

# 基于物质点方法饱和多孔介质动力学模拟 (III) ——两相物质点方法

张洪武<sup>1</sup>, 王鲲鹏<sup>1, 2</sup>

(1. 大连理工大学工程力学系、运载工程与力学学部, 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;

2. 北京宇航系统工程研究所, 北京 100076)

**摘要:** 在传统物质点方法的基础上发展了用于饱和多孔介质动力学分析的两相物质点方法(two-phase material point method, tMPM)。由于饱和多孔介质由固体骨架与孔隙流体组成, 两相物质点方法通过引入两套物质点, 分别表征固体骨架变形与孔隙流体流动。应用饱和多孔介质  $u-U$  形式控制方程, 推导了两相物质点方法控制方程离散形式, 以固相与液相位移作为基本未知量。采用同传统物质点方法相同的时间积分形式, 两相物质点方法成功模拟了饱和多孔介质中固体骨架与孔隙流体间的相互作用; 并且通过数值算例中两相物质点方法解与有限元参考解的比较验证了两相物质点方法的正确性。

**关键词:** 物质点方法; 饱和多孔介质; 动力学分析

**中图分类号:** TU435      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-4548(2010)04-0507-07

**作者简介:** 张洪武(1964-), 男, 博士, 教授, 主要从事工程力学与计算力学方面的研究。E-mail: [zhanghw@dlut.edu.cn](mailto:zhanghw@dlut.edu.cn)。

## Material point method for dynamic analysis of saturated porous media (III): two-phase material point method

ZHANG Hong-wu<sup>1</sup>, WANG Kun-peng<sup>1, 2</sup>

(1. Department of Engineering Mechanics, Faculty of Vehicle Engineering and Mechanics, State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 2. Beijing Engineering Institute of Aerospace System, Beijing 100076, China)

**Abstract:** Under the framework of the original material point method (MPM), a two-phase MPM (tMPM) is proposed to predict the dynamic response of saturated porous media. Because the saturated porous media are composed of solid skeleton and pore fluid, two sets of material points are invoked in the tMPM, which represent the deformation of solid skeleton and pore fluid flow respectively. Based on the  $u-U$  form governing equations for saturated porous media, the discrete form of the tMPM is derived explicitly. Adopting the same time integration scheme as that used in the original MPM, the tMPM simulates the coupling behavior of saturated porous media successfully. Compared with the reference solution of the conventional FEM, the validity of the tMPM is demonstrated by the good agreement shown in numerical examples.

**Key words:** saturated porous medium; material point method; dynamic analysis

## 0 引言

为了克服传统数值分析手段(如有限元方法)在处理一些特殊问题时所面临的数值求解困难(如几何大变形问题中出现的网格畸变问题), 已发展了一系列特殊的数值求解算法, 如流行单元法、无网格方法等。作为处理大变形问题的一种有效方法, 物质点方法(Material point method, MPM)的研究近年来得到多方面的重视, 该方法是一种基于任意拉格朗日欧拉(ALE)描述的有限单元法, 拥有两种网格, 其一为

物质或拉格朗日网格, 定义在物体构型上; 其二为空间或欧拉网格, 定义于整个计算域。在物质点方法中, 物质点(物质网格)记录当前构型的变量信息; 而控制方程则在背景网格(空间网格)上求解, 并且在每一时间步初抛弃变形后的背景网格, 采用未变形的背景网格, 从而避免传统拉格朗日方法中, 由于网格畸

基金项目: 国家自然科学基金项目(10721062, 90715037, 10728205);  
教育部111引智计划项目: 国家973项目(2010CB832704)

收稿日期: 2009-01-04

变所产生的数值求解困难。这些特点使得物质点方法在计算固体力学领域有着良好的表现。Sulsky 等<sup>[1]</sup>率先将其应用到固体力学领域，并在不调用任何主从关系的基础上，模拟接触/碰撞、穿透/穿孔等时间相关问题<sup>[2]</sup>。在岩土工程问题分析方面，该方法已被用于锚的承载力分析<sup>[3]</sup>、废弃物填充计算<sup>[4]</sup>等。在这些工作中，均认为材料是单相介质，没有考虑多相多孔材料中的流—固耦合作用。

在饱和多孔介质 Biot 理论<sup>[5-6]</sup>框架下，文献[7]基于饱和多孔介质  $u - p$  形式控制方程，提出了耦合物质点方法（coupling MPM, CMPM），成功模拟了饱和多孔介质动力学响应。同时文献[7]在物质点方法的框架下，提出饱和多孔介质与固体结构间的接触算法，其中饱和多孔介质与单相固体介质的力学行为分别通过耦合物质点方法与传统物质点方法进行模拟。本文在已有工作的基础上，基于饱和多孔介质  $u - U$  形式控制方程，建立考虑固体骨架与孔隙流体间相互作用的两相物质点方法（two-phase MPM, tMPM）。

## 1 饱和多孔介质控制方程

基于Biot理论，饱和多孔介质  $u - U$  形式控制方程可以表示为

固体骨架动量守恒方程

$$[s''_{ij} - (a - n)pd_{ij}]_{,j} + r'_s g_i + n^2 k^{-1} g_f (U_i^s - u_i^s) = r'_s \mathbf{g}_f; \quad (1a)$$

