

基于均匀化方法的斜交节理岩体复合本构关系研究

牛 斌, 杨海天*

(大连理工大学工程力学系工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116023)

摘 要: 将斜交节理岩体作为一种广义复合材料, 选取恰当的代表元, 采用均匀化技术, 建立复合等效本构关系, 可预测斜交节理岩体的宏观力学性能。将岩体和节理按两种材料考虑, 对地下开洞节理岩体结构进行有限元分析, 并与采用复合本构关系的计算进行了对比, 得到了令人满意的结果。

关键词: 节理岩体; 均匀化; 本构关系

中图分类号: TU452

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2007)05-0773-06

作者简介: 牛 斌(1981-), 男, 山西长治人, 硕士研究生, 从事工程力学研究。E-mail: niubin@student.dlut.edu.cn。

Homogenization-based investigation on constitutive relationship of oblique joint rock

NIU Bin, YANG Hai-tian

(Department of Engineering Mechanics, State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract: It was suggested to employ asymptotic expansion-based homogenization method to establish the equivalent homogenized model of oblique joint rock. Macroscopic equivalent constitutive parameters of the model were predicted and compared with those given by other equivalent models. The numerical simulation of displacement of an underground cave was presented to verify the model in comparison with the results obtained by Goodman joint element-based FE analysis, and good accordance could be observed.

Key words: oblique joint rock; homogenization method; constitutive relationship

0 引 言

受层状或具有密集定向节理切割的岩体在岩土工程中是经常遇到的。节理的存在大大影响着整个岩体结构的力学行为。

可将节理和岩体作为独立的材料组分, 建立二者的力与变形等的协调关系, 如采用 Goodman^[1]的独立节理单元技术、离散元技术^[2]等, 对节理岩体结构进行整体分析。但当节理大量密集存在时, 这类方法的实施往往较为困难, 有时甚至不可行。一种变通的策略是将节理岩体结构整体上作为一种广义宏观复合材料, 建立恰当的本构关系, 从而进行整体受力变形分析。

预测节理岩体的宏观复合本构特性, 是岩石力学的重要研究内容之一, 已取得了不少研究成果: Singh^[3-4]预测了等效各向异性节理岩体的弹性模量; Zienkiewicz 和 Kelly^[5]用等效连续体方法, 建立了节理岩体的多层材料模型; Gerrard^[6]用能量等效法得到了层状和含三组节理的岩体的等效本构关系; 张武和张宏宪^[7]基于叠加方法, 用应力、位移协调关系推导

了单向、双向和多向节理的弹性模型; 杨海天等^[8-9]用应变-应力等效方法, 得到了单向和双向正交节理岩体的等效弹性-粘弹性模型; 刘书田等^[10]基于均匀化方法给出了单向节理岩体粘弹性性能的预测方法; T. G. Sitharam 等^[11]引入节理因子, 用有限元方法得到了等效模型; S. Mahous 等^[12]用代表体元方法, 根据能量均匀化技术分析了单向节理非线性性质和双向正交节理的相互作用。

斜交节理是节理岩体结构组成中的一种常见形式, 其宏观复合本构关系的研究具有重要的工程实用意义。在以往的工作中, 关于单向和双向正交的节理岩体的相关研究较多, 而关于斜交节理岩体的复合本构关系研究似乎很少, 一个可能的原因是由于斜交情

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172024); 国家自然科学基金资助项目(10421002); 国家自然科学基金资助项目(10472019); 国家自然科学基金资助项目(10332010); 国家重点基础研究发展计划973项目(2005CB321704); 辽宁省中青年学术带头人基金

收稿日期: 2006-02-23

*通讯作者

形下, 各种等效关系建立比较困难。如何克服这种困难, 深入开展这方面的研究, 具有重要的价值。

本文将两组节理斜交切割的岩体结构考虑为一种广义宏观复合材料, 选取恰当的代表单元, 利用均匀化方法^[13-15], 建立了相应的宏观复合本构关系, 与相关文献的结果进行了对比, 并利用它和有限元方法对开洞的节理岩体结构进行了数值模拟, 结果令人满意。文中所给出的复合本构模式, 也适用于其它组构形式相同的复合材料。

