除得到安全系数 F_s ,这通常称为条分法。

由于极限平衡法是通过一定的假定将本质上不静定的问题简化为静定问题来求解,这一作法的合理性问题一直受到人们的普遍关注。总结下来,刚体极限平衡法有以下问题:①条块之间不允许出现拉力;②条块面上的剪应力不超过 Mohr-Coulomb 准则提供的抗剪强度;③刚体极限平衡法不能搜索逆坡向发展的滑弧,它会出现如图 1 所示的错误条块;④刚体极限平衡方法需要事先假定滑弧位置,所以其滑动面形状就为规则的几何形状;⑤刚体极限平衡方法的破坏准则主要基于 Mohr-Coulomb 准则。

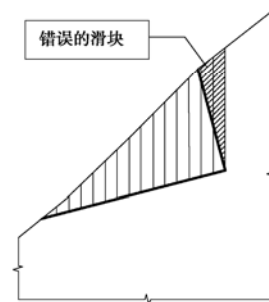


图 1 刚体极限平衡方法产生的错误条块

Fig.1 Mistake in slide wedge for the limit equilibrium method of rigid body

1.2 有限单元法和有限差分法

有限单元法和有限差分法是近年来比较活跃的一种边坡稳定分析方法。它全面满足静力许可、应变相容和应力、应变之间的本构关系;不受边坡几何形状的不规则和材料的不均匀性限制;破坏面的形状和位置不需事先假定;分析边坡破坏的发生和发展过程,模拟边坡开挖及加固的施工过程,考虑岩土体与支护结构的共同作用及其变形协调;其分析结果可以提供应力、应变的全部信息。应用于边坡工程实践主要分为间接法和直接法。

(1) 间接法

间接法是采用刚体极限平衡法原理分析有限单元法或有限差分法的计算结果,应用刚体极限平衡的方法搜索危险滑弧和安全系数的一种方法。和刚体极限平衡法相比,现有的间接法除了其计算结果符合各种

力学原理外,仍然要事先假设滑弧位置,其采用的材料模型亦局限于 Mohr-Coulomb 准则。

(2) 直接法

直接法直接使用有限单元法或有限差分法,通过不断降低边坡岩土体强度或增加岩土体的自重使边坡岩土体达到临界状态,然后得到边坡的安全系数和潜在危险滑动面。采用这类方法无需事先假定滑动面的形状和位置,通过不断降低岩土体的强度或增加岩土体的自重,破坏将很“自然地”发生在边坡岩土体抗剪强度不能抵抗剪应力的位置,从而得到最危险滑动面及相应的安全系数。这两种方法分别称之为强度折减有限元法和容重增加有限元法。

对于这两种方法,特别是强度折减法,以下问题还处于争议之中:①破坏准则还存在疑议;②实际计算得到的安全系数会偏大;③很多情况下不能得到滑弧位置;④折减标准不能统一(等比例或是不等比例折减)。

2 边坡稳定性问题的 Dijkstra 算法

2.1 边坡稳定性问题的转化

(1) 最短路问题^[8]

图论的应用非常广泛,它是应用数学的一个重要分支,起源于著名的柯尼斯堡七桥问题。图论要解决的问题就是图上任意两点之间的最短路径问题。最短路问题的定义为:设有一个交通系统连接着若干个目标, x_0 是该系统中的一个固定目标。在该系统中试求从 x_0 到其他各目标的最短路线。图 2 描述了一个从起点 x_0 到终点 x_n 之间的最短路问题。最短路问题有解的一个必要条件是 $D(G)$ 中存在根在 x_0 的支撑树形图;反之,若 $D(G)$ 中存在根在 x_0 的支撑树形图,则最短路问题一定有解。以下我们假定 $D(G)$ 中存在根在 x_0 的支撑树形图。

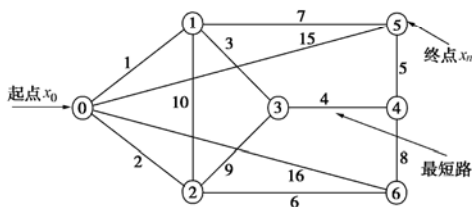


图 2 最短路问题

Fig. 2 Problem of the shortest path

(2) 边坡稳定性问题的图形表达

在边坡有限元计算分析过程中,通常可以得到整个边坡的应力场和位移场,但是并不能给出一个直观的安全系数和最危险滑动面的位置,而边坡的安全系数对于工程实际却有非常重要的意义。如何利用有限

元计算得到的应力场来求解边坡的最危险滑动面及其安全系数是一个非常意义的研究课题。

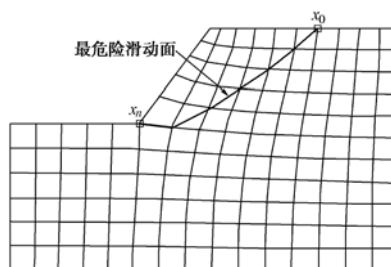


图 3 简单边坡的有限元计算网格

Fig. 3 The FEM mesh of a simple slope

图 3 为一简单边坡的有限元计算网格,如果将节点看作网络图中的节点,节点与节点间的单元的边看作网络图中的边,那么,这个剖分好的网格就可以表示成图论中所描述的一个图,

$$G = (V(G), E(G), \varphi_G) \quad (1)$$

并且,这个图是一个简单无向图。在边坡稳定性问题中最小安全系数的定义为:滑动体沿一条滑动面滑动,其抗滑力除以滑动力(另外一种说法是其中每点的最大应力球半径除以现实的应力球半径)的值达到最小。由安全系数的定义可以发现,其隐藏的是一个最短路问题。因为,滑动面是一个与基础边坡相独立的面,其边界就是边坡的一个边界到另外一个边界的连线,如果将滑动面进入点和滑出点放在网络图的节点上,图 3 中边坡的最危险滑动面可以看作一个从起点 x_0 到终点 x_n 之间的最短路问题。这样,边坡的稳定性问题就可以用最短路问题来表达,边坡的最危险滑动面及其安全系数可以用求解最短路问题的算法解决。解决最短路问题的算法有两种:①Dijkstra 算法;②Floyd 算法。由于在边坡稳定性问题分析过程中,虽然 Floyd 算法比 Dijkstra 算法计算效率更高,但由于 Floyd 算法在搜索到负的安全系数的时候,程序就会停止计算,容易得到错误的计算结果,所以最终选择 Dijkstra 算法来求解最短路问题。

(3) 求解最短路问题的 Dijkstra 方法

当所有道路的长 $w_{ij} \geq 0$ 时,假设 S 是顶点集 V 的真子集,且 $v_s \in S$,并以 $\bar{S}$ 表示 V/S 。若 $P = v_s, \dots, v_i$, v_i 是图 4 中从起点 v_s 到 $\bar{S}$ 的最短路,则显然 $v_i \in S$, $v_i \in \bar{S}$,且从 v_s 到 v_i 的最短路即为从 v_s 沿 P 到 v_i 的路。Dijkstra 算法正是基于这种思想构造的,Dijkstra 算法的计算步骤^[9-10]:①令 $P(v_s) = 0$, $\lambda(v_s) = 0$, $S_0 = \{v_s\}$,对 $v_j \neq v_s$,令 $T(v_j) = \infty$, $i = 0$, $k = s$;②对每个 $v_j \in \bar{S}_i$,取 $T(v_j) = \min \{T(v_j), P(v_k) + w_{kj}\}$,若 $T(v_j) = P(v_k) + w_{kj}$,则令 $\lambda(v_j) = k$;③计算 $\min_{v_j \in \bar{S}_i} \{T(v_j)\}$,其值记为

$T(v_i)$, 若 $T(v_i) < \infty$, 则令 $P(v_i) = T(v_i)$, $S_{i+1} = S_i \cup \{v_i\}$, $k = i + 1$, 否则停止, 此时对 $v_j \in S_i$, $d(v_s, v_j) = P(v_j)$; 而对 $v_j \in \bar{S}_i$, $d(v_s, v_j) = T(v_j)$; ④若 $i = v - 1$, 则停止, 此时对 $v_j \in \bar{S}_i$, $d(v_s, v_j) = P(v_j)$, 若 $i < v - 1$, 令 $i = i + 1$, 转 (2)。

