

土壤地盘弹塑性分析及其本构关系之参数研究

张俊阳, 张达德

(中原大学土木工程学系, 台湾 中坜 32023)

摘要: 从热力学出发, 采用连续介质热力学定义, 先辨识等温变形条件下系统外力做功产生自由能与耗散能的互补关联; 再应用热力学状态变数的概念, 在自由能势函数与耗散能势函数中导入有效应力、弹性应变、塑性应变及塑性应变增量等状态变数, 将热力学状态函数描述系统内能量转移轨迹的功能等效应用, 据以推导临界状态本构模型中屈服条件、流动法则及硬化规律的合理表达形式。研究方向着重在土壤弹塑性本构模型参数的研选与物理性诠释, 目的是: 在此延展的临界状态本构模型中导入新的参数, 据以拓展模型描绘土壤材料本构行为的能力。亦由于关键性的参数导入, 使得本研究构建的模型更能合理地描述各类型土壤的异向性本构行为; 在本文后续的模型验证研究工作中, 该项成果的数值模型已可精确地提供数值分析数据, 在与工程监测资料的比对上呈现优于莫尔-库仑模型和修正剑桥模型的符合性。

关键词: 临界状态模型; 热力学; 能量耗散率; 迁移应力; 屈服函数; 流动法则; 硬化规律

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2007)07-1018-12

作者简介: 张俊阳(1956-), 男, 博士研究生, 从事岩土工程工作。E-mail: tung0824@ms23.hinet.net。

Studies on parameters in constitutive relation for elastic/plastic analysis of soil mass

CHANG Jung-yang, CHANG Ta-teh

(Department of Civil Engineering of Chung Yuan Christian University, Chung Li 32023, China)

Abstract: Based on the definition of continuous media of thermodynamics, the complementary correlation between free energy and dissipation energy triggered by external forces was identified first under iso-thermal deformation condition. And, the state variables including effective stress, elastic strain, plastic strain, and plastic strain increment were incorporated into both dissipated and free energy potential functions. Then, the equivalent application of the function of state on describing energy locus transfer inside the system was developed to create a more reasonable layout of yield condition, flow rule and hardening law of critical state constitutive model. This paper concentrated on selecting the parameters for the elastic/plastic constitutive model of soils and how to interpret the actual physical phenomena. And, the goal was to improve the ability of this model in describing constitutive behavior of soils through incorporating new parameters into the extended critical state constitutive model. Moreover, through this introduction of critical parameters, the present model was more realistic to describe anisotropic constitutive behavior of different types of soils. The numerical model, based on the effort of model verification, could precisely provide numerical simulation data which provided better consistent simulation with field monitoring data than Mohr-Coulomb model and modified Cam-clay model.

Key words: critical state model; thermodynamics; dissipation rate; shift stress; yield function; flow rule; hardening law

0 绪 论

岩土工程的开挖或堆填作业有朝着高、深、大、难方向发展的趋势, 在分析及计算工程所涉及的土体稳定时, 往往需藉由数值分析方法及本构模型的应用, 以评估开挖或堆填过程的安全性, 并期望能正确地反映及回馈设计考虑。然而, 土壤在塑性状态下应力-应变关系是非线性的, 而且还与应力路径、应力历史、加载、卸载等状态有关; 在土壤地盘弹塑性行为的数值模拟方面, 工程实际与数值分析的差异主要被归因

于两个方面: ①土性参数不准确; ②本构模型不适合。

以深开挖挡土支撑设计为例, 多数需仰赖数值分析方法模拟开挖、抽水、支撑架设与预力施加、楼板施筑及拆除支撑等施工步骤, 来预测挡土壁体可能产生的变位及地表沉陷, 同时也依据分析结果来配置监测系统或进行建物保护设计; 仅简单地采用模拟弹塑性力学方式的应力-应变关系(例如: 双曲线模型—目

前许多深开挖工程所采用的本构分析模式), 多半不能反应地盘与结构体间的互制行为。故参数和模型的正确给定是土体稳定性分析的两大难题, 它们的合理性将大大增强岩土工程设计的可靠性。

本文的研究工作, 系从广义塑性力学-岩土塑性力学^[1]一书中获得启蒙。基于土壤材料不服从德鲁克稳定公设 (drucker's stability postulate) 的建模难度考虑^[1], 本文在本构关系参数的研究上, 是以 Collins I. F. 等所倡导的土壤材料热力学架构 (thermomechanical framework)^[2-9]为基础, 应用土壤在连续介质 (continuous media) 定义下的热力学状态变量, 建立自由能势函数 (free energy potential function) 和能量耗散率势函数 (dissipation potential function) 表述的功能平衡方程, 据以推导土壤的临界状态弹塑性本构关系 (constitutive relation)。

1 推导弹塑性本构方程的热力学架构

热力学第一定律 (能量守恒定律) 描述自然界中物质系统的能量增加恒等于输入的能量。因此, 若将土壤材料定义为弹塑性变形的连续介质系统, 则依据热力学第一定律, 设系统内能为 E , 动能为 K , 热能为 Q , 功为 W , 它们的增量之间存在下列关系:

$$\dot{E} + \dot{K} = \dot{W} + \dot{Q} \quad (1)$$

静力学假设系统动能增量 $\dot{K} = 0$; 设 σ_{ij} , ε_{ij} 分别为应力张量与应变张量; $\dot{q}_k$ 为单位时间的热流向量, 当外力施加于连续介质系统时, 产生的单位体积输入功增量 (rate of working of the applied stress) 为 $\dot{W} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$; 并由散度定理将穿越单位体积系统边界的热流表示成 $\dot{q}_{k,k}$ 。则式 (1) 可写为

$$\dot{E} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{q}_{k,k} \quad (2)$$

依据近平衡态不可逆热力学普利高津 (Prigogine I) 的公设, 开放系统中的总熵变化 $\dot{S}$ (即由环境输入系统的能量流) 被分裂成属性不同的两部分能量, 一部分为可逆的熵增量 $\dot{S}^e$, 且 $\dot{S}^e = (\dot{q}_k / T)_{,k}$, T 为绝对温度, 吸热时 $\dot{q}_k > 0$, 散热时 $\dot{q}_k < 0$; 另一部分为不可逆的内熵增量 $\dot{S}^i$, 它反映系统内不可逆过程对总熵增量的贡献。故有

$$\dot{S}^i = \dot{S} - \dot{S}^e = \dot{S} - \left(\frac{\dot{q}_k}{T} \right)_{,k} \quad (3)$$

根据热力学第二定律 $\dot{S}^i \geq 0$, 则式 (3) 可写成 Clausius-Duhes 不等式:

$$T\dot{S} \geq T\dot{S}^e \equiv T \left(\frac{\dot{q}_k}{T} \right)_{,k} = \dot{q}_{k,k} + \frac{\dot{q}_k T_{,k}}{T} \quad (4)$$

因此, 由式 (3)、(4) 获知, 反映系统内不可逆过程的能量耗散率函数 $\dot{D}$ (dissipation rate function) 将满

足不等式:

$$\dot{D} \equiv T\dot{S}^i = T(\dot{S} - \dot{S}^e) \geq 0 \quad (5)$$

系统内能 E 为状态函数 (function of state), 对单位体积弹塑性变形的连续介质系统而言, 是总应变 ε_{ij} 及内变量塑性应变 ε_{ij}^p 、熵 S 的函数, 可表示为 $E = E(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, S)$ 。在纯热流条件下 ε_{ij} 与 ε_{ij}^p 皆为常数, 所以 $\dot{E} = (\partial E / \partial S) \dot{S}$, 且从式 (2)、(4) 可导得 $\dot{E} = T\dot{S}$, 因此

$$T = \frac{\partial E}{\partial S} \quad (6)$$

导入 Helmholtz 自由能函数 (free energy) F , 并以 ε_{ij} , ε_{ij}^p 及 T 为其状态变量 (state variables), 则可导得

$$\begin{cases} F \equiv F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, T) = E - TS, \\ \dot{F} = \dot{E} - \dot{T}S - T\dot{S}. \end{cases} \quad (7)$$

考虑等温条件 ($\dot{T} = 0$; $T_{,k} = 0$; $\dot{S}^e = (\dot{q}_k / T)_{,k} = 0$), 并依据式 (3), 由式 (7) 的时间微分式可导得

$$\dot{F} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - T\dot{S} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - T\dot{S}^i \quad (8)$$

由热力学定义, 熵 (entropy) 是热力学过程中系统内不能转化为机械功的那一部分能量的度量; 当材料处在塑性状态时, 熵的增加意味着系统中无法回复的塑性应变增量 ε_{ij}^p 产生宏观不可逆的能量耗散, 因此耗散能增量 $\dot{D}$ 是状态变量 ε_{ij}^p 的函数, 且等价于系统的熵增, 可表示为 $\dot{D} = \dot{D}(\varepsilon_{ij}^p) \equiv T\dot{S}^i$, 代入式 (8) 中成为

$$\dot{W} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{F} + \dot{D}, \quad \dot{D} \geq 0 \quad (9)$$