1 均匀化方法

均匀化方法通过小参数展开和周期性假设, 可有效地预测材料的宏观力学特性^[13-15]。

复合物体的应力-应变和位移-应变关系为

$$\sigma_{ij}^e = E_{ijkl}^e e_{kl}^e, \quad (1)$$

$$e_{kl}^e = \frac{1}{2} (u_{k,l}^e + u_{l,k}^e), \quad (2)$$

式中, E_{ijkl}^e 为材料弹性张量, u^e 为真实位移, σ^e 为真实应力, e_{kl}^e 为真实应变, 上标 e 表示这些量与单胞相关。

$i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ 。

将位移按 ε 展开:

$$u^e(x) = u^0(x, y) + \varepsilon u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) + \dots \quad (4)$$

将式 (4) 代入 (3) 并考虑到

$$\frac{\partial \varphi^e(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y_j} \quad \forall \varphi^e(x) = \varphi(x, y), \quad (5)$$

比较 ε 同阶项系数, 并经过一系列求解^[15]可得

$$\int_{\Omega^e} E_{ijkl}^H \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega^e} f_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_i} t_i v_i d\Gamma = 0. \quad (6)$$

其中, $u^0(x, y) = u^0(x)$ 表示等效材料性能的结构在外力作用下宏观尺度的位移, 与微观尺度坐标 y 无关; E_{ijkl}^H 为等效弹性张量,

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{ijkl} - E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} \right) dY, \quad (7)$$

其中, 广义位移函数 ($\chi_p^{kl} \quad k, l, p \in \{1, 2, 3\}$) 满足

$$\int_Y E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y E_{ijkl} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY. \quad (8)$$

采用有限元方法求解 (8), 将得到的广义位移函数 χ_p^{kl} 代入 (7) 可求得等效弹性张量。以下给出斜交节理岩体均匀化求解的有限元格式。

根据材料弹性常数张量的对称性, 式 (6), (8) 可写成紧凑形式^[15]:

$$\int_{\Omega^e} E_{ab}^H e_a^u e_b^v d\Omega - \int_{\Omega^e} f_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_i} t_i v_i d\Gamma = 0, \quad (9)$$

$$\int_Y (E_{ab} - E_{ac} e_{cb}^z) e_a^v dY = 0, \quad (10)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} e_{ab}^z &= L_{ai} \chi_i^b, \\ e_{a0}^v &= L_{ai} v_i, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} & \partial x_2 & \partial x_1 \end{bmatrix}$$

$$[\chi] = \begin{bmatrix} \chi_{11}^{11} & \chi_{11}^{22} & \chi_{12}^{12} \\ \chi_{21}^{11} & \chi_{21}^{22} & \chi_{22}^{12} \end{bmatrix}, \quad (12b)$$

$$\{v\} = \{v_1, v_2\}^T. \quad (12c)$$

式 (10) 的矩阵表示为

$$\int_{\Omega^e} \{v\}^T [L]^T ([E] - [E][L][\chi]) dY = 0. \quad (13)$$

$$[v] = [N] \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{v} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

其中, $[N]$ 是形函数矩阵, $[\bar{\chi}]$ 和 $[\bar{v}]$ 分别代表 $[\chi]$ 和 $\{v\}$ 的节点值。

$$\text{令 } [B] = [L][N], \quad (16)$$

将式 (15), (16) 代入式 (13), 可得式 (10) 的有限元求解方程

$$\sum_{e_i} \int_{e_i} [B]^T ([E] - [E][B][\bar{\chi}]^{e_i}) dy = 0, \quad (17)$$

即

$$[K][\bar{\chi}] = [F], \quad (18)$$

其中,

$$[K] = \sum_{e_i} \int_{e_i} [B]^T [E][B] dy, \quad (19)$$

$$[F] = \sum_{e_i} \int_{e_i} [B]^T [E] dy, \quad (20)$$

$\sum_{e_i}$ 表示对有限元单元的累加。在一个单胞域上利用

相应的边界条件求解 $[\bar{\chi}]$, 由式(14)可以得到等效弹性模量的矩阵:

$$[E^H] = \frac{1}{|Y|} \int_Y ([E] - [E][B][\bar{\chi}]) dY$$

$$= D = \begin{bmatrix} D(11) & D(12) & D(13) \\ D(21) & D(22) & D(23) \\ D(31) & D(32) & D(33) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

2 节理岩体均匀化问题

假定岩石和节理层为各向同性弹性材料, 对于二维情况, 其本构形式为

$$\sigma_a = D_a \varepsilon_a, \quad (22)$$

$$D_a = \frac{E_a(1-\nu_a)}{(1+\nu_a)(1-2\nu_a)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu_a}{1-\nu_a} & 0 \\ \frac{\nu_a}{1-\nu_a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu_a}{2(1-\nu_a)} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