孔隙流体动量守恒方程

$$-np_{,i} + r'_f g_i - n^2 k^{-1} g_f (U_i^f - u_i^f) = r'_f \mathbf{g}_f; \quad (1b)$$

孔隙流体质量守恒方程

$$Q[(a - n)u_{,i} + nU_{i,i}] + \dot{\rho} = 0. \quad (1c)$$

式中， $u_i$  为固体骨架位移， $U_i$  为孔隙流体位移， $s''_{ij}$  为有效应力， $p$  为孔隙压强。 $g_i$  为体力， $a$  为 Biot 系数， $k$  为孔隙流体渗透系数。饱和多孔介质的混合密度  $r = r'_s + r'_f$ ， $r'_s = (1 - n)r_s$ ， $r'_f = nr_f$ ，其中  $n$  为孔隙率， $r_s$  为固体骨架密度， $r_f$  为孔隙流体密度。 $g_f = r_f g_r$  为孔隙流体比重， $g_r$  为重力加速度。 $Q = [(a - n)/K_s + n/K_f]^{-1}$ ，其中  $K_s$  与  $K_f$  分别为固体骨架与孔隙流体体变模量。下标  $s$  与  $f$  表示变量与固体骨架或孔隙流体有关。

当控制方程在域  $W$  内求解时，固体骨架相关边界  $\partial W_s$  可以表述为

指定位移边界：在  $\partial W_u$  上  $u_i = v_i$ ，  
                  (2a)

指定载荷边界：在  $\partial W_t$  上

$$[s''_{ij} - (a - n)pd_{ij}] \cdot n_{j,s}^b = t_i^b. \quad (2b)$$

式中， $v_i$  为指定固相位移， $t_i^b$  为指定载荷； $n_s^b$  为边界

$\partial W$  的外法线矢量。孔隙流体相关边界  $\partial \Omega_f$  同样可以表述为

指定位移边界：在  $\partial W_v$  上  $U_i = V_i$ ，  
                  (3a)

指定压强边界：在  $\partial W_p$  上  $p = \bar{p}$ ，  
                  (3b)

其中， $V_i$  与  $\bar{p}$  分别为边界指定液相位移与指定压强。

## 2 两相物质点方法

### 2.1 两相物质点方法的几何离散

由于饱和多孔介质由固体骨架与孔隙流体组成，两相物质点方法通过引入两套物质点，分别描述固体骨架变形与孔隙流体流动，如图 1 所示。这是两相物质点方法的主要特点，也是区别于传统物质点法与耦合物质点方法的主要区别。图 1 中的计算背景网格为典型的四边形背景网格。

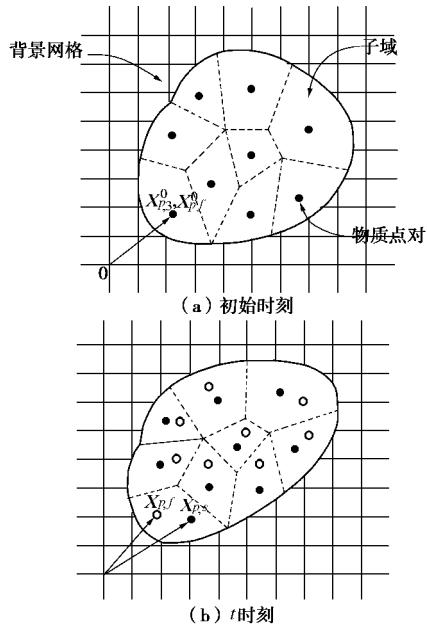


图 1 典型的物质点对分布与背景网格示意图（实心点为固相物质点，空心点则代表孔隙流体）

Fig. 1 Sketch of typical computational grids and material point pairs (solid dots denote material points of solid skeleton, and hollow ones denote material points of pore fluid)

两相物质方法的几何离散：首先，将饱和多孔介质的初始构型剖分为有限个子域  $W_p^0$ ，如图 1 (a) 所示，其中  $P=1 \dots N_p$ ， $N_p$  为子域个数。在每个子域内，存在一对物质点，分别表征固体骨架与孔隙流体。从另外一个角度来看， $N_p$  也可理解为饱和多孔介质物质点对的总数。两相物质点方法中，通过向量  $\mathbf{X}_P^s$  与  $\mathbf{X}_P^f$  定义物质点对的位置， $\mathbf{X}_P^s$  与  $\mathbf{X}_P^f$  均为时间  $t$  的函数。在初始时刻  $t^0$ ，固相物质点与液相物质点重合，即  $\mathbf{X}_P^s(t^0) = \mathbf{X}_P^f(t^0)$ ；随着时间的推移，子域由初始时的  $W_p^0$  变形为  $W_p$ ，其所对应物质点对的位置也由初始

时刻的  $\mathbf{X}_P^s(t^0)$  与  $\mathbf{X}_P^f(t^0)$  移动到  $\mathbf{X}_P^s(t)$  与  $\mathbf{X}_P^f(t)$ , 如图 1(b) 所示。

在两相物质点方法中, 无论固相物质点还是液相物质点, 它们几何上都是彼此孤立的, 通过背景网格保持彼此间的相互关联。在两相物质点方法中, 通过跟踪物质点的位置变化描述饱和多孔介质构型的变形情况。