这个推导的结论证明: 连续介质系统在等温变形条件下, 单位体积的输入功增量 $\dot{W} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$ 等于自由能增量 $\dot{F}$ 与耗散能增量 $\dot{D}$ 之和。应用 Euler 方程, 由式 (9) 可以导得^[9]

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (10)$$

其中

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0 \quad (11a)$$

令 $\sigma_{ij}^D \equiv \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}^p}$, $\hat{\sigma}_{ij}^D \equiv -\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p}$, 则由式 (11a) 获知:

$$(\sigma_{ij}^D - \hat{\sigma}_{ij}^D) \dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0 \quad (11b)$$

$$\text{即} \quad \sigma_{ij}^D - \hat{\sigma}_{ij}^D = 0 \quad (11c)$$

因此由 $\sigma_{ij}^D = \hat{\sigma}_{ij}^D$ (即 $\partial D / \partial \varepsilon_{ij}^p = -(\partial F / \partial \varepsilon_{ij}^p)$) 即可导得耗散能增量函数 $\dot{D}$ 与自由能函数 F 间的关系为

$$\dot{D} = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \sigma_{ij}^D \dot{\varepsilon}_{ij}^p = -\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \hat{\sigma}_{ij}^D \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (12)$$

其中, $\sigma_{ij}^D \equiv \partial D / \partial \varepsilon_{ij}^p$ 是耗散应力 (dissipative stress)。而 $\hat{\sigma}_{ij}^D \equiv -(\partial F / \partial \varepsilon_{ij}^p)$ 则是反映 Helmholtz 自由能函数中系统熵增扣减项的共轭应力, 所以定义为拟耗散应力

(pseudo-dissipative stress)。

临界状态本构模型 (critical state models) 的屈服

自由能在热力学系统中的宏观可逆及状态函数性质, 在本构模型的推导过程中, 保留自由能势函数的塑性项 $F^p(\varepsilon_{ij}^p)$, 再应用自由能势函数可以衡量热力学过程系统可转化对外作功的能量状态函数特性, 在本构模型的参数试验程序中辨识自由能势函数塑性项 $F^p(\varepsilon_{ij}^p)$ 的相关参量值 (注: 硬化参量), 即可在本构模型的验证过程中一并检验其存在性。因此, 依据这样的程序, 可将自由能势函数解耦为弹性项 $F^e(\varepsilon_{ij}^e)$ 与塑性项 $F^p(\varepsilon_{ij}^p)$ 的表达式:

$$F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = F^e(\varepsilon_{ij}^e) + F^p(\varepsilon_{ij}^p), \quad (13)$$

式中, ε_{ij}^e 为弹性应变张量。而联系系统应力的总功增量 $\dot{W}$ 的关系, 亦可被写为弹性功 $\dot{W}^e$ 和塑性功 $\dot{W}^p$ 两个组分的和。其中的参量关系推导如下:

$$\dot{W} = \dot{W}^e + \dot{W}^p, \quad (14)$$

其中

$$W^e = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^e = \dot{F}^e(\varepsilon_{ij}^e) = \frac{\partial F^e(\varepsilon_{ij}^e)}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^e, \quad (15)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F^e(\varepsilon_{ij}^e)}{\partial \varepsilon_{ij}^e}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{W}^p &= \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{F}^p(\varepsilon_{ij}^p) + \dot{D}(\varepsilon_{ij}^p) \\ &= \frac{\partial F^p(\varepsilon_{ij}^p)}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \frac{\partial D(\varepsilon_{ij}^p)}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \end{aligned} \quad (17)$$

在此, 产生了定义为迁移应力(shift stress) σ_{ij}^s 及耗散应力 σ_{ij}^d (dissipative stress) 的两个本构模型参量^[2-7]:

$$\sigma_{ij}^s \equiv \frac{\partial F^p(\varepsilon_{ij}^p)}{\partial \varepsilon_{ij}^p}, \quad \sigma_{ij}^d \equiv \frac{\partial D(\varepsilon_{ij}^p)}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^p}. \quad (18)$$

将式 (18) 定义的 σ_{ij}^s 和 σ_{ij}^d 一起代入式 (17) 中, 则式 (17) 可重新被写为

$$\dot{W}^p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{F}^p + \dot{D} = \sigma_{ij}^s \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \sigma_{ij}^d \dot{\varepsilon}_{ij}^p = (\sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^d) \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (19)$$

再由式 (19) 即可求得等温变形材料的真实应力 σ_{ij} 等于迁移应力 σ_{ij}^s 和耗散应力 σ_{ij}^d 两个参量之和。其关系表示如下:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^d. \quad (20)$$

2 土壤临界状态本构模型的构建

2.1 热力学架构

温变形过程中土体变形是独立状态变量, 相应于 p' 及 q , 可选取总应变 ($\varepsilon_v, \varepsilon_\gamma$) 和塑性应变 ($\varepsilon_v^p, \varepsilon_\gamma^p$) 作为自由能势函数的状态变量, 即 $F \equiv F(\varepsilon_v, \varepsilon_\gamma, \varepsilon_v^p, \varepsilon_\gamma^p)$ 。因此, 式 (10) 自由能势函数的 Euler 方程增量表达式可重写为

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v} \dot{\varepsilon}_v + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\gamma} \dot{\varepsilon}_\gamma + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p} \dot{\varepsilon}_v^p + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\gamma^p} \dot{\varepsilon}_\gamma^p, \quad (22)$$

相应于 p' 及 q , 耗散函数是塑性应变增量 ($\dot{\varepsilon}_v^p, \dot{\varepsilon}_\gamma^p$) 的函数, 即 $D \equiv D(\dot{\varepsilon}_v^p, \dot{\varepsilon}_\gamma^p)$ 。因此, 式 (10) 耗散函数的 Euler 方程增量表达式可重写为

$$\dot{D} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}_v^p} \dot{\varepsilon}_v^p + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}_\gamma^p} \dot{\varepsilon}_\gamma^p. \quad (23)$$

将式 (22)、(23) 代入式 (21) 的基本能量关系中, 可得

$$\begin{aligned} p' \dot{\varepsilon}_v + q \dot{\varepsilon}_\gamma &= \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v} \dot{\varepsilon}_v + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\gamma} \dot{\varepsilon}_\gamma + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p} \dot{\varepsilon}_v^p + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\gamma^p} \dot{\varepsilon}_\gamma^p \right) + \\ &\quad \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}_v^p} \dot{\varepsilon}_v^p + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}_\gamma^p} \dot{\varepsilon}_\gamma^p \right). \end{aligned} \quad (24)$$

引用式 (11a)、(12) 之导出关系, 由式 (24) 的基本能量关系可得:

$$p' = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v}, \quad q = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\gamma}, \quad (25)$$

$$p_d = -\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}_v^p}, \quad q_d = -\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\gamma^p} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}_\gamma^p}, \quad (26)$$

其中, p_d 为相映于 p' 的耗散应力, q_d 为相映于 q 的耗散应力。从式 (26) (p_d, q_d) 相对于 ($\dot{\varepsilon}_v^p, \dot{\varepsilon}_\gamma^p$) 的关系中, 消去 $\dot{\varepsilon}_v^p$ 和 $\dot{\varepsilon}_\gamma^p$, 可以求得耗散应力空间中的屈服函数 $\hat{F}(p_d, q_d) = 0$ 。同时还可以由耗散增量函数 $\dot{D}$ 求得塑性势函数 $Q(p_d, q_d, \dot{\varepsilon}_v^p, \dot{\varepsilon}_\gamma^p)$, 据以建立耗散应力空间的正交流动法则^[9]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}^d}. \quad (27)$$

依据式 (13) 对弹塑性解耦材料 (decoupled materials) 的自由能势函数解耦为^[2-5]

$$F = F^e(\varepsilon_v^e, \varepsilon_\gamma^e) + F^p(\varepsilon_v^p, \varepsilon_\gamma^p), \quad (28)$$

此时, 施加的有效应力功也可分解为弹性部分 $\dot{W}^e$ 和塑性部分 $\dot{W}^p$, 并依据式 (14) 将其相关的参量关系分别表达为

$$\dot{W}^e = \dot{F}^e = \frac{\partial F^e}{\partial \varepsilon_v^e} \dot{\varepsilon}_v^e + \frac{\partial F^e}{\partial \varepsilon_\gamma^e} \dot{\varepsilon}_\gamma^e, \quad (29)$$

$$\dot{W}^p = \dot{F}^p + \dot{D} = \frac{\partial F^p}{\partial \varepsilon_v^p} \dot{\varepsilon}_v^p + \frac{\partial F^p}{\partial \varepsilon_\gamma^p} \dot{\varepsilon}_\gamma^p + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_v^p} \dot{\varepsilon}_v^p + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_\gamma^p} \dot{\varepsilon}_\gamma^p. \quad (30)$$

