

# 基于最小势能原理的土钉支护结构位移解析解

王广冰<sup>1</sup>, 张远芳<sup>1\*</sup>, 高盟<sup>2,3</sup>, 高广运<sup>3</sup>

(1. 新疆农业大学水利与土木工程学院, 新疆 乌鲁木齐 830052; 2. 山东科技大学土木建筑工程学院岩土力学研究所, 山东 青岛 266510; 3. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092)

**摘要:** 土钉支护是一种经济便捷的基坑支护方式。以往的土钉支护结构的设计中, 多以强度为控制指标, 而很少考虑支护结构的变形。通过对土钉面层受力分析, 建立了其势能方程。基于最小势能原理推求了土钉支护基坑水平位移的闭合形式解。通过工程算例, 将结果分别与实测数据和数值解进行了对比。结果表明: 此解析解是合理可行的, 可以满足工程需要。

**关键词:** 基坑; 土钉支护; 最小势能原理; 闭合形式解

中图分类号: TU46.3

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2010)03-0415-05

**作者简介:** 王广冰(1981-), 女, 山东聊城人, 硕士研究生, 从事环境岩土工程方面的研究。E-mail: wangbing\_022@yahoo.com.cn。

## Analytical solution on the displacement of soil-nail braced structure based on the minimum potential energy principle

WANG Guang-bing<sup>1</sup>, ZHANG Yuan-fang<sup>1</sup>, GAO Meng<sup>2,3</sup>, GAO Guang-yun<sup>3</sup>

(1. College of Hydraulic and Civil Engineering, Xinjiang Agricultural University, Urumqi 830052, China; 2. Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, China; 3. Department of Geotechnical Engineering, School of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** Soil nailing is an economical and convenient bracing structure for foundation pits. In previous researches, the strength control is the main standard in the structural design of the soil-nail braced structure, but the deformation control is rarely considered. A closed-form solution for the horizontal displacement of the soil-nail braced structure is presented. An energy equation is established based on the mechanical characteristics of the surface layer. According to the principle of the minimum potential energy, a closed-form solution on the horizontal displacement of the soil-nail braced structure is derived. The results are validated through a comparison with a project case. It shows that this analytical solution is reasonable and feasible and can satisfy the engineering requirements.

**Key words:** foundation pit; soil nailing; minimum potential energy principle; closed-form solution

## 0 引言

土钉支护技术是70年代发展起来的一种基坑支护技术, 与传统的支护方法(桩锚、地连墙)相比, 具有工期短、结构轻巧、柔性大、施工简便等优点, 已成为一种常用的基坑支护方式。随着基坑深度的加大及环境条件的复杂化, 以强度和稳定性控制相结合为特征的设计方法已满足不了支护结构破坏的要求, 因而以变形控制设计作为支护设计的发展方向, 已引起众多岩土工程师的关注。

近年来, 许多学者提出了多种土钉支护结构的优化设计方法。如: 肖专文<sup>[1]</sup>(1999)通过模拟生物遗传化的过程, 克服了传统方法容易陷入局部最优值的缺点, 以单位长度土钉墙的土钉材料造价为优化的目

标函数, 提出了全优化算法, 并编制了基坑土钉支护优化设计的软件系统; 陈进杰<sup>[2]</sup>(2001)通过考虑土钉加固作用及土钉与土体的相互作用, 并模拟土钉施工过程, 选择能够反映开挖特点的土的本构关系, 建立有限元分析方法, 分析了支护参数对水平位移的影响; 贺可强<sup>[3]</sup>(2001)以极限平衡设计方法为基础, 基于遗传算法提出了一种土钉支护结构的优化设计方法。以上方法避免了一些由经验设计带来的土钉布置的不合理和材料的浪费, 但设计中均未考虑结构的变

基金项目: 新疆水利水电工程重点学科基金项目(xj zdsk-2002-10-05)

收稿日期: 2008-11-27

\*通讯作者

形。为此,高盟<sup>[4]</sup>等人采用有限元计算程序,将变形约束条件引入优化设计的过程,提出了强度和变形双向控制的概念。然而,结构的变形是通过数值计算完成的,实用性和通用性不够普遍。

本文通过对土钉面层受力特性的分析,建立其势能方程。基于最小势能原理推求了土钉支护基坑水平位移的解析解。通过工程算例,将本文结果分别与实测数据和数值解进行了对比,结果表明:本文的解答是合理可行的,可以满足工程需要。

## 1 土钉支护结构的变形与受力分析

### 1.1 土钉支护结构的变形

大量的实测数据<sup>[5]</sup>表明:土钉支护结构的面层变形具有明显的空间效应。在矩形基坑拐角处,面层水平位移较小或不发生位移,最大位移出现在基坑中部,同时随着基坑深度的加深,顶部位移越来越大,其面层变形位移的空间分布如图 1 所示。

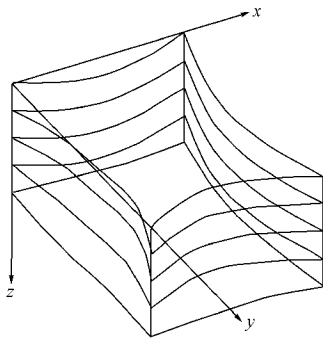


图 1 面层变形位移的空间分布图

Fig. 1 Spatial distribution of displacement of surface layer

基坑开挖后,面层有向下弯曲的趋势,设这个弯曲方程用式(1)表示<sup>[6-8]</sup>:

$$v = d_0 \sin \frac{\pi}{L} x \quad (1)$$

式中  $v$  为面层在长度和宽度所确定的平面向下的位移;  $x$  为计算点沿长度或宽度方向到基坑拐角的距离;  $L$  为基坑的长度或宽度;  $d_0$  为沿长度或宽度方向面层向下的最大位移。