## 2.2 饱和多孔介质控制方程的弱形式

物质点方法中的背景网格提供了定义控制方程离散形式的便利途径。背景网格相关的变量来源于物质点。两相物质点方法中, 通过形函数插值, 将物质点的质量、应力以及孔隙压强等变量映射到背景网格点, 并在背景网格点上求解控制方程的离散形式。

两相物质点方法中, 每个子域的固相与液相质量完全集中在所对应的物质点上, 因此规则化后的固相与液相密度定义为

$$\mathbf{r}'_s(\mathbf{X}, t) = \sum_{P=1}^{N_p} M_P^s \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_P^s) \quad , \quad (4a)$$

$$\mathbf{r}'_f(\mathbf{X}, t) = \sum_{P=1}^{N_p} M_P^f \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_P^f) \quad , \quad (4b)$$

其中,  $\delta(\bullet)$  为 delta 函数。 $M_P^s = \mathbf{r}'_s V_P$  与  $M_P^f = \mathbf{r}'_f V_P$  分别为固相与液相物质点所对应的质量,  $V_P$  为相应的子域体积。由于  $M_P^s$  与  $M_P^f$  均为与时间无关的变量, 因此在两相物质点方法中, 质量守恒条件自动得到满足。角标  $P$  表示变量与物质点  $P$  相关。

采用与传统物质点方法相似的推导过程, 可获得两相物质点方法的离散求解方程。基于虚功原理, 式(1a)与(1b)两端同乘试函数  $w_i^s$  与  $w_i^f$ , 并在构型  $\Omega$  上积分

$$\int_{\Omega_t} \mathbf{t}_i^b w_i^s d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{r}'_s \mathbf{s}_{ij}^s w_{i,j}^s dV + \int_{\Omega} \mathbf{r}'_s g_i w_i^s dV + \int_{\Omega} \mathbf{r}'_f nk^{-1} g_r (\mathbf{U}_i^s - \mathbf{U}_i^f) w_i^s dV = \int_{\Omega} \mathbf{r}'_s \mathbf{U}_i^s w_i^s dV \quad , \quad (5a)$$

$$- \int_{\Omega_p} npn_i^b w_i^f dG - \int_{\Omega} \mathbf{r}'_f \mathbf{s}_{ij}^f w_{i,j}^f dV + \int_{\Omega} \mathbf{r}'_f g_i w_i^f dV - \int_{\Omega} \mathbf{r}'_f nk^{-1} g_r (\mathbf{U}_i^s - \mathbf{U}_i^f) w_i^f dV = \int_{\Omega} \mathbf{r}'_f \mathbf{U}_i^f w_i^f dV \quad , \quad (5b)$$

上式中,  $\mathbf{s}_{ij}^s = [\mathbf{s}_{ij}'' - (a-n) p \mathbf{d}_{ij}] / \mathbf{r}'_s$  与  $\mathbf{s}_{ij}^f = -npd_{ij} / \mathbf{r}'_f$  分别为规则化后的固相与液相应力。

将式(4)代入式(5), 可以将式(5)的积分形式转化为物质点变量和的形式

$$\int_{\Omega_t} \mathbf{t}_i^b w_i^s d\Gamma - \sum_{P=1}^{N_p} M_P^s \mathbf{s}_{ij}^s w_{i,j}^s + \sum_{P=1}^{N_p} M_P^f g_i w_i^s + nk^{-1} \sum_{P=1}^{N_p} M_P^f g_r (\mathbf{U}_i^s - \mathbf{U}_i^f) w_i^s = \sum_{P=1}^{N_p} M_P^s \mathbf{U}_i^s w_i^s \quad , \quad (6a)$$

$$- \int_{\Omega_p} npn_i^b w_i^f dG - \sum_{P=1}^{N_p} M_P^f \mathbf{s}_{ij}^f w_{i,j}^f + \sum_{P=1}^{N_p} M_P^f g_i w_i^f -$$

$$nk^{-1} \sum_{P=1}^{N_p} M_P^f g_r (\mathbf{U}_i^s - \mathbf{U}_i^f) w_i^f = \sum_{P=1}^{N_p} M_P^f \mathbf{U}_i^f w_i^f \quad . \quad (6b)$$

在两相物质点方法中, 固相与液相物质点均有其相应的形函数  $N_I^s$  与  $N_I^f$ 。形函数由背景网格确定, 具体表达形式与有限元方法中的形函数相同。

通过形函数, 固相与液相物质点的位置可以表示为

$$X_{i,P}^s = \sum_{I=1}^{N_n} X_{iI}^s N_I^s(\mathbf{X}_P^s), \quad X_{i,P}^f = \sum_{I=1}^{N_n} X_{iI}^f N_I^f(\mathbf{X}_P^f), \quad (7a)$$