于是依据式(19)由耗散应力空间迁移至真实应力空间的本构关系可表达为^[2-5]

$$p' = \frac{\partial F^p}{\partial \varepsilon_v^p} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_v^p} = p_s + p_d, \quad p'_s = \frac{\partial F^p}{\partial \varepsilon_v^p}, \quad (31)$$

$$q' = \frac{\partial F^p}{\partial \varepsilon_\gamma^p} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_\gamma^p} = q_s + q_d, \quad q'_s = \frac{\partial F^p}{\partial \varepsilon_\gamma^p}, \quad (32)$$

其中, p_s 是相映于 p' 的迁移应力 (shift stress), q_s 是相映于 q 的迁移应力。

区分塑性功和耗散能, 是采用热力学架构建立土壤材料本构模型的程序中非常重要的概念。依据热力学第二定律 $\dot{D}$ 不得为负, 但 $\dot{F}^p$ 的值则可为正或负, 分别表示能量储存或能量释放。将式(26)代入式(23)中, 得到耗散能函数增量 $\dot{D} = p_d \dot{\varepsilon}_v^p + q_d \dot{\varepsilon}_\gamma^p$, 而塑性功增量 $\dot{W}^p = p' \dot{\varepsilon}_v^p + q' \dot{\varepsilon}_\gamma^p$, 两者的差值是迁移功增量 $\dot{W}^s \equiv \dot{F}^p = \dot{W}^p - \dot{D} = p'_s \dot{\varepsilon}_v^p + q'_s \dot{\varepsilon}_\gamma^p$ 。

2.2 屈服函数及流动法则

Roscoe & Burland^[10]提出式(33)的耗散能函数以推导修正剑桥模型(modified Cam-clay model)的塑性势函数及屈服函数, 并将原始剑桥模型修改为式(34)的型态。

$$p' \dot{\varepsilon}_v^p + q' \dot{\varepsilon}_\gamma^p = p' \sqrt{\dot{\varepsilon}_v^{p2} + (M \dot{\varepsilon}_\gamma^p)^2} = \dot{D}, \quad (33)$$

$$q^2 - M^2 p' (p_c - p) = 0. \quad (34)$$

Muhunthan 及 Masad 等在推导异向性材料(anisotropic materials)的屈服条件及流动法则时, 将耦合异向性剪胀效应的塑性体应变导入耗散能增量函数中^[11], 于是式(33)拓展为

$$\dot{D} = p' \sqrt{(\dot{\varepsilon}_v^p + \tan \theta_n \dot{\varepsilon}_\gamma^p)^2 + (M \dot{\varepsilon}_\gamma^p)^2}. \quad (35)$$

Collins I F 等建议^[5]异向性材料的耗散能增量函数应进一步反映 p' , q 和固结应力 p'_c 的影响, 而表述为

$$\dot{D} = \sqrt{A^2 (\dot{\varepsilon}_v^p + \tan \theta_n \dot{\varepsilon}_\gamma^p)^2 + (B \dot{\varepsilon}_\gamma^p)^2}, \quad (36a)$$

其中, A 和 B 是具有应力量纲的函数, 反映 p' , q 和固结应力 p'_c 对屈服条件及流动法则的影响, 并假设为 p' , q 和 p'_c 的一阶齐次函数, 即: $A = a_1 p' + a_2 q + a_3 p'_c$, $B = b_1 p' + b_2 q + b_3 p'_c$ 。其中 a_1 , a_2 , a_3 , b_1 , b_2 , b_3 是模型参数; θ_n 表示当前偏压固结线的倾角; $A(\dot{\varepsilon}_v^p + \tan \theta_n \dot{\varepsilon}_\gamma^p)$ 项是耦合异向性剪胀效应的塑性体应变所引起的耗散; $B \dot{\varepsilon}_\gamma^p$ 项是塑性剪切应变引起的耗散。而对于等向性土壤材料而言, $\theta_n = 0$ 和

$\tan \theta_n = 0$, 式(36a)可写为

$$\dot{D} = \sqrt{(A \dot{\varepsilon}_v^p)^2 + (B \dot{\varepsilon}_\gamma^p)^2}. \quad (36b)$$

其间的差异仅在于耦合剪胀效应的体应变增量 $\tan \theta_n \dot{\varepsilon}_\gamma^p$ 项。因此, 本文将以异向性模型的构建为主体, 再代入 $\tan \theta_n = 0$ 条件, 形成 $\theta_n = 0$ 的等向性模型。其建模方式分二阶段进行, 首先推导符合关联流动法则的耗散能函数, 据以建立耗散应力空间的屈服函数和流动法则, 其次迭加迁移应力以转换耗散应力空间的屈服函数和流动法则到真实应力空间, 并映绘出反应 A, B 函数量值变化的屈服轨迹(参考图1, 2所示)。

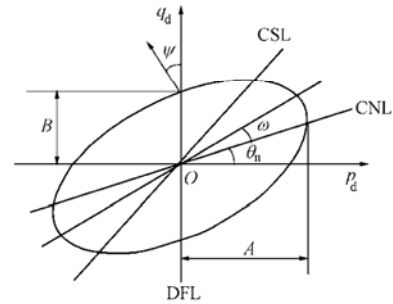


图1 耗散应力空间的屈服轨迹和特征线

Fig. 1 Yield locus and characteristic line in dissipative stress space

依据式(26)之耗散应力定义, 微分式(36a)可求得耗散应力 p'_d 和 q'_d 如下:

$$p'_d = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_v^p} = \frac{A^2 (\dot{\varepsilon}_v^p + \tan \theta_n \dot{\varepsilon}_\gamma^p)}{\dot{D}}, \quad (37)$$

$$q'_d = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_\gamma^p} = \frac{A^2 (\dot{\varepsilon}_v^p + \tan \theta_n \dot{\varepsilon}_\gamma^p) \tan \theta_n + B^2 \dot{\varepsilon}_\gamma^p}{\dot{D}}, \quad (38)$$

$$q_d - p_d \tan \theta_n = \frac{B^2 \dot{\varepsilon}_\gamma^p}{\dot{D}}. \quad (39)$$

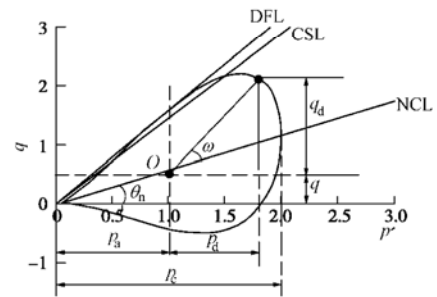


图2 真实应力空间的屈服轨迹和特征线

Fig. 2 Yield locus and characteristic line in true stress space

从式(37)~(39)中消去塑性应变增量, 可得耗散应力空间的屈服函数和流动法则如下:

$$\frac{p_d^2}{A^2} + \frac{(q_d - p_d \tan \theta_n)^2}{B^2} = 1, \quad (40a)$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{D} \left\{ \frac{p_d}{A^2} + \frac{(q_d - p_d \tan \theta_n) \tan \theta_n}{B^2} \right\}, \quad (41a)$$

$$\dot{\varepsilon}_\gamma^p = \dot{D} \frac{(q_d - p_d \tan \theta_n)}{B^2}, \quad (42a)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_\gamma^p}{\dot{\varepsilon}_\gamma^p} = \frac{B^2 p_d}{A^2 (q_d - p_d \tan \theta_n)} - \tan \theta_n. \quad (43a)$$

对于等向性材料 (isotropic materials), 当 $\theta_n = 0$ 和 $\tan \theta_n = 0$ 代入式 (40a) ~ (43a) 中, 即为等向性材料在耗散应力空间的屈服函数和流动法则:

$$\frac{p_d^2}{A^2} + \frac{q_d^2}{B^2} = 1, \quad (40b)$$

$$\dot{\varepsilon}_\gamma^p = \dot{D} \frac{p_d}{A^2}, \quad (41b)$$

$$\dot{\varepsilon}_\gamma^p = \dot{D} \frac{q_d}{B^2}, \quad (42b)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_\gamma^p}{\dot{\varepsilon}_\gamma^p} = \frac{B^2 p_d}{A^2 q_d}. \quad (43b)$$