Dijkstra 算法计算所需的时间与 v^2 成正比。

2.2 引入 Dijkstra 算法求解边坡稳定性问题

(1) 边坡稳定性问题的数学表达

对于边坡稳定性问题来说, 其数学表达转换为图论中的赋双权简单网络图来表达。也就是说在 $G = (V(G), E(G), W(G))$ 中, 寻找一棵根在 v_0 的最小树形图, 其末梢位于 v_1 或 $v_m, \dots, v_n$ 。

由 $G = (V(G), E(G), W(G))$ 所定义赋双权简单网络图中, 必定存在一棵根在 v_0 的最小树形图, 其末梢位于 v_1 或 $v_m, \dots, v_n$ 。因为图是简单图且连通, 那图必存在树, 由于树形图的节点包含于树的节点, 所以简单图中必含有树形图, 又因为图的边有限, 所以其根在 v_0 且末梢位于 v_1 或 $v_m, \dots, v_n$ 的树形图的棵数有限, 而每棵树形图都带有一个固定的权值, 所以在所有的树形图中, 必存在最小权值的树形图。这就保证了由边坡稳定性问题所演化得到的数学模型有解。

(2) 引入 Dijkstra 方法要解决的问题

a) Dijkstra 算法的本质是每做一步保证所得到的树形图的末梢节点是从根 v_0 过来的最短路径。所以, 要保证在计算到 v_i 时, 路 $P(v_0, v_i)$ 为最短路径。

b) Dijkstra 算法中还有一个前提条件是权值为非负, 但是在实际计算中, 滑动力是可能为负值的, 由安全系数的计算公式得到: $F_s = \tau_f / \tau$, F_s 也可能为负值, 这个也需要在计算中进行修改。

c) 计算中需要的数据: 滑动力与抗滑力。

在以安全系数为目标函数的最短路径求解过程中, 由于 Dijkstra 算法的前提条件已经不能用于双赋权简单图最短路径求解的过程, 所以必须对 Dijkstra 算法进行修改。

2.3 Dijkstra 算法的修改

(1) Dijkstra 计算中负权的解决

对于模型里的负权, 在安全系数的定义中可以知道, 负的滑动力, 就是说是滑体沿滑动面反向滑动的力, 这对安全系数是有利的, 因为

$$F_s = \sum \tau_f / \sum \tau \quad (2)$$

由于所有的抗滑力都是正值, 如果有一个滑动力为负值, 相当于使得分母变小, 从而安全系数会变大, 所以负的抗滑力对边坡安全是有利的, 本文对它的处理是, 定义大小关系如下:

$$\left. \begin{aligned} F_s^{(-)} &> F_s^{(+)} \\ \text{abs}(F_s) &> \text{abs}(F_s') \Rightarrow F_s > F_s' \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

在这个关系中, 第一个关系要首先被满足, 在满足第一个关系后, 再进行第二个关系的判别。

由这个大小的定义可得: 0 是最小的数, 所有数值都比 0 大, 这与 Dijkstra 算法中的非负权就等价了。

(2) 保证路 $P(v_0, v_i)$ 为最短路径

对于这个问题, 有一种最直接的方法, 就是穷举所有以 v_0 为起点 $v_i \in \bar{S}$ 为终点的路, 然后比较其大小, 而不是 Dijkstra 算法中比较所有 $S \rightarrow \bar{S}$ 的路。但是这种方法是不可行的。这里, 需要研究 $P(v_0, v_i)$ 为最短路径的几个必要条件。下面是这个问题的数学表达: 假设 v_0 为起点, $v_i \in S$ 为终点的所有已经求得的路为最短路径, 其所占用的边集为 $E(S)$, 其没有占用的边集为 $\bar{E}(S)$, 如果由 Dijkstra 算法得到的路 $P(v_0, v_j)$, $v_j \in \bar{S}$ 为最短路径, 需要满足以下两个条件。

a) 如果在 $\bar{E}(S)$ 中的边的安全系数 $F_s(e)$ 中存在小于路 $P(v_0, v_j)$ 的安全系数值 $F_s(P)$, 那么, 将不能保证由 Dijkstra 算法得到的路 $P(v_0, v_j)$, $v_j \in \bar{S}$ 为最短路径, 因为, 其安全系数的路将有可能通过那些安全系数比 $P(v_0, v_j)$, $v_j \in \bar{S}$ 小的路, 使得那些安全系数本来比 $P(v_0, v_j)$, $v_j \in \bar{S}$ 大的路 $P(v_0, v_i)$, $v_i \in S$ 的安全系数减少, 从本质上说和 Dijkstra 算法里面要求路的权值是递增的相违背。所以要求:

$$F_s(\bar{E}(S)) > P(v_0, v_j) \quad (4)$$

b) 当条件 (1) 被满足了之后, 这里还不能确定这条路 $P(v_0, v_j)$, $v_j \in \bar{S}$ 为最短路径, 如图 4 所示。

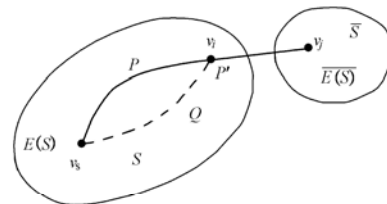


图 4 从 v_s 沿 P 到 v_j 的路为最短

Fig. 4 The shortest path from v_s to v_j along P

当所有属于 $\bar{E}(S)$ 的边的安全系数 $F_s(\bar{E}(S))$ 大于等于 $F_s(P)$ 时, 我们注意到: 假设 S 是顶点集 V 的真子集, 且 $v_s \in S$, 并以 $\bar{S}$ 表示 V/S 。若

$$P(v_s, v_j) = \{P(v_s, v_i), \{v_i, v_j\}\} = v_s, \dots, v_i, v_j \quad (5)$$

是图 4 中从起点 v_s 到 $\bar{S}$ 的最短路径, 则显然 $v_i \in S$, $v_j \in \bar{S}$, 且 $P(v_s, v_i)$ 为从 v_s 到 v_i 的最短路径。我们用反证法得到其成立的条件, 现在假设 $Q(v_s, v_i)$ 为从 v_s 到 v_i 的最短路径, 则可令:

$$P'(v_s, v_j) = \{Q(v_s, v_i), \{v_i, v_j\}\} \quad (6)$$

是从 v_s 沿 Q 到 v_i , 再从 v_i 到 v_j 的路, 那么:

$$F_s(P'(v_s, v_j)) = \frac{\tau_f(Q) + \tau_f(v_i, v_j)}{\tau(Q) + \tau(v_i, v_j)}, \quad (7)$$

$$F_s(P(v_s, v_j)) = \frac{\tau_f(P) + \tau_f(v_i, v_j)}{\tau(P) + \tau(v_i, v_j)}, \quad (8)$$

则要使得下式成立:

$$F_s(P) - F_s(P') = \frac{\tau_f(P) + \tau_f(v_i, v_j)}{\tau(P) + \tau(v_i, v_j)} - \frac{\tau_f(Q) + \tau_f(v_i, v_j)}{\tau(Q) + \tau(v_i, v_j)} > 0. \quad (9)$$

由于 $F_s(P'(v_s, v_j))$ 比 $F_s(P(v_s, v_j))$ 小, 这与 P 是从起点 v_s 到 $\bar{S}$ 的最短路矛盾。这个时候, 就能确定这条路 $P(v_s, v_j), v_j \in \bar{S}$ 为最短路。

如式 (9) 成立, 则通过反证法就可推导出 $P(v_s, v_j)$ 为最短路, 将此问题转化为数学表达式, 得: 将 $f_s(v_j)$ 表示为

$$f_s(v_j) = \tau_f(v_i, v_j) / \tau(v_i, v_j) = a/b; \quad (10)$$

将 $F_s(P)$ 表示为

$$F_s(P) = \tau_f(P) / \tau(P) = c/d; \quad (11)$$

将 $F_s(Q)$ 表示为

$$F_s(Q) = \tau_f(Q) / \tau(Q) = e/f. \quad (12)$$

那么存在以下关系:

$$a/b > c/d > e/f, \quad (13)$$

在这个前提下, 式 (9) 可表示为

$$F_s(P) - F_s(P') = \frac{a+c}{b+d} - \frac{a+e}{b+f}. \quad (14)$$

如果式 (9) 得到满足, 则式 (9) 可以推出矛盾, 所以假设条件就不成立, 那么 $P(v_s, v_j)$ 为从 v_s 到 v_j 的最短路成立。设 $d = k_1 f$, $c = k_1(e + n_1)$, $b = k_2 f$, $a = k_2(e + n_2)$, 由题设关系可得 $n_2 > n_1 > 0$, 由于前提条件 (1) 可得, 这里可认为 a, b, c, d, e, f 均大于 0, 则可以得

$$f(k_2 n_2 + k_1 n_1 + k_1 k_2 n_1 - k_1 k_2 n_2) > 0, \quad (15)$$

因为 $f > 0$,

$$k_2 n_2 + k_1 n_1 + k_1 k_2 n_1 - k_1 k_2 n_2 > 0, \quad (16)$$

因为 $k_1 > 0, k_2 > 0$, 不等式两边同除 $k_1 k_2$ 得

$$n_2 / k_1 + n_1 / k_2 + n_1 - n_2 > 0, \quad (17)$$

那么

$$n_1 / k_2 > n_2 - n_1 - n_2 / k_1. \quad (18)$$

因为 $k_1 > 0, k_2 > 0$, 如果等式右边小于等于 0, 那么等式自然成立, 此时

$$n_2 - n_1 - n_2 / k_1 \leq 0 \Leftrightarrow n_2 / k_1 \geq n_2 - n_1, \quad (19)$$