这里,  $N_n$  为背景网格节点总数。角标  $I$  表示定义在网格节点  $I$  上的变量。在物质点方法中, 物质点的位移、速度、加速度与试函数都可以通过形函数插值获得, 并且它们有着与上式类似的表达形式

$$u_i(\mathbf{X}_P^s, t) = \sum_{I=1}^{N_n} u_{iI} N_I^s, \quad U_i(\mathbf{X}_P^f, t) = \sum_{I=1}^{N_n} U_{iI} N_I^f, \quad (7b)$$

$$\mathbf{U}_i^s(\mathbf{X}_P^s, t) = \sum_{I=1}^{N_n} \mathbf{U}_{iI}^s N_I^s, \quad \mathbf{U}_i^f(\mathbf{X}_P^f, t) = \sum_{I=1}^{N_n} \mathbf{U}_{iI}^f N_I^f, \quad (7c)$$

$$\mathbf{w}_i^s(\mathbf{X}_P^s, t) = \sum_{I=1}^{N_n} \mathbf{w}_{iI}^s N_I^s, \quad \mathbf{w}_i^f(\mathbf{X}_P^f, t) = \sum_{I=1}^{N_n} \mathbf{w}_{iI}^f N_I^f, \quad (7d)$$

$$w_i^s(\mathbf{X}_P^s, t) = \sum_{I=1}^{N_n} w_{iI}^s N_I^s, \quad w_i^f(\mathbf{X}_P^f, t) = \sum_{I=1}^{N_n} w_{iI}^f N_I^f, \quad (7e)$$

其中, 节点试函数  $w_{iI}^s$  与  $w_{iI}^f$ , 除了在指定位移边界上, 其值是任意的。在指定位移边界上, 节点试函数值为零。将式(7c), (7e)代入式(6), 控制方程的离散形式可以表示如下:

固相动量平衡方程

$$\sum_{J=1}^{N_n} M_{IJ}^s \mathbf{U}_{iJ}^s = F_{il,int}^s + F_{il,ext}^s + F_{il,damp}^s \quad I=1,\dots,N_n, \quad (8)$$

其中

$$M_{IJ}^s = \sum_{P=1}^{N_p} M_P^s N_I^s N_J^s \quad , \quad (9a)$$

$$F_{il,int}^s = - \sum_{P=1}^{N_p} M_P^s \mathbf{s}_{ij}^s N_{I,j}^s \quad , \quad (9b)$$

$$F_{il,ext}^s = \sum_{P=1}^{N_p} M_P^s g_i N_I^s + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t}_i^b N_I^s dG \quad , \quad (9c)$$

$$F_{il,damp}^s = \sum_{J=1}^{N_n} \sum_{P=1}^{N_p} nk^{-1} M_P^f g_r (\mathbf{U}_{iJ}^f N_J^f - \mathbf{U}_{iI}^s N_I^s) N_I^s \quad . \quad (9d)$$

液相动量平衡方程

$$\sum_{J=1}^{N_n} M_{IJ}^f \mathbf{U}_{iJ}^f = F_{il,int}^f + F_{il,ext}^f + F_{il,damp}^f \quad I=1,\dots,N_n, \quad (10)$$

其中

$$M_{IJ}^f = \sum_{P=1}^{N_p} M_P^f N_I^f N_J^f \quad , \quad (11a)$$

$$F_{il,int}^f = - \sum_{P=1}^{N_p} M_P^f \mathbf{s}_{ij}^f N_{I,j}^f \quad , \quad (11b)$$

$$F_{il,\text{ext}}^f = \sum_{p=1}^{N_p} M_p^f g_i N_I^f - \int_{\partial\Omega_p} n p n_i^b N_I^f dV , \quad (11c)$$

$$F_{il,\text{damp}}^f = - \sum_{j=1}^{N_n} \sum_{p=1}^{N_p} n k^{-1} M_p^f g_r (\mathbf{U}_{ij}^f N_J^f - \mathbf{U}_{il}^f N_J^s) N_I^f . \quad (11d)$$

上式中,  $F_{il,\text{int}}$ 、 $F_{il,\text{ext}}$  与  $F_{il,\text{damp}}$  分别代表背景网格点上的内力、外力与阻尼力项。

如果采用对角质量矩阵

$$M_I^s = \sum_{p=1}^{N_p} M_p^s N_I^s , \quad M_I^f = \sum_{p=1}^{N_p} M_p^f N_I^f , \quad (12)$$

那么固相与液相动力平衡方程(式(8)与(10))可以简化为

$$M_I^s \mathbf{U}_{il}^s = F_{il,\text{int}}^s + F_{il,\text{ext}}^s + F_{il,\text{damp}}^s = F_{il}^s , \quad I = 1, \dots, N_n , \quad (13a)$$

$$M_I^f \mathbf{U}_{il}^f = F_{il,\text{int}}^f + F_{il,\text{ext}}^f + F_{il,\text{damp}}^f = F_{il}^f , \quad I = 1, \dots, N_n . \quad (13b)$$

其中  $F_{il}^s$  与  $F_{il}^f$  分别为背景网格节点上固相与液相的合力。

如果定义背景网格点的动量为

$$L_{il}^s = M_I^s \mathbf{U}_{il}^s , \quad L_{il}^f = M_I^f \mathbf{U}_{il}^f , \quad (14)$$

并且  $t$  为当前时刻,  $\Delta t$  为时间步增量, 那么式(13)可以转化为

$$L_{il}^{s,t+\Delta t} = L_{il}^{s,t} + \Delta t F_{il}^{s,t} , \quad (15a)$$

$$L_{il}^{f,t+\Delta t} = L_{il}^{f,t} + \Delta t F_{il}^{f,t} . \quad (15b)$$

在增量步内的小变形假设下, 固相与液相的形函数近似存在  $N_I^s(\mathbf{X}_P^s) \approx N_I^f(\mathbf{X}_P^f)$ ; 因此阻尼力项可以近似表述为

$$F_{il,\text{damp}}^s = \sum_{j=1}^{N_n} C_{IJ} (\mathbf{U}_{ij}^s - \mathbf{U}_{ij}^f) , \quad (16a)$$

$$F_{il,\text{damp}}^f = \sum_{j=1}^{N_n} -C_{IJ} (\mathbf{U}_{ij}^f - \mathbf{U}_{ij}^s) , \quad (16b)$$