这种存在于耗散应力空间的屈服轨迹是一个倾斜的椭圆, 其屈服轨迹和特征线如图 1 所示。在固结线 NCL 上, $\dot{\varepsilon}_\gamma^p = 0$, 且这个位置上屈服轨迹的切线平行于 q_d 轴, 将其代入式 (36) ~ (39) 中即可求得

$$\left. \begin{aligned} p_d &= \pm A, \\ q_d &= \pm A \tan \theta_n, \\ p_d / q_d &= \tan \theta_n. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

这项结果说明耗散应力空间中 NCL 的坡角 θ_n 亦是耗散应力 (p_d, q_d) 的向量角。依据式 (31)、(32), 真实应力等于迁移应力与耗散应力之和, 即:

$p' = p_s + p_d$; $q' = q_s + q_d$ 。如果真实应力是处于屈服状态, 那么耗散应力空间的屈服轨迹系沿着 NCL 线迁移到真实应力空间, 故亦可确定迁移应力 p'_s 和 q'_s 之间满足 $q'_s = p'_s \tan \theta_n$ 的关系。在临界状态线 CSL 上, $\dot{\varepsilon}_\gamma^p = 0$, 且这个位置上屈服轨迹的切线平行于 p_d 轴。

为了建立耗散应力空间迁移到真实应力空间的屈服轨迹, 必须藉由 NCL 线及屈服轨迹特性以推导迁移应力。因此, 导入前述 COLLINS I F 等建议的函数 $A = a_1 p' + a_2 q' + a_3 p'_c$ 及 $B = b_1 p' + b_2 q' + b_3 p'_c$, 并令 $a_2 = 0$ 及 $b_2 = 0$, 以避免干扰本文未来在数值分析上将配合 ABAQUS 有限元程序采用形状函数 $g(\theta_\sigma)$ 修正 π 平面上屈服轨迹随应力洛德角 θ_σ 变化规律的建模考虑。故 NCL 线两端屈服轨迹的 p' 值为

$$p' = p_s \pm A = p_s \pm a_1 p' + a_3 p'_c, \quad (45)$$

式中, 正号相映于 NCL 线 $p' = p'_c$ 位置, 负号相映于 NCL 线 $p' = 0$ 位置, 即

$$\left. \begin{aligned} p'_c &= p_s + (a_1 p'_c + a_3 p'_c), \\ 0 &= p'_s + (a_3 p'_c), \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

所以 $p_s = a_3 p'_c$, $a_1 + 2a_3 = 1$, 因此可以导入一个参量 α , 令 $a_3 = \alpha / 2$, $a_1 = 1 - \alpha$, 代入到式 (44)、(46)

中求得

$$p_s = \frac{\alpha}{2} p'_c, \quad q_s = p_s \tan \theta_n = \frac{\alpha}{2} p'_c \tan \theta_n, \quad (47)$$

$$A = (1 - \alpha) p' + \frac{\alpha}{2} p'_c. \quad (48)$$

故可将耗散应力 p_d, q_d 表示为

$$\left. \begin{aligned} p_d &= p' - p_s = p' - \frac{\alpha}{2} p'_c, \\ q_d &= q' - q_s = q' - \frac{\alpha}{2} p'_c \tan \theta_n, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

将其代入式 (40) 和式 (43) 中, 可求得异向性材料真实应力空间的屈服轨迹和流动法则分别为

$$\frac{\left(p' - \frac{\alpha}{2} p'_c\right)^2}{A^2} + \frac{(q' - p' \tan \theta_n)^2}{B^2} = 1, \quad (50)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_\gamma^p}{\dot{\varepsilon}_\gamma^p} = \frac{B^2 \left(p' - \frac{\alpha}{2} p'_c\right)}{A^2 (q' - p' \tan \theta_n)} - \tan \theta_n. \quad (51)$$

参考图 1, 函数 B 参量 b_1, b_3 的推导必须藉助于排水破坏线 DFL (drained failure line) 的特性。依据临界状态理论, 土体的破坏状态是指土体不再硬化, 此时应满足 $\dot{\varepsilon}_\gamma^p + \tan \theta_n \dot{\varepsilon}_\gamma^p = 0$ 的条件, 将其代入耗散应力的推导式 (37)、(38) 中, 即可求得耗散应力空间屈服轨迹与 DFL 线的交点 ($p_d^{\text{DFL}} = 0, q_d^{\text{DFL}} = \pm B$), 而 DFL 线即与耗散应力空间的 q_d 轴重合 (如图 1 所示)。

因此由耗散应力空间 DFL 线与屈服轨迹交点坐标 $(0, \pm B)$ 及式 (37) 的条件, 代入式 (31)、(32), 可求得真实应力空间 DFL 线与屈服轨迹的交点坐标为

$$\left. \begin{aligned} p'_{\text{DFL}} &= p_s + p_d^{\text{DFL}} = \frac{\alpha}{2} p'_c, \\ q'_{\text{DFL}} &= q_s + q_d^{\text{DFL}} = \frac{\alpha}{2} p'_c \tan \theta_n \pm B \\ &= \frac{\alpha}{2} p'_c \tan \theta_n \pm (b_1 p' + b_3 p'_c), \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

其中, 正负号分别代表土体的压缩及拉伸破坏, 可用 M_c 和 M_e 分别表示屈服面上压缩及拉伸破坏线斜率的绝对值, 由于本文未来在数值分析时将采用形状函数 $g(\theta_\sigma)$ 修正 π 平面上屈服轨迹随应力洛德角 θ_σ 变化的规律, 因此本阶段暂时假设 $M = M_c = M_e$, 并令 $b_1 = (1 - \hat{\alpha})M$, $b_3 = (\alpha \hat{\alpha} / 2)M$, 代回 B 函数求得

$$B = M \left[(1 - \hat{\alpha}) p' + \frac{\alpha \hat{\alpha}}{2} p'_c \right]. \quad (53)$$

再将式 (48)、(53) 的 A, B 函数参量代入式 (50)、(51) 中, 即可求得异向性材料在真实应力空间以参量表示的屈服轨迹 (参考图 2) 和流动法则:

$$\frac{\left(p' - \frac{\alpha}{2} p'_c\right)^2}{\left((1-\alpha)p' + \frac{\alpha}{2} p'_c\right)^2} + \frac{(q - p' \tan \theta_n)^2}{M^2 \left((1-\hat{\alpha})p' + \frac{\alpha \hat{\alpha}}{2} p'_c\right)^2} = 1, \quad (54a)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_\gamma^p} = \frac{M^2 \left((1-\hat{\alpha})p' + \frac{\alpha \hat{\alpha}}{2} p'_c\right)^2 \left(p' - \frac{\alpha}{2} p'_c\right)}{\left((1-\alpha)p' + \frac{\alpha}{2} p'_c\right)^2 (q - p' \tan \theta_n)} - \tan \theta_n, \quad (55a)$$

再将 $\tan \theta_n = 0$ 条件代入式 (54a)、(55a) 中, 亦可求得等向性材料在真实应力空间以参量表示的屈服轨迹和流动法则分别为

$$\frac{\left(p' - \frac{\alpha}{2} p'_c\right)^2}{\left((1-\alpha)p' + \frac{\alpha}{2} p'_c\right)^2} + \frac{q^2}{M^2 \left((1-\hat{\alpha})p' + \frac{\alpha \hat{\alpha}}{2} p'_c\right)^2} = 1, \quad (54b)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_\gamma^p} = \frac{M^2 \left((1-\hat{\alpha})p' + \frac{\alpha \hat{\alpha}}{2} p'_c\right)^2 \left(p' - \frac{\alpha}{2} p'_c\right)}{\left((1-\alpha)p' + \frac{\alpha}{2} p'_c\right)^2 q}. \quad (55b)$$

2.3 硬化规律

传统临界状态理论 (critical state theory) 的体积加载面是硬化参量 $H(\varepsilon_v^p) = p'_c$ 的等值面, 采用体积硬化规律 (volume hardening law) 以描述加载过程中屈服面扩大和缩小的规律。其中 p'_c 代表现态固结应力 (current consolidation pressure), 是塑性体应变 ε_v^p 的函数。对于等向性材料, 在 $(\ln p', \varepsilon_v^p)$ 空间建立的硬化规律 (hardening law) 可表示如下^[1]:

$$\ln p'_c = \frac{\varepsilon_v^p}{(\lambda - \kappa)}, \quad \dot{p}'_c = p'_c \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{(\lambda - \kappa)}, \quad (56)$$