因为 $n_2 > n_1 > 0$, 所以

$$k_1 \leq \frac{n_2}{n_2 - n_1}. \quad (20)$$

若等式右边大于 0, 即

$$k_1 > \frac{n_2}{n_2 - n_1}, \quad (21)$$

此时要满足式 (18),

$$\frac{n_1}{k_2} > n_2 - n_1 - \frac{n_2}{k_1} \Leftrightarrow k_2 < \frac{k_1 n_1}{k_1 (n_2 - n_1) - n_2}, \quad (22)$$

那么, 现在就得到了保证式 (16) 成立的条件:

$$\begin{cases} k_2 \in R^+ & (k_1 \leq \frac{n_2}{n_2 - n_1}) \\ 0 < k_2 < \frac{k_1 n_1}{k_1 (n_2 - n_1) - n_2} & (k_1 > \frac{n_2}{n_2 - n_1}) \end{cases}. \quad (23)$$

由式 (23) 可知, 当 k_1, k_2 满足式 (23) 后, 式 (9) 大于 0, 与假设矛盾, $P(v_s, v_j)$ 为从 v_s 到 v_j 的最短路成立。

当满足了式 (4)、(5) 的条件之后, Dijkstra 方法引入边坡稳定性分析的前提条件就能满足, 就可以用数学方法严格的证明所求得的最危险滑动面及其安全系数为在所有危险滑动面及安全系数中的最小值。

3 Dijkstra 算法的优化

引入了 Dijkstra 算法后, 是不能直接用于计算的, 因为 Dijkstra 算法的退出条件是: 若 S_k 包含所有树形图的末梢节点, 而要将节点加入到 S_k 就必须满足式 (4)、(5) 中规定的条件。对于式 (4) 中的条件, 满足并不困难, 只需定义一个新的必要运算。

对于式 (23), 由于 d, f 为最短路或假设的最短路的滑动力, 而 b 为单元边上的滑动力, 所以 $d \approx f \gg b$, 可以推导得 $k_1 \in [1 \pm \Delta], 0 < k_2 \ll 1, n_2 > n_1$ 且 $n_2 \approx n_1$, 这个条件在计算中很容易得到满足。

而对于式 (4), 要满足是非常困难的, 因为: 如果存在一条边, 其安全系数比较小, 但其位置离最短路比较远, 最短路不会通过该边, 于是, 式 (5) 就一直不能得到满足, 直到搜索到该边, 而把这条边加入到 $P(v_s, v_j)$ 后, 条件才能得到满足, 但是, 这个过程是非常漫长的, 所以程序不能直接应用于边坡稳定性分析中去。所以, 这里必须引入一些限制条件, 但这些限制条件应该是符合边坡的力学特性, 这里引入了 3 个限制条件, 如图 5 所示的 3 种情况。

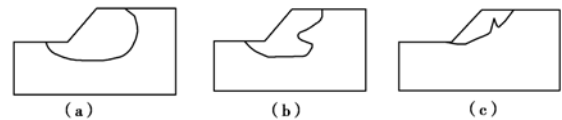


图 5 3 种不满足力学特性的边坡滑动面

Fig. 5 Some cases of the slide surface unsatisfying the mechanical characteristics

图 5 所示的情况中, 说明了以下问题:

(1) 边坡的滑动面不会出现尖角(二阶导数很大或两相邻边的夹角小于 90°)。要出现这种情况,在尖角处必会出现非常大的应力矢量方向的改变,或者说出现非常大的应力集中,而且这个应力的方向与整体方向的夹角超过 90° ,这种情况在实际有限元计算中是不可能出现的。因为,出现很大应力集中后,边坡已经破坏了,如图 5 中(b)、(c)所示。具体这个夹角的度数,可以在程序中根据实际情况加以限制。

(2) 边坡滑动面的发展不会出现锯齿形,如图(c)所示,这种情况在局部小范围内可能会出现,但是在整体的边坡滑动中,是不符合力学性质的。

(3) 在通常情况下,边坡滑动面不会向坡内发展(如图 5(a)中的边坡为向“右”发展),如果这个条件被确立,将会大大的减少计算时间,但是这个条件在计算中也是可以屏蔽掉的。

对于第一点,其图形学的表达为:在一条最短路上,连接同一个节点的两条边的夹角 α 要大于 90° ,如图 6 所示,这个条件的判别的数学表达为

$$\|\vec{v}_i v_1 + \vec{v}_1 v_j\| \geq \|\vec{v}_i v_j - \vec{v}_1 v_i\| \quad (24)$$

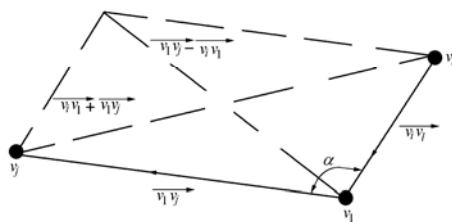


图 6 同一节点两相邻边的夹角

Fig. 6 The angle between the edges connected to the same node

将这两个条件加入导 Dijkstra 算法中的判别式去,使得程序的运算更为有效。由于规定了滑动面的“生长”方向,那么式(4)的判别范围将被限定在滑动面起点与所到达的节点之间,这将大大简化判断滑动面是否为最短路所需要的计算量,也能更快的找到该节点所对应的最短路。另外规定了滑动面“生长”方向后,使得搜索的滑动面数量大大的减少,优化了程序的运行。

(1) 减少了潜在的最短路数量,由于许多“最短路”的发展不符合上述两个要求,使得这个“最短路”的搜索提前结束,节省了许多计算消耗。

(2) 增大了 Dijkstra 结束条件成立的概率。当有了上述两个条件的限制之后,式(4)的比较区域就变为:①对于顺坡向发展的滑动面,其式(4)的判断区域变为图 7 中的 III 区;②对于存在逆坡向发展滑动面,那么搜索区域在这里的处理方法是,给定一个与滑动面开展深度 h 成比例的发展最大宽度 l ,搜索区域就处于如图 8 所示的 III 中。

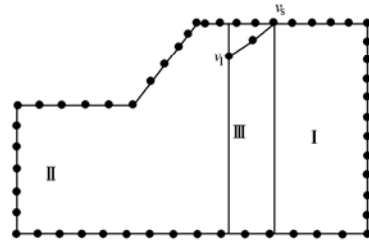


图 7 最短路发展到 v_1 时安全系数的比较范围

Fig. 7 The extent of comparison of safety factors when the shortest path developed to v_1

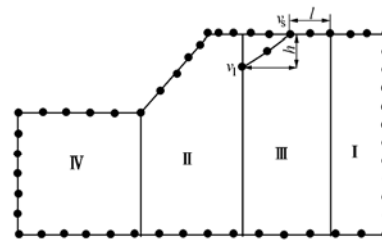


图 8 容许滑动面逆坡向发展时的搜索区域

Fig. 8 The search region when the slide surface was allowed to develop against the direction of the slope

经过优化后,可得到一有效性满足计算要求的程序流程。经过优化后的程序运行步骤如下所示。

(1) 令 $\tau_f(v_s) = 0$, $\tau(v_s) = 0$, $P_T = \{\}$, $\overline{P_T} = \{\}$, $\lambda(v_s) = 0$, $i = 0$, $S_E = \{v_{E1}, v_{E2}, \dots, v_{Ei}\}$, $S_0 = \{v_s\}$, $\overline{S_0} = S_0 / v_s$, 对 $v_j \neq v_s$, 令 $F_s(v_j) = \infty$, $k = s$ 。