式中, $a=R, j$ 分别对应于岩石和节理。

图1给出了斜交节理岩体及其单胞的示意图。图2为两组斜交节理相对宽度不等时的代表元, 节理两个方向相对宽度用 α, β 表示。

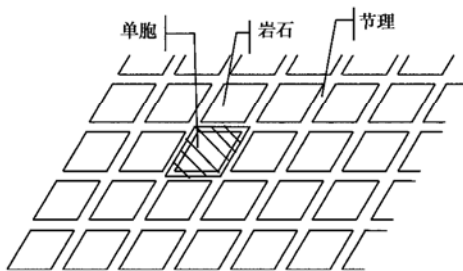


图1 具有两组斜交节理切割的岩体

Fig. 1 The rock with two sets of oblique joints

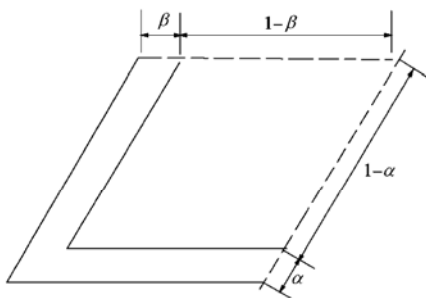


图2 单胞的1/4

Fig. 2 A quarter of the cell

由周期性条件要求, 斜交节理岩体的单胞有以下性质(见图3):

$$\phi(y_1, y_2) = \phi(y_1 + Y_1, y_2)$$

$$= \phi(y_1 + Y_1, y_2 + Y_2) = \phi(y_1, y_2 + Y_2), \quad (24)$$

当 $y_1 = y_1^0$ 和 $y_2 = y_2^0$ 时, 可以得到

$$\phi(y_1^0, y_2^0) = \phi(y_1^0 + Y_1, y_2^0)$$

$$= \phi(y_1^0 + Y_1, y_2^0 + Y_2) = \phi(y_1^0, y_2^0 + Y_2), \quad (25)$$

其中, ϕ 可以代表 χ , χ 分量的标量位移描述为 u, v 。

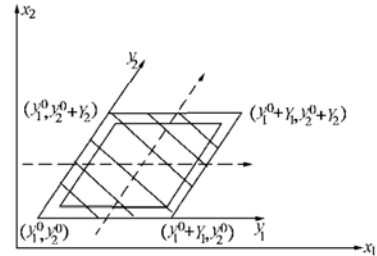


图3 代表单元

Fig. 3 A representative cell

在图1中阴影部分所示的整体单胞上, 利用周期性边界条件进行有限元计算, 采用4节点等参单元。图4为两个方向节理相对宽度均为0.25时的网格剖分示意图。

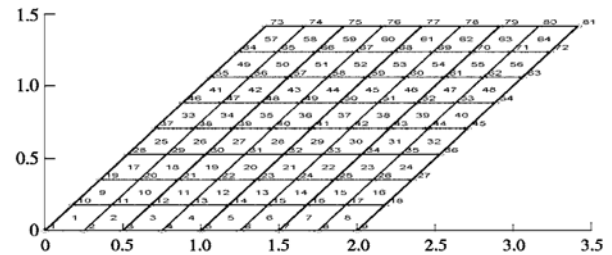


图4 单胞有限元网格

Fig. 4 FEM mesh on a representative cell

计算中, 假设 $E_R = 2 \times 10^9 \text{ Pa}$, $\nu_R = 0.3$; $E_j = 5 \times 10^7 \text{ Pa}$, $\nu_j = 0.3$ 。

考虑两个方向节理相对宽度相同, 用 β 表示相对宽度。在相对水平 x_1 轴节理倾角 θ 为 $\pi/4$ 时, 对 $\beta = 0.1, 0.125, 0.2, 1/3, 0.25, 0.5$ 进行计算, 结果示于图5。在 $\beta=0.1$ 时, 对节理倾角 θ 为 $\pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ (即正交节理)进行计算, 结果示于图6。图5、6中 $D(IJ)$ ($I, J=1, 2, 3$)为图3坐标系 x_1-x_2 下的斜交节理岩体等效弹性本构矩阵

$$D = \begin{bmatrix} D(11) & D(12) & D(13) \\ D(21) & D(22) & D(23) \\ D(31) & D(32) & D(33) \end{bmatrix} \quad (26)$$

的分量。

计算结果表明:

(1) 随着节理相对宽度的增大, 材料刚度变弱, 等效本构矩阵中各个弹性常数对应减小, 与实际物理情况相符。

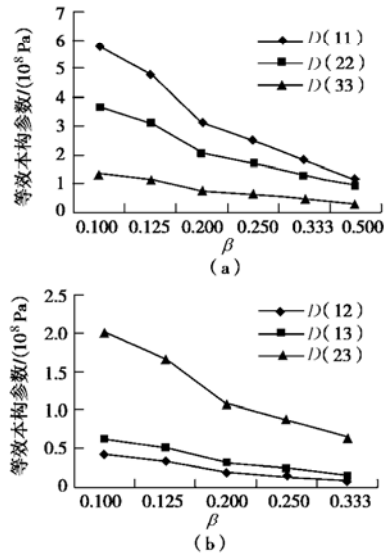


图 5 等效本构参数随节理相对宽度的变化

Fig. 5 The variation of equivalent constitutive parameters with β

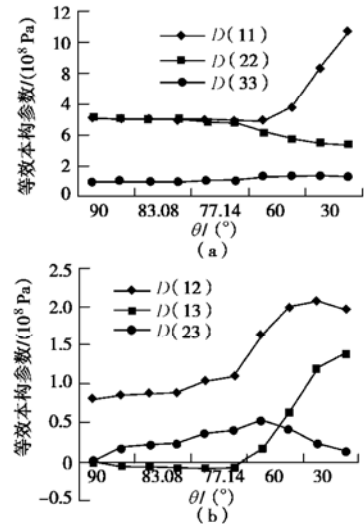


图 6 等效本构参数随节理倾角变化

Fig. 6 Comparison of equivalent constitutive parameters with θ

(2) 随节理间夹角变化, 各弹性常数相应变化, 如倾角变小时 $D(11)$ 变大, 而 $D(22)$ 变小; 当 $\theta=90^\circ$ 时为正交节理情况, 结果与文献^[7]一致。

将本文的等效本构关系与文献^[7]进行比对, 符合很好。图 7(a) 为节理相对宽度 $\beta=0.1$, 节理倾角 $\theta=\pi/4$ 时的比较结果。图 7(b) 为节理相对宽度 $\beta=0.1$, 节理倾角 $\theta=\pi/6$ 时的比较结果。

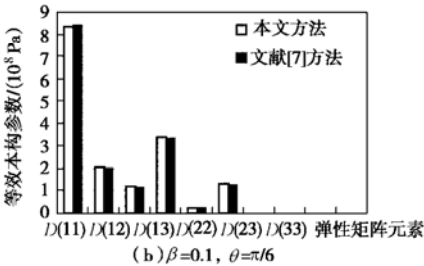
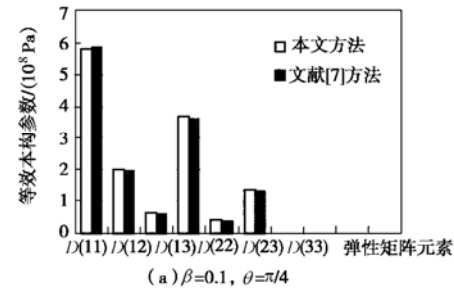


图 7 本构参数比较

Fig. 7 The comparison of constitutive parameters

与文献^[7]相比, 本文方法在数学上可更为严密地考虑斜交节理岩体的复合特性。计算相对宽度相等的正交节理岩体时发现, 文献^[7]方法在两个正交方向的刚度会随着节理相对宽度的不同而产生细微差别, 而本文方法则得到两个完全相同的刚度。

3 算 例

本例模拟计算了一个位于受两组斜交节理切割的岩体中有门型洞室, 如图 8 所示。分别采用均匀化等效本构和单独划分节理元进行分析。

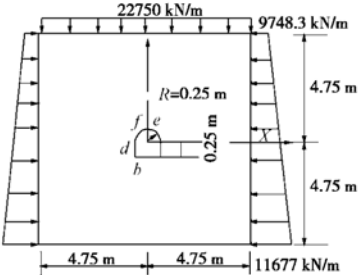


图 8 节理岩体中的门型洞室

Fig. 8 A door-shaped cave in the jointed rock

岩石的物理参数为 $E_R=2\times10^{10}$ Pa, $\nu_R=0.2$; 节理的物理参数为 $E_j=2\times10^9$ Pa, $\nu_j=0.3$ 。 E_j 与 ν_j 分别代表节理的弹性模量和泊松比, 它们可转换为工程中常用的节理切向刚度和法向刚度^[16]。