其中, λ, κ 分别为正常固结线斜率及回胀曲线斜率, $\dot{p}'_c$ 为固结应力增量, 且为了反应体积硬化, 本文中将 $\dot{p}'_c$ 定义为硬化模数 (hardening modulus)。而亦可在体积加载面取一参考应力 p'_R , 将硬化定律表示如下:

$$\varepsilon_v^p = (\lambda - \kappa) \ln \left(\frac{p'_c}{p'_R} \right), \quad p'_c = p'_R \exp \left(\frac{\varepsilon_v^p}{(\lambda - \kappa)} \right), \quad (57)$$

$$\dot{p}'_c = p'_c \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{(\lambda - \kappa)} = p'_R \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{(\lambda - \kappa)} \exp \left(\frac{\varepsilon_v^p}{(\lambda - \kappa)} \right), \quad (58)$$

当参考应力 p'_R 随着体积硬化模式的加载或卸载条件变动时, 即可应用式 (58) 分析是否进入后继屈服面 (由硬化模数 $\dot{p}'_c$ 值分析), 并应用式 (57) 决定 p'_R 相映的 p'_c 所代表的屈服面即为后继屈服面。

参考图 1, 由耗散应力空间的特征线分布, 获知排水破坏线 DFL (drained failure line) 上耗散应力

$p_d = 0$, 故屈服轨迹在 DFL 在线的体应力 p'_{DEL} 亦等于迁移体应力 p_s , 可选取一个比率参量 r 称为间距比 (spacing ratio)^[2-5], 并参考式 (47) 将其定义如下:

$$r = \frac{p'_c}{p'_{DEL}} = \frac{p'_c}{p_s} = \frac{2}{\alpha}, \quad (59)$$

再由式 (57)、(59) 可求得迁移应力 p_s 为

$$p_s = \frac{1}{r} p'_c = \frac{1}{r} p'_R \exp \left(\frac{\varepsilon_v^p}{(\lambda - \kappa)} \right), \quad (60)$$

因此, 可求得等向性材料的塑性部份自由能函数 F^p 为

$$F^p(\varepsilon_v^p, \varepsilon_\gamma^p) = F^p(\varepsilon_v^p, 0) = (\lambda - \kappa) p_s = \frac{(\lambda - \kappa)}{r} p'_c = \frac{(\lambda - \kappa)}{r} p'_R \exp \left(\frac{\varepsilon_v^p}{(\lambda - \kappa)} \right). \quad (61)$$

为了进一步推导异向性材料的硬化定律, 经由式 (31)、(32)、(47) 迁移应力的定义及相互关系求得

$$q_s = \frac{\partial F^p}{\partial \varepsilon_\gamma^p} = p_s \tan \theta_n = \tan \theta_n \frac{\partial F^p}{\partial \varepsilon_v^p}, \quad (62)$$

而各 p'_c 屈服条件相应的塑性部份自由能函数增量 $\dot{F}^p$ 可表示如下:

$$\begin{aligned} \dot{F}^p &= \frac{\partial F^p}{\partial \varepsilon_v^p} \dot{\varepsilon}_v^p + \frac{\partial F^p}{\partial \varepsilon_\gamma^p} \dot{\varepsilon}_\gamma^p \\ &= \frac{\partial F^p}{\partial \varepsilon_v^p} \dot{\varepsilon}_v^p + \tan \theta_n \frac{\partial F^p}{\partial \varepsilon_v^p} \dot{\varepsilon}_\gamma^p = p_s (\dot{\varepsilon}_v^p + \tan \theta_n \dot{\varepsilon}_\gamma^p). \end{aligned} \quad (63)$$

由式 (36a) 定义, 获知 $(\dot{\varepsilon}_v^p + \tan \theta_n \dot{\varepsilon}_\gamma^p)$ 是耦合异向性剪胀的塑性体应变增量, 而各 p'_c 所代表的屈服面内无塑性体应变, 即增量值为零,

$$\dot{\varepsilon}_v^p + \tan \theta_n \dot{\varepsilon}_\gamma^p = 0. \quad (64)$$

将式 (64) 条件代回式 (63) 中, 可求得同一屈服面内 $\dot{F}^p = 0$, 即沿着同一屈服轨迹的应力路径, 其塑性部份自由能函数 $F^p(\varepsilon_v^p, \varepsilon_\gamma^p) = \text{常数}$ 。同时式 (64) 亦可求得同一屈服轨迹的塑性体应变等于固定值, 即

$$\varepsilon_v^p + \tan \theta_n \varepsilon_\gamma^p = \text{常数}. \quad (65)$$

将 $(\varepsilon_v^p + \tan \theta_n \varepsilon_\gamma^p)$ 代入式 (61) 中, 即可求得异向性材料的塑性部份自由能函数 $F^p(\varepsilon_v^p, \varepsilon_\gamma^p)$ 如下:

$$\begin{aligned} F^p(\varepsilon_v^p, \varepsilon_\gamma^p) &= \frac{(\lambda - \kappa)}{r} p'_c \\ &= \frac{(\lambda - \kappa)}{r} p'_R \exp \left(\frac{\varepsilon_v^p + \tan \theta_n \varepsilon_\gamma^p}{(\lambda - \kappa)} \right), \end{aligned} \quad (66)$$

再引用式 (58), 将 $(\varepsilon_v^p + \tan \theta_n \varepsilon_\gamma^p)$ 代入, 即可求得 $(\varepsilon_v^p, \ln p')$ 空间现态固结应力 p'_c 的表示式如下:

$$p'_c = p'_R \exp \left(\frac{\varepsilon_v^p + \tan \theta_n \varepsilon_\gamma^p}{(\lambda - \kappa)} \right). \quad (67)$$

同理, 引用式 (58), 代入 $(\dot{\varepsilon}_v^p + \tan \theta_n \dot{\varepsilon}_\gamma^p)$ 、 $(\varepsilon_v^p + \tan \theta_n \varepsilon_\gamma^p)$, 即可求得 $(\varepsilon_v^p, \ln p')$ 空间硬化模数 $\dot{p}'_c$ 的表示式如下:

$$\begin{aligned}\dot{p}'_c &= p'_c \frac{\dot{\varepsilon}_v^p + \tan \theta_n \dot{\varepsilon}_\gamma^p}{(\lambda - \kappa)} \\ &= p'_R \frac{\dot{\varepsilon}_v^p + \tan \theta_n \dot{\varepsilon}_\gamma^p}{(\lambda - \kappa)} \exp \left(\frac{\varepsilon_v^p + \tan \theta_n \varepsilon_\gamma^p}{(\lambda - \kappa)} \right).\end{aligned}\quad (68)$$

因此, 采用式 (67) 或 (68) 作为异向性土壤材料的硬化规律, 皆等效于等向性材料的硬化规律, 因为其分析后继屈服面所采用的体积硬化规律是等价的。进一步的说明见图 3, 实线为 θ_n 固定之硬化模式, 虚线为旋转硬化模式, 且各特征线 $F^p(\varepsilon_v^p, \varepsilon_\gamma^p) = \text{常数}$ 。当非等向固结条件在 $(\varepsilon_v^p, \varepsilon_\gamma^p)$ 平面产生 B 点应变时, 即可依辨识寻得同一特征线上的 A 点, 并依同一特征线 (同一屈服轨迹) $F^p(\varepsilon_v^p, \varepsilon_\gamma^p) = \text{常数}$ 的条件, 求得所代表的后继屈服面, 而 A 点 $\varepsilon_\gamma^p = 0$, 即为等压固结条件产生的应变。故依据式 (67) 或 (68) 即可描绘出任意应力状态沿应力路径由一屈服面进入另一后继屈服面的规则, 此即为异向性土壤材料的硬化规律 (见图 4)。

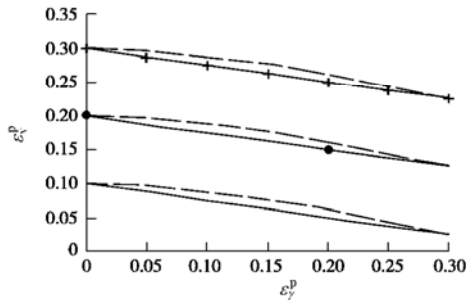


图 3 $(\varepsilon_v^p, \varepsilon_\gamma^p)$ 空间的特征线

Fig. 3 Characteristic curves in $(\varepsilon_v^p, \varepsilon_\gamma^p)$ space

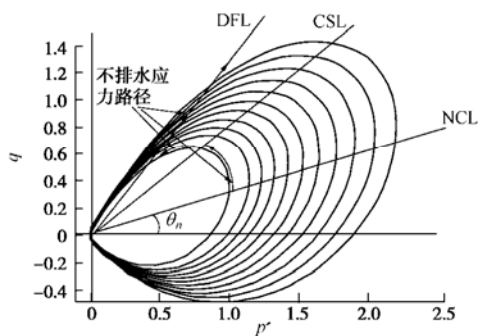


图 4 真实应力空间的不排水应力路径 (固定 $\theta_n = 20^\circ$)