(2) 对每个 $v_j \in \overline{S_i}$, 如果满足式(2)与式(3), 则计算

$$F_s(P(v_s, v_i)) = \min \left\{ \frac{\tau_f(P(v_s, v_k)) + \tau_f(v_k, v_i)}{\tau(P(v_s, v_k)) + \tau(v_k, v_i)} \right\} \quad (25)$$

若当 $k = k_0$ 时, 上式达到最小, 则令 $\lambda(v_j) = k_0$ 。

(3) 计算 $\min_{v_j \in \overline{S_i}} \{T(v_j)\}$, 其值记为 $T(v_1)$, 若 $T(v_1) < \infty$, 则令:

$$\left. \begin{aligned} \tau_i(P(v_s, v_i)) &= \tau_i(P(v_s, v_k)) + \tau_i(P(v_k, v_i)) \\ \tau(P(v_s, v_i)) &= \tau(P(v_s, v_k)) + \tau(P(v_k, v_i)) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式中, $k = \lambda(v_1)$ 。

(4) 判断在容许的区域中的边是否满足式(4)、

(5) 所规定的条件,如果是在计算中第一次搜寻到从 v_s 到 v_1 的路,认为有一个条件不满足。若同时满足两个条件,检查 $\overline{P_T}$ 内是否存在从 v_s 到 v_1 的路。如果存在,则比较是否 $F_s(P(v_s, v_i)) < \overline{P_T}(v_1) F_s$, 如果是,则令 $P_T = P_T \cup \{P(v_s, v_i), F_s(v_s, v_i)\}$, $S_{i+1} = S_i \cup \{v_1\}$, $\overline{S_{i+1}} = \overline{S_i} / \{v_1\}$; 否则不存在 v_s 到 v_1 的路,则令 $S_{i+1} = S_i \cup \{v_1\}$; $P_T = P_T \cup \{\overline{P_T}(v_1) \cdot P, \overline{P_T}(v_1) F_s\}$ 。

如果不能满足两条件中的一个,检查 $\overline{P_T}$ 内是否存在从 v_s 到 v_1 的路,如果不存在或者存在但

$F_s(P(v_s, v_i)) < \overline{P}_T(v_i)F_s$, 记为

$$\overline{P}_T = \overline{P}_T \cup \{P(v_s, v_i), F_s(v_s, v_i)\} \quad (27)$$

否则, 不保存这次结果。

(5) 若 S_k 包含所有树形图的末梢节点, 则停止, 此时 $P(v_s, v_{Ei}) = P_T(v_{Ei})P$, $v_{Ei} \in S_E$, 否则转 (2)。

经过优化后, 可得到一有效性满足计算要求的程序流程。

4 Dijkstra 算法输入数据的计算

Dijkstra 算法所需要的输入参数是每条边的抗滑力与滑动力。

4.1 确定节点与节点的连接

这里使用一个半径为 R 圆确定与固定节点相关联的节点, 如图 9 所示。

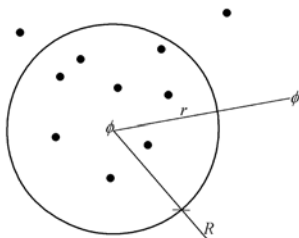


图 9 关联节点的选取

Fig. 9 Selection of the correlated nodes

$r > R$ 时, 认为这两个节点没有关联, 反之 $r < R$ 时, 两节点相关联。且使用自适应半径, 以有限元计算中单元的最大直径作为 R , 当关联节点大于规定数目 m 时, 取半径最短的前 m 个节点作为关联节点。但是, 当所选取的关联节点有 Dijkstra 算法的输出节点的时候, 以输出节点优先, 这里的认为是将两点之间的半径减少 $1/3$ 后再使用前面的算法判定关联节点。

4.2 滑动力的计算

如图 10 所示, 滑动力的定义: 滑动力是指滑动体下滑对边坡“基座”所产生的力。对坡向向左的边坡而言, 逆时针为滑动力正方向。在用图形表达这个抗滑力时, 存在 3 种情况: 边与 x 轴夹角为锐角、钝角、滑动面向坡内发展, 如图 11~13 所示。

对于前面两种情况, 都将边 $v_i v_j$ 以上的部分看作是边坡滑动体的一部分, 因为以滑动体上的滑动力为

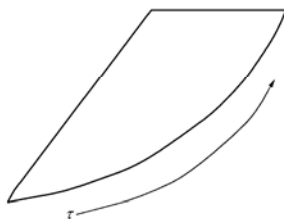


图 10 滑动力示意图

Fig. 10 The schematic diagram of slide force

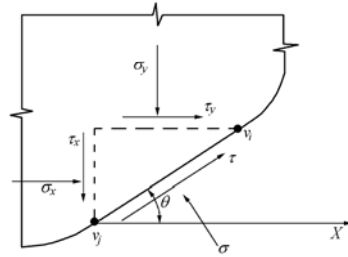


图 11 边与 x 轴夹角为锐角时边的滑动力定义

Fig. 11 Definition of the slide force when the angle between the edge and the axis x was a sharp angle

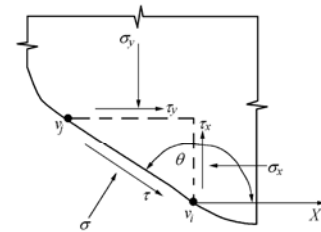


图 12 边与 x 轴夹角为钝角时边的滑动力定义

Fig. 12 Definition of the slide force when the angle between the edge and the axis x was an obtuse angle

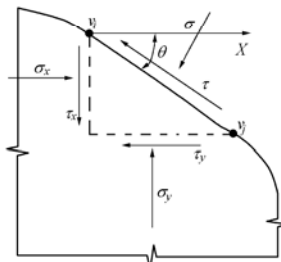


图 13 滑动面向坡内发展时边的滑动力的定义

Fig. 13 Definition of the slide force of the edge when the slide surface developed toward the inside of the slope

逆时针方向的切应力, 所以 $v_i v_j$ 边上如图 11, 12 所示的方向为正方向, 而在有限元的定义中, 正应力以面的外法线方向为正。根据上面定义 τ_y 以 x 轴正方向为正, 但是在滑动体的切应力定义中, 它是负(顺时针)的。但是在应力圆的计算中, 以顺时针为正, 如果以这个方法定义滑动体滑动力的正方向, 那么滑动力是负的, 而 τ_y 是正的, 那么在基于 y 轴正平面用应力圆计算滑动力时, 最终结果与计算结果是反号的。对于逆坡向发展的边, 用相同的分析方法得到相同的结果。如图 14 所示, 滑动力的计算公式为

$$\tau_{v_i \rightarrow v_j} = -\tau = -R \sin(\alpha + 2\theta) \quad (28)$$

式中, $\alpha = \arctan(\tau_y / (\sigma_y - \sigma_o))$ ($\alpha \in [-2\pi, 2\pi]$), $\sigma_o = (\sigma_x + \sigma_y) / 2$, $R = \sqrt{(\sigma_y - \sigma_o)^2 + \tau_y^2}$, $\theta = \arctan((y_{v_i} - y_{v_j}) / (x_{v_i} - x_{v_j}))$ ($\theta \in [-\pi, \pi]$)。

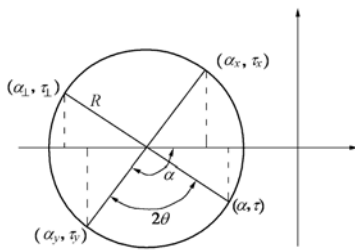


图 14 运用应力圆求解平面的应力状态

Fig. 14 Plane stress state solved with the stress circle method

4.3 抗滑力计算

这里提出了基于不同材料模型的抗滑力计算公式。

(1) Mohr-Coulomb 准则的抗滑力计算

最大承受剪应力大小为 $b\sigma$ 的长度, 计算公式为

$$\tau = \sqrt{R^2 - (\sigma - \sigma_o)^2} \quad (29)$$

其中, σ_o 为应力圆的中心, 由图 15 可知:

$$\sigma_o = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 \quad (30)$$

R 为最大抗滑力的应力圆的半径, 由图 14 可以看出, R 应该是点 σ_o 到屈服边界 (Mohr-Coulomb 准则的屈服边缘——直线 $\tau = -\sigma \tan \varphi + c$) 的距离, 根据点到直线的距离的公式:

$$R = \frac{|\tan \varphi \sigma_o - c|}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} \quad (31)$$