斜交的两组节理, 一组为水平, 相对宽度 $\beta=0.035$, 节理密度为 2 条/m; 另一组成 45° , 相对宽度 $\beta=0.05$, 节理密度约 3 条/m。单独设 Goodman 节理元和均匀化本构的计算对比, 结果见表 1、2 及图 9 所示。

表 1 纵向位移比较

Table 1 The comparison of vertical displacements between homogenization-equivalent constitutive relation and Goodman joint element

单位: mm		
点	单独节理元	均匀化
e	-7.2180	-8.4767
f	-7.1142	-7.9726
d	-7.0043	-7.5183
b	-6.2005	-6.7117

表 2 纵向位移比较

Table 2 The comparison of vertical displacements between homogenization-equivalent constitutive relation and Goodman joint element

单位: mm			
X/m	Y/m	单独节理元	均匀化
-4.75	-0.25	-6.0389	-6.9528
-4.25	-0.25	-6.0666	-6.9434
-3.75	-0.25	-6.1044	-6.9444
-3.25	-0.25	-6.1442	-6.9517
-2.75	-0.25	-6.1821	-6.9620
-2.25	-0.25	-6.2157	-6.9729
-1.75	-0.25	-6.2437	-6.9815
-1.25	-0.25	-6.2634	-6.9845
-0.75	-0.25	-6.2724	-6.9684
-0.25	-0.25	-6.2005	-6.7117
0	-0.25	-6.1839	-6.2343
0.25	-0.25	-6.1674	-6.6813
0.75	-0.25	-6.2807	-6.9476
1.25	-0.25	-6.2917	-6.9657
1.75	-0.25	-6.2830	-6.9613
2.25	-0.25	-6.2659	-6.9496
2.75	-0.25	-6.2428	-6.9347
3.25	-0.25	-6.2157	-6.9190
3.75	-0.25	-6.1875	-6.9044
4.25	-0.25	-6.1633	-6.8947
4.75	-0.25	-6.1507	-6.8938

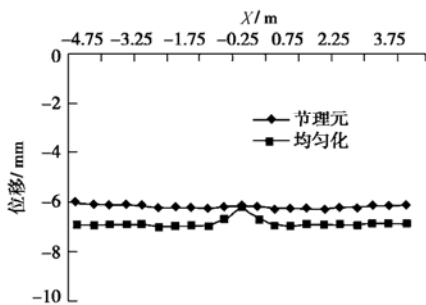


图 9 纵向位移比较图

Fig. 9 The comparison of the vertical displacements between the Goodman joint element and the homogenization-equivalent constitutive relation

对比分析表明：两种方法的计算结果较为一致。采用基于均匀化方法的有限元计算，只需 570 多个单元，而对岩石和节理单独设元，需要大约 1400 多个单元。可见采用均匀化的等效本构，可大大降低计算工作量，提高计算效率。此外，当节理相对宽度和节理方向发生改变时，单独设节理元需要重新划分有限元

网格，而采用等效的本构关系，只需计算相应的本构参数，无需重新划分有限元网格。当节理大量密集存在时，对岩石和节理单独设元将十分困难，可采用均匀化等效方法进行等效计算，得到合用的结果。

计算比较发现，均匀化的结果普遍略大于单独设节理元的结果，其产生原因可能主要是：

(1)均匀化方法基于单胞与宏观结构相比无限小的假设，对同一个结构，所含单胞越多，均匀化的结果越准确。但节理密度较大时（含单胞较多），作为参照的单独设节理元计算较为困难，因此算例中节理不是很密，由此可能导致单胞数不足够多，并引起一定的计算偏差。

(2)采用独立设节理单元的结果作为参照，所用节理单元其实上也是一种数值近似模型。此外节理弹性模量和泊松比与节理切向刚度和法向刚度之间的转换（ $\lambda_1 = \frac{G_j}{b}, \lambda_n = \frac{E_j}{b}$ ， b 为节理厚度）也进行了一定的近似^[16]，这些近似都可能造成与均匀化结果的偏差。

4 结 论

本文从均匀化的角度，预测了斜交节理岩体弹性复合本构特性，并与变形等效法^[7]进行了比较，结果令人满意。本文工作是将均匀化技术应用于岩石力学研究的一种新的尝试。对开洞斜交节理岩体结构进行的数值模拟和数值比对表明：在计算结果基本一致的前提下，与独立设节理单元计算相比，复合等效计算可大大提高计算效率。

本文工作有待进一步深入，如考虑三维斜交节理岩体及粘弹性斜交节理岩体的均匀化等效工作等。

参考文献：

[1] GOODMAN R E, TAYLOR R L, BREKKE T L. A model for the mechanics of joint rock[J]. J of Soil Mech Found Div ASCE, 1968, **94**(SM3): 637 - 659.