Fig. 4 Undrained stress path in true stress space (at fixed $\theta_n = 20^\circ$)

目前为止, 本节所推导的硬化规律都是假设应力主轴不发生偏转的硬化模式。当土壤材料在加载过程中应力发生偏转的状态显着时, 可依据 COLLINS I F 等建议的旋转硬化规律 (rotational hardening laws)^[5], 假设屈服面的旋转规律 (即 θ_n 的旋转规律) 相依赖于塑性剪应变, 采用 Zienkiewicz 所提出的指数衰减形式^[12]建立 θ_n 的旋转规律:

$$\tan \theta_n = \tan \theta_f [1 - \exp(-\beta \varepsilon_\gamma^p)] \quad (\theta_n \in (0^\circ, 90^\circ)), \quad (69)$$

其中, θ_f 是 θ_n 旋转的最终边界值, 可限定屈服面旋转的范围。选取一个特定函数 $f(\varepsilon_\gamma^p)$, 令此函数表示应力主轴旋转时剪应变 ε_γ^p 产生的体应变, 即

$$\begin{aligned}f(\varepsilon_\gamma^p) &= \varepsilon_\gamma^p \tan \theta_n \\ &= \tan \theta_f [\varepsilon_\gamma^p - \varepsilon_\gamma^p \exp(-\beta \varepsilon_\gamma^p)],\end{aligned}\quad (70)$$

再将 $f(\varepsilon_\gamma^p)$ 代入式 (63) 中, 求得

$$\begin{aligned}F^p(\varepsilon_v^p, \varepsilon_\gamma^p) &= \frac{(\lambda - \kappa)}{r} p'_c \\ &= \frac{(\lambda - \kappa)}{r} p'_R \exp \left(\frac{\varepsilon_v^p + f(\varepsilon_\gamma^p)}{(\lambda - \kappa)} \right),\end{aligned}\quad (71)$$

再代入式 (67)、(68) 即可求得旋转硬化规律的 p'_c 及 $\dot{p}'_c$ 表达式为

$$\begin{aligned}p'_c &= p'_R \exp \left(\frac{\varepsilon_v^p + f(\varepsilon_\gamma^p)}{(\lambda - \kappa)} \right) \text{ 或} \\ \varepsilon_v^p + f(\varepsilon_\gamma^p) &= (\lambda - \kappa) \ln \left(\frac{p'_c}{p'_R} \right),\end{aligned}\quad (72)$$

$$\dot{p}'_c = p'_c \frac{\dot{\varepsilon}_v^p + f'(\varepsilon_\gamma^p)}{(\lambda - \kappa)} = p'_c \frac{\dot{\varepsilon}_v^p + \tan \theta_n \dot{\varepsilon}_\gamma^p}{(\lambda - \kappa)}, \quad (73)$$

此即为 COLLINS I F 等所建议的旋转硬化规律 (参考图 5 所示)。

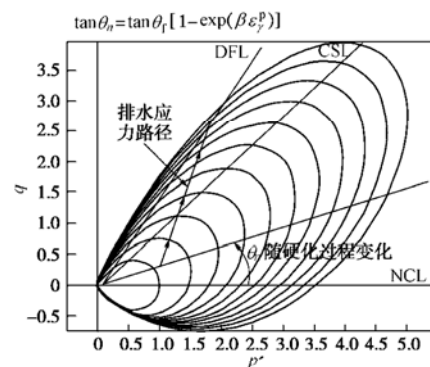


图 5 真实应力空间的排水应力路径 (旋转硬化模式)

Fig. 5 Drained stress path in true stress space (for rotational hardening model)

3 模型参数的探讨

3.1 破坏线的辨识

土壤为多相材料, 在固结阶段或三轴排水受压状态下, 土壤颗粒间孔隙水或气体的排出就会产生塑性体应变, 出现屈服。因此, 土壤的本构模型除了考虑剪切屈服条件 (剪应变硬化模式) 外, 同时考虑体应变屈服条件 (体应变硬化模式)。

对于剪应变硬化模式, 其屈服轨迹是塑性体应变增量 $\dot{\varepsilon}_v^p = 0$ 的线, 称为临界状态线 (CSL, critical state line), 亦称为零剪胀线 (zero dilatancy line)^[13]。Burland

由于土壤的塑性应变增量方向与应力增量方向有关, 塑性应力增量方向的转折会引起应变增量方向的改变。也就是说塑性变形系相依赖于应力路径。因此, A , B 函数的量值变化不仅影响屈服轨迹, 亦会反应在流动法则的应变增量函数关系上。本文在临界状态本构模型的建立上导入 A , B 函数, 其目的即在于能更精确地反应土壤的屈服条件及流动特性。在实务上可应用式 (84) ~ (86), 经迭代方式反算以求得拟合于实验试体应力路径的 A , B 函数参量。惟 A , B 函数的参量选取是模型应用的关键, 在函数参量的热力学能量诠释和影响所及的屈服轨迹形状、流动特性上仍需讨论。

(1) A 函数参量 α

参考图 6~8, A 函数参量 α 的取值影响屈服轨迹在 p' 轴方向的形状变化, 为了方便讨论, 采用式 (59) 将相关的推导式重新整理如下:

$$\dot{\epsilon}^p = p_s \epsilon_v^p + q_s \epsilon_y^p = \frac{p'_c}{r} (\epsilon_v^p + \tan \theta_n \epsilon_y^p), \quad (87)$$

$$A = (1 - \alpha)p' + \frac{\alpha}{2} p'_c = (1 - \frac{2}{r})p' + \frac{1}{r} p'_c, \quad (88)$$

$$B = (1 - \hat{\alpha})Mp' + \frac{\alpha\hat{\alpha}}{2} Mp'_c = (1 - \hat{\alpha})Mp' + \frac{\hat{\alpha}}{r} p'_c. \quad (89)$$

由式 (59) 知 α 参量与间距比 r 间具有相依关系 ($r = 2/\alpha$)。对真实应力空间中的屈服轨迹而言, r 表示屈服面与偏压固结线 NCL 及排水破坏线 DFL 交界的体积压力之比 ($r = p'_c / p'_{DEL}$), 参考图 2 所示即可发现 r 代表塑性功 ($p'_c \epsilon_v^p$) 与塑性储存能 ($p_s \epsilon_v^p$) 项间的比值, 具有区别能量关系的几何意义, 其取值范围为 $r \in (1, \infty)$, 转换为 α 参量取值, 即 $\alpha \in (0, 2)$ 。

参考图 6 所示, 当 $r=2$ (或 $\alpha=1$) 时 $p'_c / p_s = 2$, 本文所建构的模型即可模拟修正剑桥模型。但是当 r 值增大 $r > 2$ 时, p'_c 相对于 p_s 或 p'_{DEL} 的比值亦变大, 屈服面沿 NCL 线向右伸展 (如图 7 所示)。这种情况可能发生在疏松砂土的不排水试验中, 其 p'_c 值相对于不排水应力路径上的 p'_{DEL} 值很大。透过间距比 r 的诠释获知大部份的塑性功转换为摩擦的耗散能。

相反, 当 r 值减小 ($r < 2$) 时, p'_c 相对于 p_s 或 p'_{DEL} 的比值亦变小, 屈服面沿 NCL 线向左压缩 (图 8), 其耗散能相对于塑性储存能的比例也相对变小。这种情况可能发生在超固结黏土或紧密砂土的不排水试验中, 观察其不排水应力路径即可获知: 间距比 r 与超固结比 (OCR) 间为负相关, OCR 参量值的增加可反映于 r 参量值的减小; 换言之, 即前期固结效应导致现态固结应力 p'_c 所产生的耗散能减少。依据笔者在一些超固结黏土的实验研究发现: 在迭代反算超固结黏土 A , B 函数参量时, 采用下列回归式选取间距比 r 的参量值, 可以快速地拟合于实验试体的应力路径。