其中

$$C_{IJ} = \sum_{p=1}^{N_p} n k^{-1} g_r M_p^f N_I^f N_J^f . \quad (17)$$

这里,  $F_{il,\text{damp}}^s$  与  $F_{il,\text{damp}}^f$  为固体骨架与孔隙流体间的阻尼力, 它们是一对作用力与反作用力, 即  $F_{il,\text{damp}}^s = -F_{il,\text{damp}}^f$ 。在两相物质点方法中, 固相与液相间的阻尼力代表了的饱和多孔介质中的流—固耦合作用。

### 2.3 两相物质点方法算法流程

采用与传统物质点方法相同的时间积分方案, 本文建立了的两相物质点方法显式算法, 具体算法流程为:

(1) 令  $t=0$ , 初始化物质点, 指定物质点的初始变量(如材料性质, 初始应力、应变以及孔隙压强等)。

(2) 建立物质点与背景网格点的对应关系。

(3) 形成固相与液相质量矩阵  $M_I^{s,t}$ 、 $M_I^{f,t}$  与阻尼

矩阵  $C_{IJ}^t$ 。

(4) 通过映射获得背景网格点的动量与速度

$$\begin{aligned} L_{il}^{s,t} &= \sum_{p=1}^{N_p} M_p^s \mathbf{U}_i^p N_I^{s,t} , \quad L_{il}^{f,t} = \sum_{p=1}^{N_p} M_p^f \mathbf{U}_i^p N_I^{f,t} , \\ \mathbf{U}_{il}^{s,t} &= L_{il}^{s,t} / M_I^{s,t} , \quad \mathbf{U}_{il}^{f,t} = L_{il}^{f,t} / M_I^{f,t} . \end{aligned}$$

(5) 分别计算网格点的内力、阻尼力与外力矢量,

$$F_{il,\text{int}}^t , F_{il,\text{damp}}^t \text{ 与 } F_{il,\text{ext}}^t , \text{ 更新位于网格点的动量}$$

$$\bar{L}_{il}^{s,t+\Delta t} = L_{il}^{s,t} + \Delta t F_{il}^{s,t} , \quad \bar{L}_{il}^{f,t+\Delta t} = L_{il}^{f,t} + \Delta t F_{il}^{f,t} .$$

(6) 更新物质点的速度与位置矢量

$$\mathbf{U}_i^{s+\Delta t} = \mathbf{U}_i^s + \Delta t \sum_{I=1}^{N_n} F_{il}^{s,t} N_I^{s,t} / M_I^{s,t} ,$$

$$\mathbf{U}_i^{f+\Delta t} = \mathbf{U}_i^f + \Delta t \sum_{I=1}^{N_n} F_{il}^{f,t} N_I^{f,t} / M_I^{f,t} ,$$

$$X_{ip}^{s,t+\Delta t} = X_{ip}^{s,t} + \Delta t \sum_{I=1}^{N_n} \bar{L}_{il}^{s,t+\Delta t} N_I^{s,t} / M_I^{s,t} ,$$

$$X_{ip}^{f,t+\Delta t} = X_{ip}^{f,t} + \Delta t \sum_{I=1}^{N_n} \bar{L}_{il}^{f,t+\Delta t} N_I^{f,t} / M_I^{f,t} .$$

(7) 将物质点速度  $\mathbf{U}_i^{s+\Delta t}$  与  $\mathbf{U}_i^{f+\Delta t}$  映射回背景网格点, 获得网格点新的速度矢量  $\mathbf{U}_{il}^{s,\text{end}}$  与  $\mathbf{U}_{il}^{f,\text{end}}$ :

$$\mathbf{U}_{il}^{s,\text{end}} = \frac{\sum_{p=1}^{N_p} M_p^s N_I^{s,t} \mathbf{U}_i^{s+\Delta t}}{M_I^{s,t}} , \quad \mathbf{U}_{il}^{f,\text{end}} = \frac{\sum_{p=1}^{N_p} M_p^f N_I^{f,t} \mathbf{U}_i^{f+\Delta t}}{M_I^{f,t}} .$$

计算固相与液相物质点的应变率  $\dot{\epsilon}_{ij}$  与  $\dot{\epsilon}_{ii}$ :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{N_n} [\mathbf{U}_{il}^{s,\text{end}} N_{I,j} + \mathbf{U}_{il}^{f,\text{end}} N_{I,i}] , \quad \dot{\epsilon}_{ii} = \sum_{I=1}^{N_n} \mathbf{U}_{il}^{s,\text{end}} N_{I,i} .$$

更新物质点的总应变  $e_{ij}^{t+\Delta t}$  与  $E_{ii}^{t+\Delta t}$ :

$$e_{ij}^{t+\Delta t} = e_{ij}^t + \Delta t \dot{\epsilon}_{ij} , \quad E_{ii}^{t+\Delta t} = E_{ii}^t + \Delta t \dot{\epsilon}_{ii} .$$

(8) 应用适当的本构模型, 更新饱和多孔介质的有效应力  $\sigma_{ij}^{t+\Delta t}$  与孔隙压强  $p^{t+\Delta t}$ 。