要注意的一点是, 在 Mohr-Coulomb 准则计算抗滑力的时候, 所用的 σ_x , σ_y 应该是该单元的最大正应力和最小正应力。

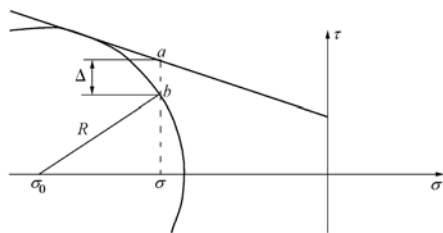


图 15 经典抗滑力计算的误差

Fig. 15 The error produced by the classical calculation method of anti-slide force

(2) Drucker - Prager 准则的抗滑力计算

根据 Drucker - Prager 准则的屈服面计算公式:

$$F = t - p \tan \beta - d \quad (32)$$

式中, $p = -\frac{1}{3} \text{trace}(\sigma) = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$, $\sigma =$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad t = \frac{1}{2} q \left[1 + \frac{1}{K} - \left(1 - \frac{1}{K} \right) \left(\frac{r}{q} \right)^3 \right] \quad (S = \sigma +$$

pI , $q = \sqrt{\frac{3}{2}(S:S)}$, $r = \left(\frac{9}{2} S:S:S \right)^{\frac{1}{3}}$ 。 $F = 0$ 的面就是 Drucker - Prager 准则的屈服面。

对于式 (32), 可以写成一个关于 σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{zx} , τ_{yz} 的函数, 在三维问题中, 要求的是滑动面所在平面的 τ , 而其他 5 个参数可以当成已知条件代入, 本文只对平面问题进行分析。在平面问题中 $\tau_{zx} \cdot \tau_{yz} = 0$ (在平面应力问题里面 $\sigma_z = 0$), t 可以表示成一个关于 τ_{xy} 的函数:

$$\begin{aligned} t(\tau_{xy}) &= \frac{1}{2} q \left[1 + \frac{1}{K} - \left(1 - \frac{1}{K} \right) \left(\frac{r}{q} \right)^3 \right] \\ &= \frac{1}{2} q \left(1 + \frac{1}{K} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{K} \right) \frac{r^3}{q^2} \quad (33) \end{aligned}$$

令 $q = q(\tau_{xy})$, 将 $r = r(\tau_{xy})$ 表示成 q 的函数:

$$r^3 = \frac{3}{2} q^2 (\sigma_x + \sigma_y - 2\sigma_z) - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y - 2\sigma_z)^3 \quad (34)$$

那么 t 可以表示成一个的 q 函数。

而在式 (32) 中的其他 3 个参数 p , d , β 都是与 τ_{xy} 无关的。所以 $t(\tau_{xy}) = p \tan \beta + d$, 需要注意的是, 这个时候 σ_x 为滑动面所在的平面, 而不是笛卡儿坐标系下的 x 正平面上的正应力, σ_y 为与滑动面所在平面垂直的平面上的正应力, σ_z 为平面外的正应力 (平面应力问题中 $\sigma_z = 0$)。那么式 (32) 就可以表示为一个 q 的三次多项式 (等式两边同乘 q^2)。其中,

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= (1 + 1/K) / 2, \\ a_2 &= -\frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{K} \right) (\sigma_x + \sigma_y - 2\sigma_z) - (p \tan \beta + d), \\ a_1 &= 0, \\ a_0 &= -(1 - 1/K) / 4 (\sigma_x + \sigma_y - 2\sigma_z)^3, \\ F &= a_3 q^3 + a_2 q^2 + a_1 q + a_0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

由 $F = 0$ 求解出 q , 再由 q 的定义就可以解出材料破坏时, 滑动弧所在面上所能承受的剪切应力 τ_{xy} , 也就是滑动面上的抗滑力。本程序所需要输入的是抗滑力与滑动力在单元边上的值, 所以, 无论是经典的取值法还是文中提出的取值法都适用于该程序。

4.4 程序操作界面

根据前面的理论, 编制了相关的计算程序及前处理后处理程序, 操作界面如图 16 所示, 后处理界面如图 17 所示。程序需要的输入数据有: ①节点信息 (每种材料作为一个输入文件), 信息包括: 节点号、节点 x 坐标、节点 y 坐标、 σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} ; ②单元信息 (计算网格数据); ③每种材料的材料参数; ④滑动面进入点和剪出点信息和上边界信息。



图 16 程序操作界面

Fig. 16 The control interface of the program

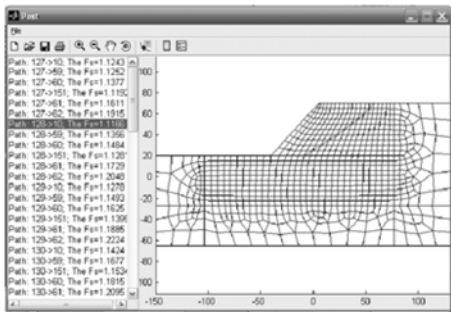


图 17 程序后处理界面

Fig. 17 The post interface of the program

5 边坡考核算例

以下通过一个经典考题来验证本文的边坡稳定性分析方法的合理性。

澳大利亚计算机协会于 1987 年委托 BDonald 和 PGiam 设计 ACADS 边坡稳定性分析程序的考核题, 第一道考核题是个二维均质土坡, 边坡基本形状见图 18, 材料参数见表 1。28 家单位提供了答案, 陈祖煜与 Fredlund, Baker 一起参与了计算工作, 考核题最终推荐答案的边坡安全系数为 1.00, 最危险滑动面位置及形状见图 18。由于该算例调查的规模较大, 得到的分析成果比较可靠。因此, 为了验证基于有限元计算结果的改进 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法的正确性, 这里将利用上述考核算例边坡作为一个简单算例。采用基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法对这个算例进行分析, 算例边坡的网格剖分见图 19, 并且同时采用了强度折减法对该边坡进行了分析, 计算得到的潜在危险滑动面位置和边坡安全系数见图 20。

表 1 考核算例(均质土坡)的力学参数

Table1 Mechanical parameters for the examined case (homogeneous soil slope)

c /kPa	φ /(°)	γ /(kN·m ⁻³)	E /MPa	ν
3.0	19.6	20.0	10	0.25

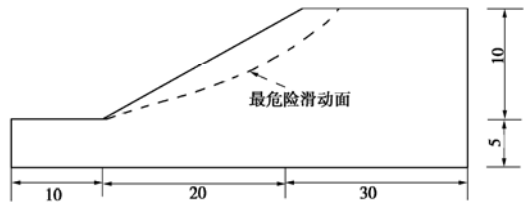


图 18 考核算例边坡形状及最危险滑动面位置

Fig. 18 The shape and position of dangerous slide surface in the examined slope



图 19 算例边坡的网格剖分

Fig. 19 The divided grid of examined slope

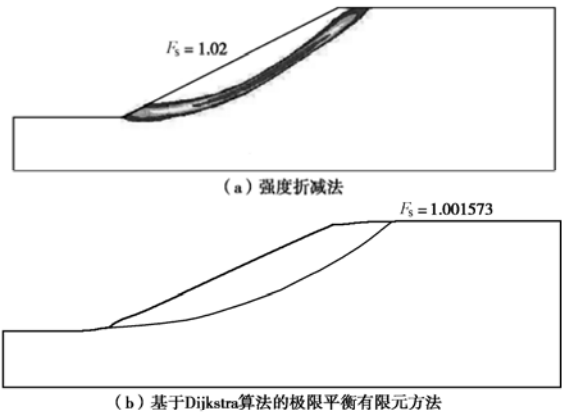


图 20 算例边坡安全系数及危险滑动面位置

Fig. 20 The safety factor and position of dangerous slide surface for examined slope

利用强度折减法计算得到的考核算例边坡安全系数为 1.02, 利用基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法得到考核算例边坡安全系数为 1.0015673, 与最终推荐答案的边坡安全系数 1.00 比较接近; 并且计算得到的潜在危险滑动面位置也基本一致, 这说明采用基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法来分析边坡的稳定性是合理可行的。