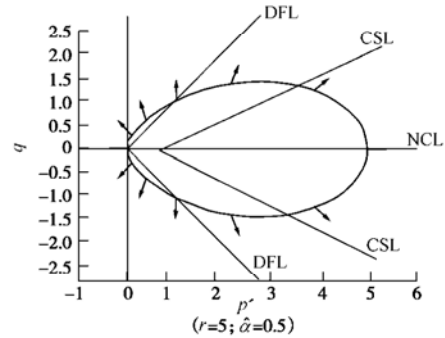


图 7 真实应力空间的屈服轨迹和塑性应变增量向量

Fig. 7 Yield loci and plastic strain vectors in true stress space

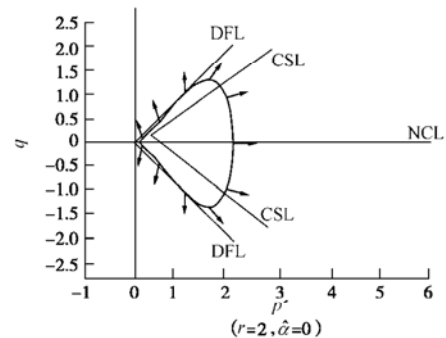


图 8 真实应力空间的屈服轨迹和塑性应变增量向量

Fig. 8 Yield loci and plastic strain vectors in true stress space

$$r = 2.3 - \sqrt{\text{OCR}/10} \quad (r \in (1, 2)). \quad (90)$$

(2) B 函数参量 $\hat{\alpha}$

由 3.1 节的讨论知: DFL 在线 $\dot{p}'_c = 0$, 且体应变增量 $\dot{\epsilon}_v^p + \tan \theta_n \dot{\epsilon}_y^p = 0$ 。再参考式 (68) 可进一步获知: $\dot{p}'_c$ 是正或负, 即产生体胀或体缩, 完全决定于现态应力点 (p', q) 位于 DFL 线上或下。因此, 为了避免类似修正剑桥模型采用椭圆屈服面在应力路径穿越 CSL 线时产生过量剪胀的缺点 (参考图 6 所示), 在迭代反算 B 函数参量前, 必须检讨 $\hat{\alpha}$ 参量的取值策略。

满足式 (86) 的限制条件, $\hat{\alpha}$ 参量的取值范围为 $\hat{\alpha} \in [0, 2/(2 - \alpha)]$ 。但是为了避免应力路径穿越 DFL 线时产生不符土壤性质的超量剪胀, $\hat{\alpha}$ 参量不宜过大, 例外的是当 $\hat{\alpha}$ 参量很小时, 屈服轨迹亦有可能落于 DFL 之下而违反土壤的自然性质 (参考图 7, 8 所示)。

由式 (85) 知真实应力空间中屈服轨迹的 q 坐标值与 α , $\hat{\alpha}$ 参量皆有关联, 笔者从多数 B 函数参量的迭代反算过程中发现: 采用 $\hat{\alpha} \in [0.5/(2 - \alpha), 1/(2 - \alpha)]$ 的取值范围代入迭代反算过程, 可以快速地拟合于实验试体的应力路径。

4 算 例

将推导的屈服函数 (微分以求得一致性条件)、流动法则、硬化规律整理成一个包含 6×7 阶参数矩阵 C 与 6×1 阶增量变数矩阵 $\dot{x}$ 的控制方程 $C\dot{x} = 0$:

$$C = \begin{bmatrix} 1 - a_1 \cos \omega & 0 & -(\frac{1}{2}\alpha + a_3 \cos \omega) & A \sin \omega & 0 & 0 & 0 \\ b_1 \sin \omega + \tan \theta_n & -1 & b_3 \sin \omega & B \cos \omega & p' \sec \theta_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A \sin \omega & (B \cos \omega - A \sin \omega \tan \theta_n) \\ 0 & 0 & \lambda - \kappa & 0 & 0 & -p'_c & -p'_c \tan \theta_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sec^2 \theta_n & 0 & -f'(\dot{\epsilon}_\gamma^p) \\ \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & -p' & 0 \end{bmatrix}, \quad (91)$$

$$\dot{x} = [\dot{p}', \dot{\alpha}, \dot{p}'_c, \dot{\omega}, \dot{\theta}_n, \dot{\epsilon}_\gamma^p, \dot{\epsilon}_v^p]^T. \quad (92)$$

并代入给定的不排水（体应变为零）或排水应力路径条件，求解 $C\dot{x} = 0$ ，即可计算求得三轴试验的剪应力与剪应变关系及体应变（或孔隙水压）与剪应变关系（注：视 $\dot{\epsilon}_\gamma^p$ 为相依变数，并将 $\dot{\epsilon}_\gamma^p$ 与矩阵 C 最后一行相乘后移往方程式右侧，即可求解 6 个联立方程的相关增量变数）。以下即以一个试验资料给定： $\kappa = 0.004$ ， $\lambda = 0.04$ ， $M = 1.07$ ， $M_c = 1.07$ （压力侧 DFL 线斜率）， $M_c = 0.79$ （拉力侧 DFL 线斜率）， $r = 3$ ， $\theta_f = 20^\circ$ ， $\beta = 16$ 的排水三轴试验结果为算例，经计算后绘制。

（1）剪应力 q 与剪应变 ϵ_γ 关系（包括：等向性分析模式与异向性分析模式计算结果与试验数据的对比，如图 9~11 所示）。

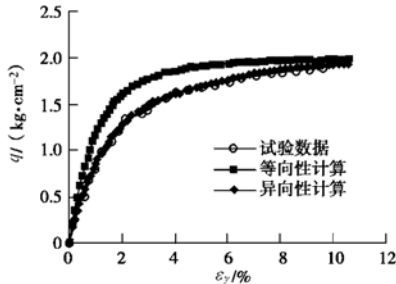


图 9 围压 1.0 kg/cm² 之剪应力与剪应变关系

Fig. 9 Variation of shear stress with shear strain for drained test under 1.0 kg/cm² confining pressure

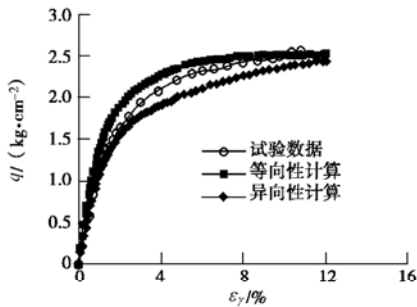


图 10 围压 1.5 kg/cm² 之剪应力与剪应变关系

Fig. 10 Variation of shear stress with shear strain for drained test under 1.5 kg/cm² confining pressure

（2）体应变与剪应变关系（包括：等向性分析模式与异向性分析模式计算结果与试验数据的对比，如图 12~14 所示）。

（3）初始屈服面模型（如图 15，16 所示）。

（4）采用旋转硬化定律的排水应力路径模型（如

图 17 所示）。

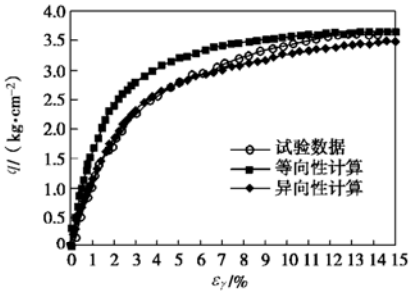


图 11 围压 2.5 kg/cm² 之剪应力与剪应变关系

Fig. 11 Variation of shear stress with shear strain for drained test under 2.5 kg/cm² confining pressure

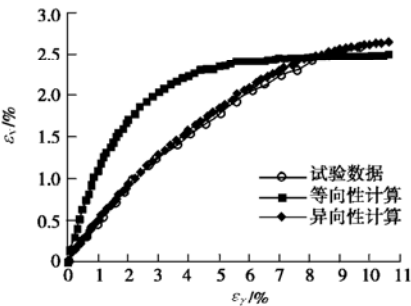


图 12 围压 1.0 kg/cm² 之体应变与剪应变关系

Fig. 12 Variation of shear stress with shear strain for drained test under 1.0 kg/cm² confining pressure

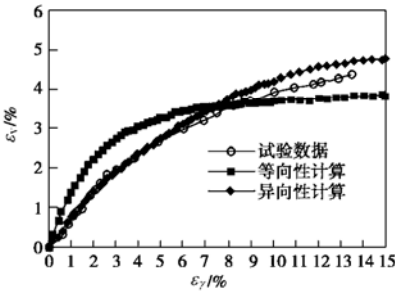


图 13 围压 1.5 kg/cm² 之体应变与剪应变关系

Fig. 13 Variation of volumetric strain with shear strain for drained test under 1.5 kg/cm² confining pressure

（5）采用等向性分析模式的排水应力路径模型（如图 18 所示）。

经比对计算结果，显示异向性 $\theta_n = 20^\circ$ 模型在低的剪应变状态时剪应力与剪应变关系曲线几乎可以完全拟合于试验曲线；在较高的剪变状态时等向性模型与异向性模型对试验曲线拟合的平均误差约在在 5%~10% 之间；在试体破坏阶段则等向性模型反而较能反应试体的排水强度，惟异向性模型的计算误差亦

仅在 5% 范围之内。

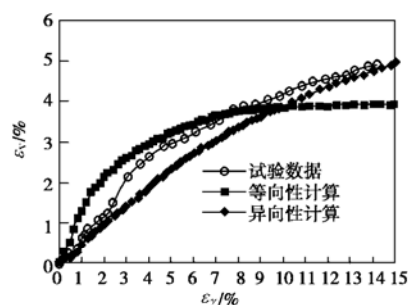


图 14 围压 2.5 kg/cm² 之体应变与剪应变关系

Fig. 14 Variation of volumetric strain with shear strain for drained test under 2.5 kg/cm² confining pressure