(9) 本时间步的相关计算完毕, 令  $t=t+\Delta t$ , 返回(2)步。

至此, 两相物质点方法已经介绍完毕。综合文献[1~2]所提出的传统物质点方法与文献[7]所发展的耦合物质点方法, 表1从不同方面给出了3者的异同之处。

### 3 数值算例

本节算例中, 饱和多孔介质的材料参数在表2中给出。并且在具体计算中, 不考虑重力影响, 忽略饱和多孔介质的初始应力与孔隙压强。

算例1 一维饱和土柱中波的传播问题

图2给出饱和土柱的几何与载荷信息, 其中土柱的横截面积为  $1 \text{ m}^2$ 。土柱右端自由, 左端固定。在本算例中, 每个背景网格中只有一对物质点。有限元解作为参考解, 将土柱剖分为80个单元。

表1 两相物质点方法、耦合物质点方法与传统物质点方法的比较

Table 1 Comparison among two-phase MPM, coupling MPM and original MPM

比较项目	传统物质点方法	两相物质点方法	耦合物质点方法
	分析对象	单相材料	多相材料 拥有物质点与背景网格两种空间离散形式
几何离散	每个子域对应一个物质点,代表单相材料	每个子域对应一对物质点,分别代表饱和多孔介质固体骨架与孔隙流体	每个子域对应一个物质点,代表饱和多孔介质混合体
控制方程	一个	两个( $u-U$ 方程)	两个( $u-p$ 方程)
时间积分方式		显式	
计算效率		传统物质点方法>耦合物质点方法>两相物质点方法	

表2 饱和多孔介质材料参数

Table 2 Material parameters of saturated porous media

$a$	$r_s$	$E^*$	$k$	$g_r^*$
1.0	$2.647 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$	$5 \times 10^7 \text{ Pa}$	$1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$	$10 \text{ N/kg}$
$n$	$r_f$	$n^*$	$Q$	
0.322	$1 \times 10^{-3} \text{ m/s}$	0.3	$5.055 \times 10^8 \text{ Pa}$	

注:  $E$  为杨氏模量,  $n$  为泊松比。

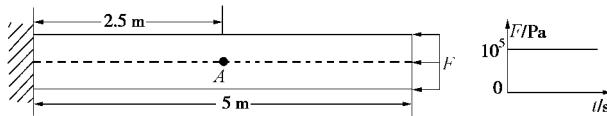


图2 一维饱和土柱

Fig. 2 One-dimensional saturated soil bar

首先, 将饱和土柱剖分为100对物质点。图3给出中点A的固相与液相位移时程曲线, 从中观察到明显的渗流现象——在轴向压力作用下, 土柱中固相与液相产生分离。图4给出A点孔隙压强时程曲线。为了研究不同剖分对计算结果的影响, 饱和土柱分别被剖分为60与100对物质点, 图5给出不同剖分情况下, 0.2秒时饱和土柱孔隙压强分布。通过比较图5中各条曲线发现, 对于一维弹性问题, 细致与粗糙剖分都得到较好的计算结果。

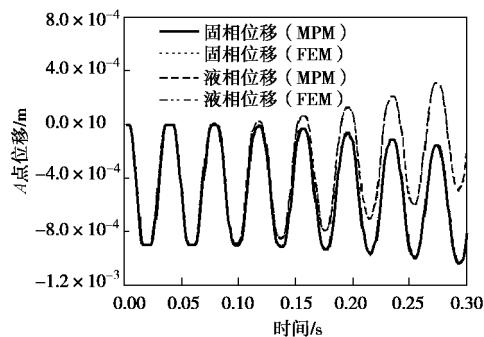


图3 A点固体骨架与孔隙流体位移时程曲线

Fig. 3 Displacements of solid skeleton and pore fluid at point A

图3~5中同时提供了有限元参考解, 比较有限元解与两相物质点方法解, 二者具有良好的一致性。从

而验证了所建立的两相物质点方法的在一维工况下的正确性。

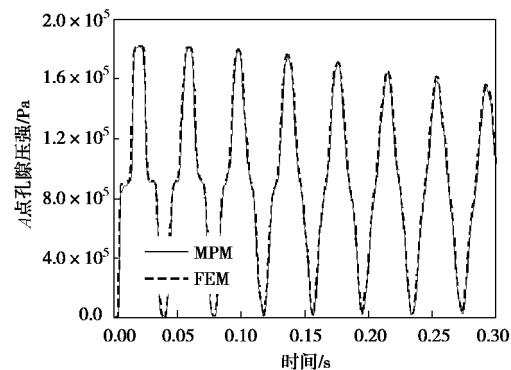


图4 A点孔隙压强时程曲线

Fig. 4 Pore pressure at point A

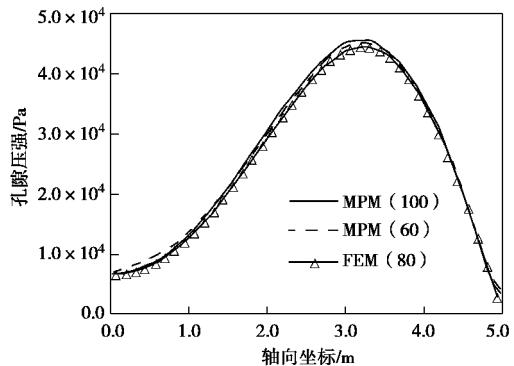


图5 0.2 s时饱和土柱孔隙压强分布

Fig. 5 Pore pressure along bar at 0.2 s

#### 算例2 二维饱和多孔介质的垂直加载问题

本算例考虑饱和多孔介质的平面应变问题, 图6

(a) 给出具体的几何、载荷与边界条件信息; 图7给出载荷的时程曲线。饱和多孔介质的初始构型与计算背景网格如图6(b)所示, 其中饱和多孔介质由 $80 \times 80$ 对物质点代表。本算例采用方形背景网格, 每个背景网格中含有 $2 \times 2$ 对物质点。有限元解仍然充当参考解, 具体将饱和多孔介质剖分为 $40 \times 40$ 个单元。