本文建立的边坡稳定性分析方法考虑了岩、土体材料的本构关系, 可以反映真实的力学性状, 不需要事先假设滑动面和进行条间力的简化, 可以自然的形成滑动破坏面。

6 糯扎渡右岸泄洪洞边坡稳定性分析

为了对比分析, 对糯扎渡右岸泄洪洞出口边坡还采用了极限平衡方法和强度折减法计算边坡的最危险

滑动面及其安全系数。

(1) 极限平衡法

极限平衡方法分别采用简化 Bishop 法^[13]、Janbu 法^[14]、Spencer 法^[15]和 Morgenstern-Price 法^[16]4 种方法进行了边坡稳定性分析,安全系数取 4 种方法计算得到的安全系数的平均值。

(2) 强度折减法^[17-18]

基于强度折减法的有限元计算过程为:保持岩土体的重力加速度为常数,通过逐步减小抗剪强度指标,将 c 、 φ 值同时除以折减系数 F_s ,得到一组新的强度指标 c' 、 φ' 再进行有限元,反复计算直至边坡达到临界破坏状态,此时采用的强度指标与岩土体原具有的强度指标之比即为该边坡的安全系数 F_s 。

$$c' = c / F_s \quad , \quad (36)$$

$$\varphi' = \arctan(\tan \varphi / F_s) \quad 。 \quad (37)$$

当对岩体力学参数进行不断折减的时候,判定一个边坡是否达到临界破坏的依据是:选取几个具有代表意义的关键点(在选取关键点时,参照极限平衡的计算结果,使得关键点的位置尽可能处于潜在危险滑动面上),当岩体力学参数不断折减时,关键点的位移会在某一时刻发生迅速增大变化,这一时刻即为边坡的临界状态,此时的折减系数作为边坡的安全系数。

6.1 工程概况

糯扎渡水电枢纽右岸泄洪隧洞出口地段边坡布置于工程地质 F 区,工程地质条件较差。出口地段地形坡度 $30^{\circ} \sim 45^{\circ}$,开挖边坡与 #3 导流洞出口边坡相连,洞脸边坡最大开挖坡高以 #3 导流洞出口处最大,约为 126 m,洞脸边坡走向约 $N25^{\circ}E$,倾向 SE,设计开挖坡角为 48° 。

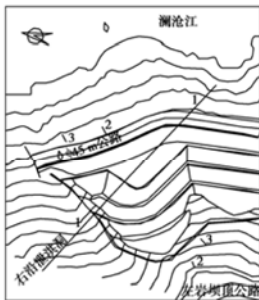


图 21 泄洪洞边坡平面计算剖面位置图

Fig. 21 The position of computing section in slope of the flood discharge

开挖边坡部位地表有 1~3 m 厚的坡积层,局部基岩裸露,基岩岩性为花岗岩,边坡岩体主要为弱风化,坡顶有部分全、强风化岩体(厚度约 16 m 左右), F_{28} 断层(产状为 $N15^{\circ}-27^{\circ}W$, $SW75^{\circ}-85^{\circ}$)斜切坡面。 F_{38} 、 F_{39} 、 F_{28} 断层带及全风化、部分强风化花

岗岩为 V 类边坡岩体,强风化及部分弱风化上部花岗岩为 IV 类边坡岩体。全、强风化岩体及 F_{28} 断层带组成的边坡,稳定性差,弱风化花岗岩组成的边坡,其稳定性主要受结构面控制。

为了准确估计泄洪洞出口边坡的稳定性,选取了 3 个具有代表意义的二维剖面进行边坡稳定性分析,剖面布置如图 21 所示:其中 1-1 剖面沿泄洪洞轴线;2-2 剖面沿左右坡拐角线附近;3-3 剖面经过第⑤组节理带,为可能产生平面滑动剖面。

限于篇幅,这里只对 3 个剖面中有代表意义的 3-3 剖面进行边坡稳定性分析。对于 3-3 剖面,首先采用极限平衡法和强度折减法进行边坡稳定性分析;然后应用基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法对边坡进行稳定性分析。3-3 剖面的岩体材料分层如图 22 所示。

有限元计算时采用的岩体力学参数如表 2 所示。

计算时,在极限平衡与强度折减计算中,节理和断层采用弱化材料来模拟;而基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元计算中,节理和断层采用结构面来模拟。

表 2 岩体力学参数取值

Table 2 The values of mechanical parameters of rock mass						
编号	岩层	$\gamma / (kN \cdot m^{-3})$	c / MPa	$\varphi / (^{\circ})$	E / GPa	ν
1	坡积层	20.0	0.05	15	0.5	0.36
2	全风化	22.0	0.15	20	1.4	0.32
3	强风化	24.0	0.30	38	5.4	0.29
4	弱风化上	25.5	1.00	48	16.0	0.26
5	弱风化下	26.1	1.70	52	38.0	0.24
6	微新	26.3	2.00	56	50.0	0.22
7	节理断层	20.0	0.10	20	1.0	0.34

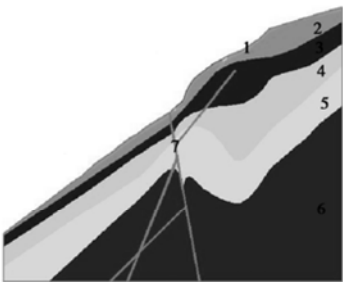


图 22 3-3 计算剖面的岩体分层

Fig. 22 The delamination of rock mass in computing section 3-3

6.2 极限平衡法计算结果

极限平衡法计算结果如表 3 所示。

表 3 极限平衡计算结果

Fig. 3 Computed results by the limit equilibrium method				
工况	Bishop 法	Janbu 法	Spencer 法	M-P 法
自然边坡	1.503	1.566	1.570	1.570
开挖完成	1.500	1.515	1.627	1.670

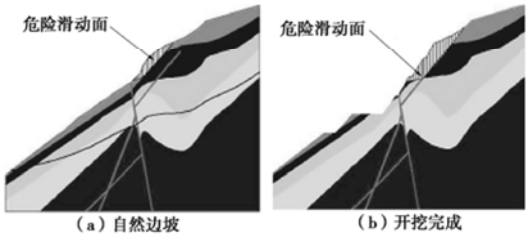


图 23 极限平衡计算得到的潜在危险滑动面

Fig. 23 The potential dangerous slide surface computed by the limit equilibrium method

图 23 为 3-3 剖面用极限平衡法计算得到的潜在危险滑动面, 工况分别为自然边坡和开挖完成后。

6.3 强度折减法计算结果

极限平衡有限元边坡稳定性分析的强度折减法采用 FLAC^{3D} 有限差分软件进行计算。结合极限平衡的计算结果, 关键点的位置尽可能处于潜在危险滑动面上, 开挖前取 2 个关键点: a 点(取竖向位移)和 b 点(取水平位移); 开挖后取 c 点(取竖向位移)和 d 点(取水平位移), 位置见图 24。图 25, 26 给出了边坡两种工况下位移与强度折减系数的关系曲线。图中可看出, 自然边坡在岩体力学参数折减到 1.8 时 a 点的竖向位移和 b 点的水平位移开始发生急剧变化, 认为此时的边坡安全系数为 1.8; 边坡开挖完成后, 材料参数折减到 2.0 时 c 点的竖向位移和 d 点的水平位移开始发生急剧变化, 认为此时的边坡安全系数为 2.0。

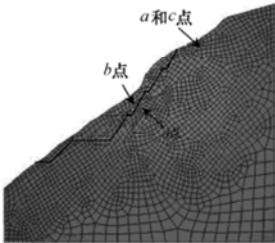


图 24 a , b , c 和 d 在边坡上的位置

Fig. 24 The position of a , b , c , d in the slope

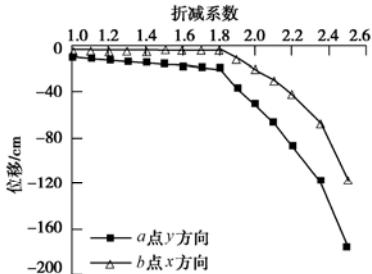


图 25 自然边坡位移 y_a 和 x_b 与折减系数的关系曲线

Fig. 25 The relationship between displacements y_a and x_b and reduction ratio of natural slopes

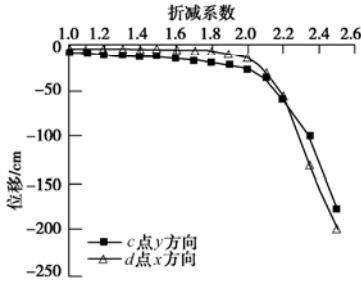


图 26 开挖完成后位移 y_c 和 x_d 与折减系数的关系曲线

Fig. 26 The relationship between displacement y_c and x_d and reduction ratio after completion of excavation