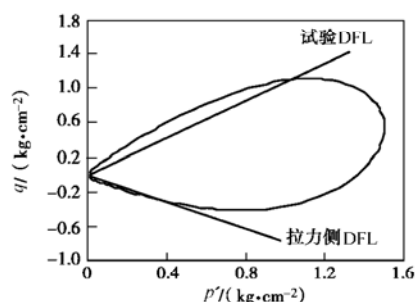


图 15 围压 1.5 kg/cm² 异向性分析模型初始屈服面 ($\theta_n = 20^\circ$)

Fig. 15 Initial yield locus of anisotropic model for drained test under 1.5 kg/cm² confining pressure

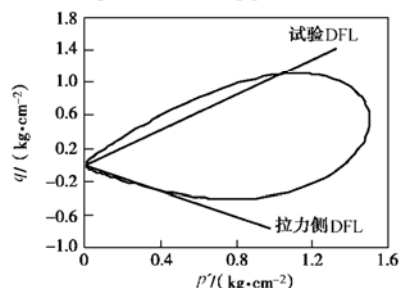


图 16 围压 1.5 kg/cm² 之等向性模型初始屈服面 ($\theta_n = 0^\circ$)

Fig. 16 Initial yield locus of isotropic model for drained test under 1.5 kg/cm² confining pressure

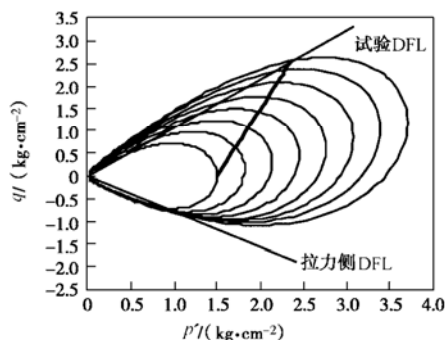


图 17 围压 1.5 kg/cm² 之异向性分析模型采用旋转硬化规律之应力路径 ($\theta_t = 20^\circ$)

Fig. 17 Stress path of anisotropic model for drained test under 1.5 kg/cm² confining pressure

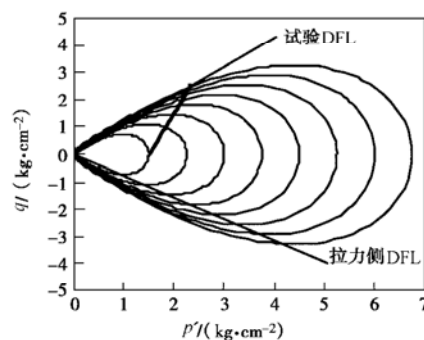


图 18 围压 1.5 kg/cm² 之等向性分析模型之应力路径 ($\theta_n = 0^\circ$)

Fig. 18 Stress path of isotropic model for drained test under 1.5 kg/cm² confining pressure

至于体应变与剪应变关系则以异向性模型的拟合性较好,由图 12~14 即可判断出异向性模型对于体应变与剪应变关系的拟合性极佳;而等向性模型拟合性则较差,其曲线几乎只能形成同一规律的双曲线形态。

5 结 论

本研究应用自由能函数及耗散函数两个热力学势函数,在延展的临界状态本构模型中导入新的参量,据以拓展模型描绘土壤材料本构行为的能力;亦从本构模型的参数研选和物理性诠释上获致下列结论。

(1) 自由能函数与耗散能函数是热力学定义的状态函数,可以描述系统内能量转移的轨迹。本研究采用连体介质热力学定义,先辨识系统外力做功产生自由能与耗散能的互补关联;再应用热力学状态变数的概念,在自由能函数与耗散能函数中导入有效应力、弹性应变、塑性应变及塑性应变增量等状态变数,将热力学状态函数描述系统内能量转移轨迹的功能等效应用,据以描述连体介质在等温变形条件下的屈服轨迹、流动法则及硬化规律;其建模过程验证热力学架构在本构模型的参数研选和物理性诠释上具备优异成效,是一个可以尝试的替代性建模方法。

(2) 自由能势函数可以等效描述连体介质系统的应力状态(硬化规律);耗散能函数则可以等效描述连体介质系统的屈服轨迹及流动法则。然而,辨别上述连体介质系统内互补的两个能量属性是采用热力学架构建立本构模型的关键性程序;因为在本构关系中系统能量属性的混淆将使模型参数的热力学诠释产生矛盾(例如:德鲁克稳定公设)。

(3) 土壤颗粒间的摩擦是一种纯粹的耗散行为,但是当土壤颗粒间存在紧密互锁现象时,所有输入的塑性功将有一部份被耗散(耗散能),另外互补的一份被储存(自由能)。当土壤颗粒间产生互锁效应的机制破坏时,储存的自由能将被释放,直接转化对土体作

功, 这是土壤产生应变硬化、尖峰强度及应变软化等一系列过程及现象的一个能量诠释; 当本构模型中的自由能函数增量关系被确立时, 经由自由能增量函数所建立的硬化规律就能准确的描绘土壤的强度-剪胀行为, 而此项自由能函数增量的物理性关联可在本文 2.3 节的推导成果获得诠释, (即应变硬化时 $\dot{F} > 0$, 尖峰强度时 $\dot{F} = 0$, 应变软化时 $\dot{F} < 0$)。

(4) 土壤在地质构造阶段即已呈现异向性。因此, 本文将等向性分析模型视为异向性分析模型的一个简化程序; 实务上, 仍应依据土壤的异向性行为, 充份提供输入模型所需的土壤实验数据, 采用异向性分析模型仿真实体工程的本构行为。

参考文献:

- [1] 郑颖人, 沈珠江, 龚晓南. 广义塑性力学 - 岩土塑性力学原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2003. (ZHENG Ying-ren, SHEN Zhu-jiang, GONG Xiao-nan. The principles of geotechnical plastic mechanics[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2003. (in Chinese))
- [2] COLLINS I F. The concept of stored plastic work or frozen elastic energy in soil mechanics[J]. *Geotechnique*, 2005, **55**(5): 373 - 382.
- [3] COLLINS I F. A systematic procedure for constructing three-dimensional critical state models[J]. *Int J Solids Structures*, 2003, **40**: 4379 - 4397.
- [4] COLLINS I F, MUHUNTHAN B. On the relationship between stress-dilatancy, anisotropy and plastic dissipation for granular materials[J]. *Geotechnique*, 2003, **53**(7): 611 - 618.
- [5] COLLINS I F, HILDER T. A theoretical framework for elastic/plastic constitutive models for triaxial tests[J]. *Int J Num Anal Meth Geomechanics*, 2002, **26**: 1313 - 1347.
- [6] COLLINS I F. Associated and non-associated aspects of the constitutive laws for coupled elastic/plastic materials[J]. *ASCE Int J Geomechanics*, 2002, **2**: 259 - 267.
- [7] COLLINS I F, KELLY P A. A thermomechanical analysis of a family of soil models[J]. *Geotechnique*, 2002, **52**(7): 507 - 518.
- [8] COLLINS I F. A systematic procedure for constructing critical state models in three dimensions, submitted[J]. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 2002, **6**: 1313 - 1347.
- [9] COLLINS I F, HOULSBY G T. Application of thermomechanical principles to the modelling of geotechnical materials[J]. *Proceedings of the Royal Society (Series A)*, 1997, **453**: 1975 - 2001.
- [10] ROSCOE K H, BURLAND J B. On the generalized stress-strain behaviour of 'wet clay'[C]// *Engineering Plasticity*, Cambridge: Cambridge University Press, 1968: 535 - 609.
- [11] MUHUNTHAN B, CHAMEAU J L, MASAD E. Fabric effects on the yield behaviour of soils[J]. *Soils and Foundations*, 1996, **36**: 85 - 97.
- [12] ZIENKIEWICZ O C, CHAN A H C, PASTOR M, SCHREFLER B A, SHIOMI T. *Computational geomechanics*[M]. Chichester: Wiley, 1998.
- [13] LUONG M P. Mechanical aspects and thermal effects of cohesionless soils under cyclic and transient loading[C]// *IUTAM Conference on Deformation and Failure of Granular Materials*, Delft, 1982: 39 - 246.
- [14] TAYLOR D W. *Fundamentals of soil mechanics*[M]. New York: Wiley, 1948.
- [15] WOOD D M. *Soil behaviour and critical state soil mechanics*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [16] BOLTON M D. The strength and dilatancy of sands[J]. *Geotechnique*, 1987, **37**: 219 - 226.
- [17] ATKINSON J H, BRANSBY P L. *The mechanics of soils*[M]. London: Mc Graw-Hill, 1978.