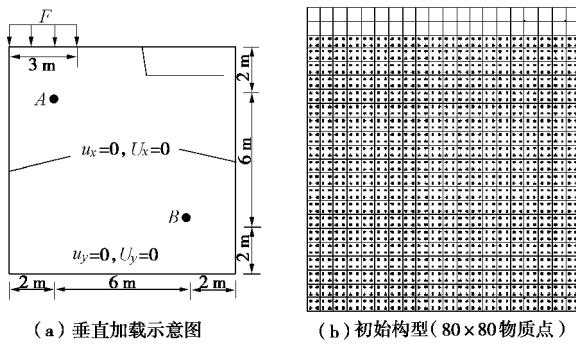


图 6 饱和多孔介质垂直加载与计算背景网格

Fig. 6 Vertical surface loading on a saturated soil panel

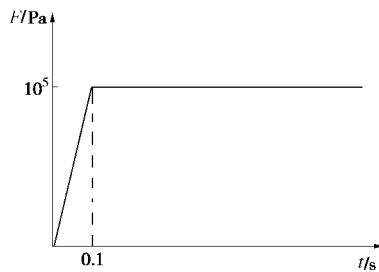


图 7 载荷时程曲线

Fig. 7 Load history on top surface

图8、9分别给出A点与B点固相与液相位移时程曲线;由于上表面载荷作用,从图中明显地观察到渗流现象。由于A点距加载点将较近,A点处的渗流现象尤为明显,如图8(a)所示。图10给出A点与B点的孔隙压强时程曲线。由于A与B两点间存在一定的距离,从图10中可明显地观察到波在饱和多孔介质中的传播现象。

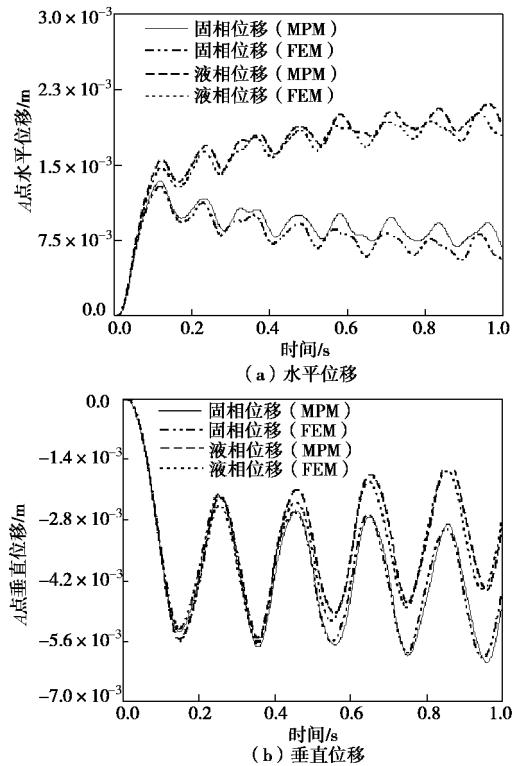


图 8 A 点固相与液相位移时程曲线

Fig. 8 Displacements of solid skeleton and pore fluid at point A

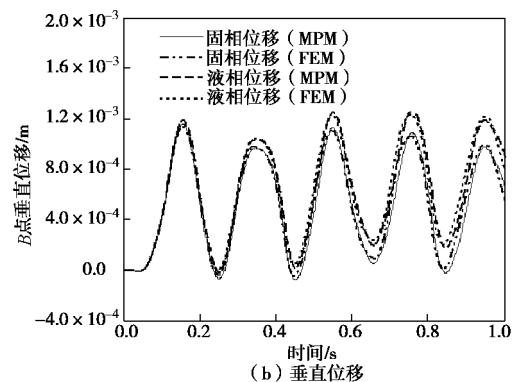
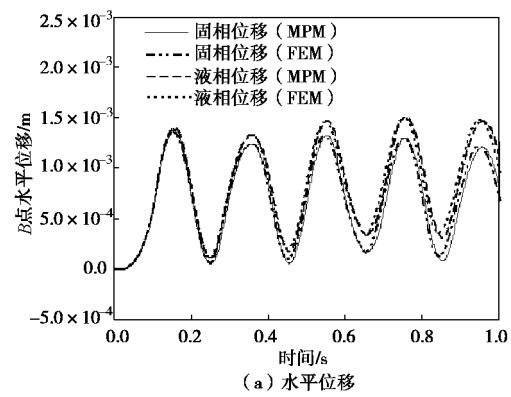