6.4 基于 Dijkstra 算法极限平衡有限元方法计算结果

为了方便基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法的数据前处理, 采用 ABAQUS 进行有限元计算, 然后利用计算得到的各种工况下的应力 - 应变数据、网格信息和材料单元信息, 通过上述程序进行边坡稳定性分析, 计算结果如图 27, 28 所示。

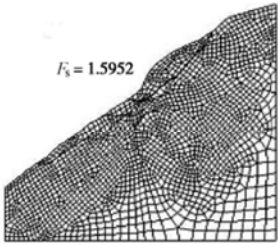


图 27 自然边坡的潜在危险滑动面和安全系数

Fig. 27 The potential dangerous slide surface and safety factor of a natural slope

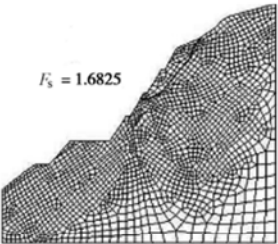


图 28 开挖完成后潜在危险滑动面和安全系数

Fig. 28 The potential dangerous slide surface and safety factor after completion of excavation

6.5 计算结果比较分析

比较分析 3-3 剖面极限平衡法、强度折减法和基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法的计算结果, 如表 4 所示。

从表 4 可以看出, 采用刚体极限平衡计算得到的安全是最小的, 边坡在自然状态下安全系数为 1.552, 开挖完成后安全系数为 1.578; 而强度折减法计算得到安全系数比极限平衡计算和基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法计算得到的安全系数要大, 边坡在自

然状态下安全系数为 1.800, 开挖完成后安全系数为 2.000; 基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法计算得到的安全系数在两者之间, 边坡在自然状态下安全系数为 1.595, 开挖完成后安全系数为 1.683。

表 4 三种方法计算得到的边坡安全系数

Table 4 The safety factors of slopes computed by three methods

工况	极限平衡	改进 Dijkstra 方法	强度折减法
自然边坡	1.552	1.595	1.800
开挖完成后	1.578	1.683	2.000

在各种工况下, 极限平衡和基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法计算得到的潜在危险滑动面位置基本一致。从图 23 (b) 和图 28 可以看出, 开挖完成后危险滑动面的位置以表层滑动为主, 从边坡的坡积层开始, 沿着 N25°—35° W 和 SW45°—70° 顺层节理, 然后从强风化层滑出。

7 逆坡向滑动面稳定性分析

对于逆坡向滑动面来说, 在极限平衡方法进行条分的时候, 所划分得到的计算条块必须要和坡面相交, 如果遇到滑动面逆坡向发展的时候, 将无法正确的划分计算条块, 而且在计算滑动面上滑动力时候, 逆坡向发展的滑动面将无法计算其滑动力与抗滑力, 这将造成安全系数计算的不准确, 所以一般的刚体极限平衡方法不容许滑动面逆坡向发展, 也就没法搜索得到正确的结果, 如图 1 所示。基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法对这个问题迎刃而解, 因为该方法采用单元的切应力作为滑动力, 只要计算得到单元边上的切应力, 乘以边的长度, 就可以求得危险滑动面上的滑动力, 不会产生错误的条分的概念, 这就是基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法与其他研究方法不同的地方, 也是该方法的优势所在。

在应用基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法来计算逆坡向发展的危险滑动面的安全系数时, 需要对滑动面上的滑动力控制条件进行一定的修改, 以使得计算得到的安全系数更为符合实际, 具体的修改方法以洛古水电站右岸坝址边坡为实例进行说明。

7.1 工程概况

洛古水电站是西溪河流域两库五级电站中的第二级, 是一座以发电为主的混合式电站, 其水库为西溪河流域水电梯级近期开发的龙头水库, 总库容 $3730 \times 10^4 \text{ m}^3$, 装机容量 110 MW。枢纽由碾压混凝土拦河坝、引水系统、发电厂房等组成。坝体右岸边坡坡度较陡, 风化层深厚, 卸荷带和断层发育, 主要断层为 F107 等, 卸荷裂隙多填充岩块及次生黄泥。右岸缓倾角结构面倾向坡外, 其产状与岩层层面产状基

本一致, 多充填岩屑、方解石, 部分夹有泥质, 多具有挤压特征。洛古水电站坝址边坡在天然状态下右岸岩体稳定性即处于临界状态, 在进行工程开挖后右岸边坡能否保持稳定, 是施工期安全的一个重要问题。

由工程地质条件分析, 边坡的滑动面位置应在是沿 F107 断层向边坡内部发展, 然后沿缓倾角节理滑出的, 但因 F107 断层的倾向是逆坡向, 所以一般的极限平衡软件无法搜索这样的滑动面, 无论是指定滑动面还是自动搜索。以下采用基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法和 3DEC 软件对该边坡进行分析。

表 5 岩体力学参数

Table 5 Mechanical parameters of rock

地质岩性	弹性模量/GPa	泊松比	密度/($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	内摩擦角/(°)	黏聚力/MPa
微新岩体	15	0.23	2800	55	2.7
强风化	7	0.27	2650	48	1.9
缓倾角节理	0.3	0.35	2000	32	0.18
F107 断层	0.8	0.35	2000	36	0.21

根据实测资料, 建立坝址开挖边坡的二维有限元模型, 见图 29, 模型以右岸坝轴线剖面为计算平面, 模拟的结构面为 F107 断层 (倾角 75°), 通过坝轴线的五条缓倾角节理 (倾角 25°)。计算采用的直角坐标系: X 轴从河谷指向右岸; Z 轴为竖直方向, 向上为正。计算范围侧向为河道中心线向右岸 220 m, 竖直方向高程 1848~2160 m。该边坡的计算参数见表 5。

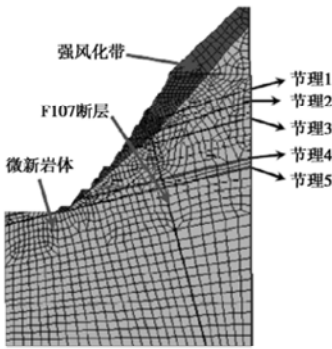


图 29 洛古水电站坝址边坡有限元模型

Fig. 29 FEM model of dam slope in Luogu Hydropower Station

7.2 逆坡向滑动面上的滑动力控制条件分析

洛古水电站右岸坝址边坡稳定性问题的特殊性在于: 逆坡向的 F107 断层与顺坡向的缓倾角节理在边坡内部相交, 使边坡形成几个软弱的滑动面, 危险滑动面的发展应该是沿着 F107 断层向边坡内部发展, 然后顺着某条缓倾角节理滑出。根据 3DEC 的块体单元计算结果, 表明滑动体是由 F107 断层与缓倾角节理所围成的块体单元组成。

通过有限元计算分析, 可以得到整个边坡的应力-应变状态, 以下来分析一下 F107 断层的应力状态。

图 30 为 F107 断层的最大主应力图,可以看出,在 F107 上面存在拉应力区。对于本文的方法来说,各个连接上计算得到的滑动力将都是负值,而在缓倾角节理上的滑动力都是正值,这就使得滑动力沿 F107 断层和缓倾角节理发展的时候滑动力相互抵消,这样会造成计算得到的安全系数偏大。但是从力学角度分析,沿 F107 断层发展的滑动面上的滑动力并不能按照切应力控制,应该以拉应力控制,所以对于逆坡向的滑动面来说,采用拉应力控制作为安全系数的判定标准更加合理,如图 31 所示。

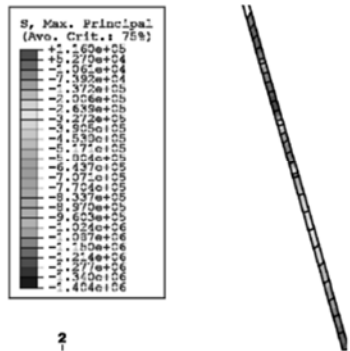


图 30 F107 断层的最大主应力

Fig. 30 The maximum principal stress of faultage F107

对于逆坡向发展的滑动面,准备两套滑动力、抗滑力的输入参数,分别计算其安全系数,取最小值为控制性安全系数,当采用的输入参数若为切应力,该滑动面为切应力控制下的逆坡向滑动面;如果输入参数为拉应力,那么该滑动面为拉应力控制下的逆坡向滑动面,如图 31 所示,这样就计算得到的最危险滑动面及其安全系数更为合理。