[2] HART R D, CUNDALL P A, LEMOS J V. Formulation of a three-dimensional distinct element model-part ii: mechanical calculations[J]. Int J Rock Mech Min Sci & Geomech Abstr, 1988, **25**(3): 117 - 126.

[3] SINGH B. Continuum characterization of jointed rock masses part i—the constitutive equations[J]. Int J Rock Mech Sci & Geomech Abstr, 1973, **10**(4): 311 - 335.

[4] SINGH B. Continuum characterization of jointed rock masses part ii—significance of low shear modulus[J]. Int J Rock Mech Sci & Geomech Abstr, 1973, **10**(4): 337 - 349.

[5] ZIENKIEWICZ O C, KELLY D W. The coupling of the finite

- element method and boundary solution procedures[J]. *Int J Numer Methods Eng*, 1977, **11**(2): 355 – 375.
- [6] GERRARD C M. Elastic models of rock masses having one, two and three sets of joints[J]. *Int J Rock Mech Min Sci & Geomech Abstr*, 1982, **19**(1): 15 – 23.
- [7] 张 武, 张宏宪. 节理岩体的弹性模型[J]. *岩土工程学报*, 1987, **9**(4): 33 – 44. (ZHANG Wu, ZHANG Hong-xian. Elastic models of jointed rock masses[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1987, **9**(4): 33 – 44. (in Chinese))
- [8] 杨海天, 邬瑞峰. 双向正交节理岩体的一个复合蠕变模型[J]. *大连理工大学学报*, 1991, **31**(3): 267 – 274. (YANG Hai-tian, WU Rui-feng. Composite creep model for rock with bilateral orthogonal joint[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1991, **31**(3): 267 – 274. (in Chinese))
- [9] 杨海天, 邬瑞峰, 王 刚, 等. 节理岩体的复合本构有限元仿真计算[J]. *岩土工程学报*, 1996, **18**(6): 69 – 76. (YANG Hai-tian, WU Rui-feng, WANG Gang, et al. Finite element simulating computation for joint-rock based on composite constitutive models[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1996, **18**(6): 69 – 76. (in Chinese))
- [10] 刘书田, 常崇义, 杨海天, 等. 节理岩体的粘弹性能预测[J]. *岩石力学与工程学报*, 2003, **22**(4): 582 – 588. (LIU Shu-tian, CHANG Chong-yi, YANG Hai-tian, et al. Prediction of viscoelastic property of unidirectionally jointed rock[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2003, **22**(4): 582 – 588. (in Chinese))
- [11] SITHARAMA T G, SRIDEVIB J, SHIMIZUC N. Practical equivalent continuum characterization of jointed rock masses[J]. *Int J Rock Mech Min Sci*, 2001, **38**(3): 437 – 448.
- [12] MAGHOUS S, DE BUHAN P, DORMIEUX L. Non-linear global elastic behaviour of a periodically jointed material[J]. *Mechanics Research Communications*, 2002, **29**(1): 45 – 51.
- [13] HASSANI B, HINTON E. A review of homogenization and topology optimization i—homogenization theory for media with periodic structure[J]. *Computers & Structures*, 1998, **69**(6): 707 – 717.
- [14] HASSANI B, HINTON E. A review of homogenization and topology optimization ii—analytical and numerical solution of homogenization equations[J]. *Computers & Structures*, 1998, **69**(6): 719 – 738.
- [15] 刘书田. 复合材料性能预测与梯度功能材料优化设计[D]. 大连: 大连理工大学, 1994. (LIU Shu-tian. Prediction of properties of composites and optimal design of functional gradient materials[J]. Dalian: Dalian University of Technology, 1994. (in Chinese))
- [16] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1998. (ZHU Bo-fang. The finite element method theory and applications [M]. Beijing: China WaterPower Press, 1998. (in Chinese))
- [17] FISHMAN K L. Verification fro numerical modeling of joint rock mass using thin layer element[J]. *International Journal fro Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1991, **15**(1): 61 – 70.