图 9 B 点固相与液相位移时程曲线

Fig. 9 Displacements of solid skeleton and pore fluid at point B

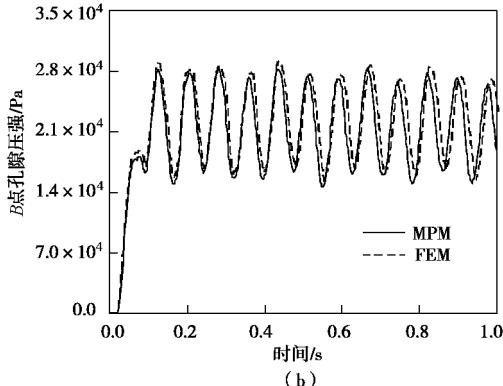
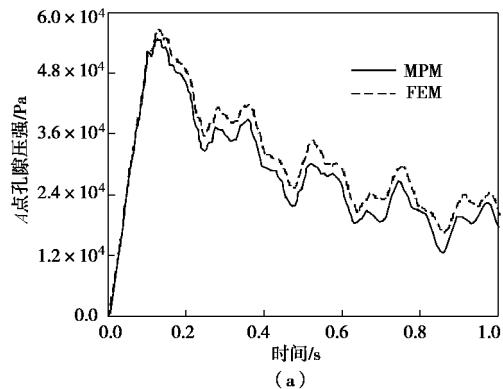


图 10 A 与 B 点孔隙压强时程曲线

Fig. 10 Pore pressures at point A and point B

图8~10中同时给出有限元参考解,通过比较图中各条曲线,两相物质点方法解与有限元解间存在很好

的一致性, 从而验证了本文提出的两相物质点方法对于饱和多孔介质二维平面应变问题的正确性。

为了研究剖分疏密对计算结果的影响, 将饱和多孔介质分别剖分为 $40 \times 40$ 、 $80 \times 80$ 对物质点。图11给出0.5 s时饱和多孔介质中孔隙压强的分布, 其中两幅为两相物质点方法解, 一幅为有限元参考解。通过比较发现, 两相物质点方法解与有限元解存在较好的一致性, 并且无论网格疏密都获得了较好的计算结果。

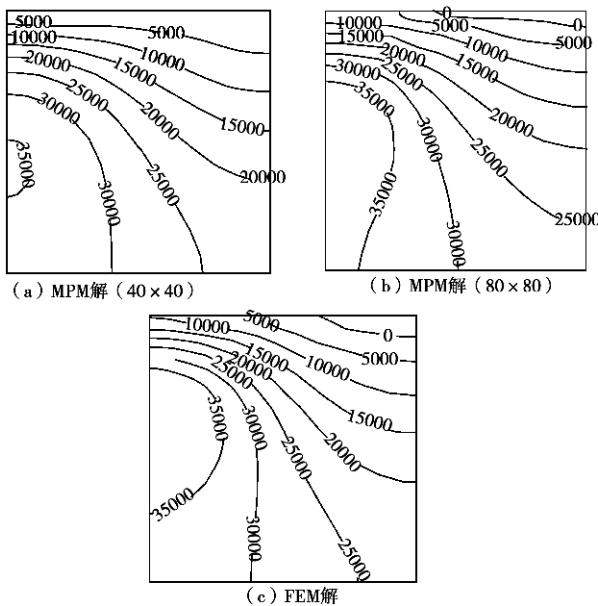


图 11 0.5 s 时饱和多孔介质孔隙压强分布

Fig. 11 Pore pressure contours at 0.5 s

## 4 结语

基于饱和多孔介质 $u-U$ 形式控制方程, 本文提出了用于饱和多孔介质力学分析的两相物质点方法, 通过引入两套物质点分别代表固体骨架变形与孔隙流体流动。本文推导了固相与液相物质点进行饱和多孔介质耦合分析的两相物质点方法公式, 并针对固相和

液相位移分别求解。本文同时进行了数值算例计算, 成功地模拟了饱和多孔介质中固体骨架与孔隙流体间的相互作用。通过同有限元解的比较, 验证了所提出的两相物质点方法的正确性与有效性。

致谢: 感谢美国密苏里大学 Chen Z 教授在物质点方法研究方面的多方面的建议与支持。

## 参考文献:

- [1] SULSKY D, CHEN Z, SCHREYER HL. A particle method for history-dependent materials[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1994, **118**: 179 – 196.
- [2] SULSKY D, ZHOU SJ, SCHREYER HL. Application of a particle-in-cell method to solid mechanics[J]. Comp Phys Comm, 1995, **87**: 236 – 252.
- [3] COETZEE C J, VERMEER P A. The modelling of anchors using the material point method[J]. Int J Numer Anal Meth Geomech, 2005, **29**: 879 – 895.
- [4] ZHOU S J, STORMONT J. Simulation of geomembrane response to settlement in landfills by using the material point method[J]. Int J Numer Anal Meth Geomech, 1999, **23**: 1977 – 1994.
- [5] BIOT M A. General theory of three-dimensional consolidation[J]. J Appl Phys, 1941, **12**: 155 – 164.
- [6] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in fluid saturated porous solid[J]. J Acoust Soc America, 1956, **28**: 168 – 191.
- [7] ZHANG H W, WANG K P, CHEN Z. Material point method for dynamic analysis of saturated porous media under external contact/impact of solid bodies[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2009, **198**: 1456 – 1472.