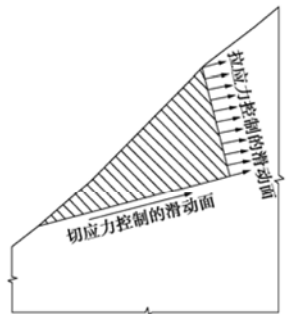


图 31 逆坡向滑动面的滑动力控制条件

Fig. 31 Control condition of the slide stress of the converse sliding surface

7.3 计算结果分析

由于受 F107 和一组缓倾角节理共同切割作用,边坡内形成了若干可能的不稳定滑块,为了比较分析,首先利用 3DEC 软件计算 F107 与不同缓倾角节理组合形成的滑块的安全系数,得到右岸坝址边坡的最危险滑动面(由 J2 和 F107 断层组合而成)的安全系数

为 1.912,次危险滑动面(由 J4 和 F107 断层组合而成)的安全系数为 2.194。然后利用基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法对该边坡的稳定性进行分析,得到右岸坝址边坡的最危险滑动面的安全系数为 2.361,次危险滑动面的安全系数为 2.532,计算结果基本与 3DEC 的计算结果比较接近。

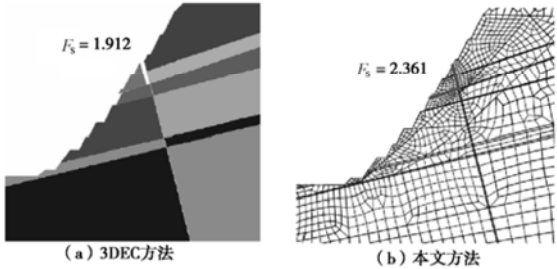


图 32 J2 和 F107 断层组成的滑块计算结果

Fig. 32 Computed results of slide block made of faultages J2 and F107

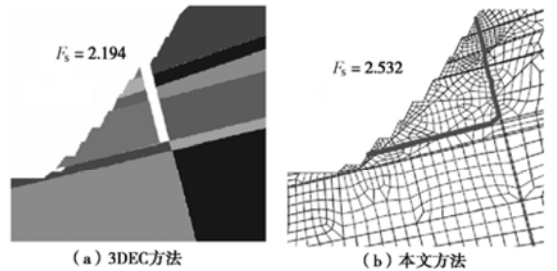


图 33 J4 和 F107 断层组成的滑块计算结果

Fig. 33 Computd results of slide block made of faultages J4 and F107

从图 32, 33 可以看出,逆坡向发展的滑动面,对滑动力进行了修改之后,使得基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法计算得到的安全系数更为合理。通过与离散元计算结果对比,二者滑动面位置基本一致,更加说明了本文的极限平衡有限元方法在计算逆坡向发展的滑动面安全系数是适用的。

8 结 论

(1) 基于有限元的计算结果,将图论中解决最短路径问题的 Dijkstra 算法引入到边坡最危险滑动面及其安全系数中去,将边坡的稳定性问题转化为图论中寻找最短路径问题,对 Dijkstra 算法作了相应的改进,很好的解决岩质边坡的稳定性问题,然后编制相应的计算程序。

(2) 通过一个经典考核边坡算例对基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法进行验证,计算得到的安全系数与给定的答案基本一致,证明了该方法在求解边坡稳定性问题的适用性。

(3) 以糯扎渡右岸泄洪洞出口边坡为实例,分别

采用了极限平衡法、强度折减法 and 基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法进行稳定性分析。计算结果表明:用极限平衡法计算得到的边坡安全系数是比较小;强度折减法计算得到边坡安全系数比较大;而基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法计算得到的安全系数在介于两者之间,稍微比极限平衡法计算得到的边坡安全系数要大一点。3 种方法计算得到的潜在危险滑动面位置基本一致,说明改基于 Dijkstra 算法的极限平衡有限元方法应用于复杂的岩体边坡稳定性分析合理可行。

(4) 对于逆坡向发展的滑动面,只需在采用极限平衡有限元计算前对滑动力控制条件进行修改,改进之后的程序计算得到的安全系数更为合理。通过对洛古水电站右岸坝址边坡的稳定性分析,对滑动力控制条件的修改进行了说明,计算结果表明本文方法适用于逆坡向发展的滑动面安全系数的计算。

参考文献:

- [1] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析——原理方法程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003. (CHEN Zu-yu. Stability analysis of soil slope——theory, method and programs[M]. Beijing: China Water Power Press, 2003. (in Chinese)).
- [2] 徐卫亚. 边坡及滑坡环境岩石力学与工程研究[M]. 北京: 中国环境科学出版社, 2000. (XU Wei-ya. Investigation on the slope and coast environment rock mechanics and engineering[M]. Beijing: Chinese Environment Science Press, 2000. (in Chinese)).
- [3] KIM J Y, LEE S R. An improved search strategy for the critical slip surface using finite element stress fields[J]. Computers and Geotechnics, **21**(4): 295 - 313.
- [4] KENTLI B, TOPAL T. Assessment of rock slope stability for a segment of the ankara-pzantl motorway, Turkey[J]. Engineering Geology, 2004, **74**: 73 - 90.
- [5] JONES D R V, DIXON N. Landfill lining stability and integrity: the role of waste settlement[J]. Geotextiles and Geomembranes, 2005, **23**: 27 - 53.
- [6] RADOSLAW L, MICHALOWSKI. Limit analysis in stability calculations of reinforced soil structures[J]. Geotextiles and Geomembranes, 1998, **16**: 311 - 331.
- [7] KAMEL Omraci, VERONIQUE Merrien-Soukatchoff, JEAN-Paul Tisot, et al. Stability analysis of lateritic waste deposits[J]. Engineering Geology, 2003, **68**: 189 - 199.
- [8] 徐俊明. 图论及其应用[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1998. (XU Jun-ming. Graph and its application[M]. Hefei: Chinese University of Science and Technology Press, 1998. (in Chinese)).
- [9] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications [M]. New York: The Macmillan Press Ltd, 1976.
- [10] CHERKASSKY B K, GOLDBERG A V, RADZIK T. Shortest paths algorithms: theory and experimental evaluation, technical report 93 - 1480[R]. Stanford: Stanford University, 1993.
- [11] DJIDJEV H V, PANTZIOU G E, ZAROLIAGIS C D. Computing shortest paths and distances in planar graphs[J]. ICALP'91. LNCS, 1991, 510: 327 - 338.
- [12] 邓俊晔. 边坡极限平衡有限元稳定分析的 Dijkstra 算法的理论及应用[D]. 南京: 河海大学, 2006. (DENG Jun-ye. The theory and application of limit equilibrium FEM Dijkstra algorithm related to rock slope stability analysis[D]. Nanjing: Hohai University, 2006. (in Chinese)).
- [13] BISHOP A W. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes[J]. Geotechnique, 1955, **16**(2): 89 - 130.
- [14] JANBU N. Stability analysis of slopes with dimensionless parameters[M]. Harvard Soil Mechanics Series, 1954.
- [15] SPENCER E. A method of analysis of the stability of embankments assuming parallel interslice forces[J]. Geotechnique, 1967, **17**: 11 - 26.
- [16] MORGENSTERN N R, PRICE V E. The analysis of the stability of general slip surface[J]. Geotechnique, 1965, **15**: 79 - 93.
- [17] 郑颖人, 赵尚毅, 张鲁渝. 用有限元强度折减法进行边坡稳定分析[J]. 中国工程科学, 2002, **4**(10): 57 - 61. (ZHENG Ying-ren, ZHAO Shang-yi, ZHANG Nu-yu. Slope stability analysis by strength reduction FEM[J]. Engineering Science, 2002, **4**(10): 57 - 61. (in Chinese)).
- [18] 栾茂田, 武亚军, 年廷凯. 强度折减有限元法中边坡失稳的塑性区判据及其应用[J]. 防灾减灾工程学报, 2003, **23**(3): 1 - 8. (LUAN Mao-tian, WU Ya-jun, NIAN Ting-kai. A criterion for evaluating slope stability based on development of plastic zone by shear strength reduction FEM[J]. Journal of Seismology, 2003, **23**(3): 1 - 8. (in Chinese)).