面层向基坑内的变形模式简化如图 2 所示。

其变形曲线方程用式(2)表示<sup>[6-8]</sup>:

$$y = \frac{d_0}{2} \sin \frac{\pi}{L} x (1 + \cos \frac{\pi}{H} z) \quad (2)$$

上式  $x \in (0, L)$  或  $x \in (0, B)$ 。

并且式中,  $y$  为面层在距离基坑拐角任意点处向基坑内的位移,  $z$  为计算深度,  $H$  为基坑深度,  $L, B$  为基坑的长度和宽度, 其它符号同上。

### 1.2 面层受力特性分析

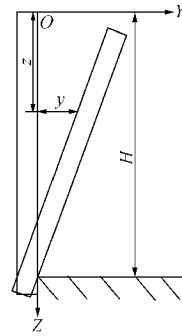


图 2 面层的变形模式简化图

Fig. 2 Sketch of deformation of surface layer

由于面层有钢筋网分布,可以把其看成一个弹性体。土钉面层主要受土钉的拉力、后侧土对它的主动土压力及自身重力。由于重力对它变形能影响不大,在此忽略不计,只考虑土钉拉力和主动土压力的作用,其受力简图如图 3 所示。

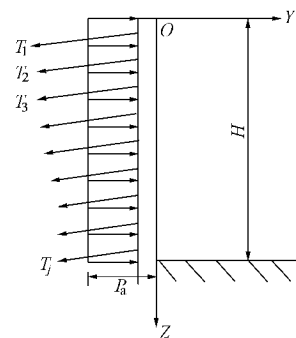


图 3 面层受力简图

Fig. 3 Forces acting on surface layer

#### (1) 面层土钉的拉力

文献[9]根据力的平衡原理,推导了土钉拉力的解析解。在此本文引用该解答,且假设土钉拉力毫无损失的传到面层,即土钉支护结构面层上土钉端点的拉力与结构破坏面上的土钉拉力相等。

土钉拉力:

$$\begin{aligned} f_j &= m d g (l - l_0) \cos q [z_j + \frac{\sin q}{2} (l + l_0)], \\ f'_j &= \frac{\pi d g}{2} (l - l_0) \sin q [z_j + \frac{\sin q}{2} (l + l_0)], \\ T_j &= f_j + f'_j \quad (3) \end{aligned}$$

式中  $T_j$  为土钉总抗拔力;  $f_j$  为第  $j$  排土钉钉土作用提供的抗拔力;  $f'_j$  为第  $j$  排土体自承作用产生的抗拔力;  $l_0$  为土钉端部至滑裂面与土钉交点处的长度;  $l$  为土钉长度;  $\theta$  为土钉倾角;  $d$  为土钉直径;  $\gamma$  为土的重度;  $\mu$  为钉、土之间的摩阻力系数;  $z_j$  为土钉埋深位置。

由于文献[9]中的坐标系与本文假设的位移坐标系不同,因此本文中的土钉拉力为

$$T_j = (f_j + f'_j) \cos q \quad (4)$$

## (2) 面层的主动土压力

作用于支护结构上的土压力, 工程中通常按朗金土压力理论计算。然而, 在基坑开挖过程中, 作用在支挡结构上的土、水压力等是随着开挖的进程逐步形成的, 其分布形式除与土性和地下水等因素有关外, 更重要的还与墙体的位移及位移方式有关。而位移性状随着支撑设置及每步开挖施工方式的不同而不同, 因此, 土压力并不完全处于静止和主动状态。有关实测资料表明: 当支护结构上有支锚时, 土压力分布一般呈上小、中间大的抛物线形状或更复杂的形状; 而当支护结构无支锚时, 墙体上端绕下端外倾, 才会产生一般呈直线分布的主动土压力。本文采用太沙基和佩克根据实测和模型试验结果提出的土压力分布形式<sup>[10]</sup>。面层受到的土压力与土的侧向压力大小相等, 方向相反, 如图4所示。

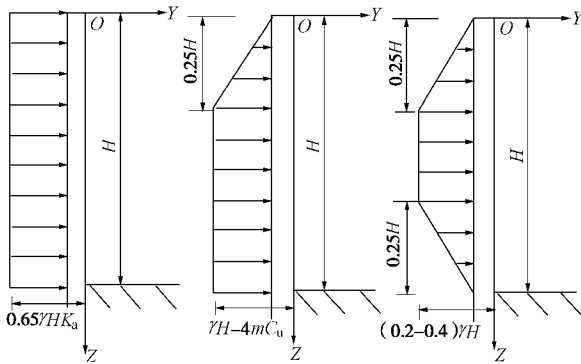


图4 面层土压力分布图

Fig. 4 Earth pressure distribution on the surface layer

其中,  $\gamma$  为土的重度 ( $\text{kN/m}^3$ );  $H$  为开挖深度 (m);  $m$  为修正系数, 一般情况下取1, 当基底以下软土层时, 取0.4;  $C_u$  为土的不排水抗剪强度 ( $\text{kPa}$ );  $k_a$  为主动土压力系数。

由于在土钉墙基坑中允许的位移倾斜是比较小的, 故在此论文中采用了矩形土压力模式。

面层受到的主动土压力:

$$P_a = 0.65gHk_a. \quad (5)$$

式中  $P_a$  为主动土压力;  $\gamma$  为土的重度;  $k_a$  为主动土压力系数。

## 2 能量分析

面层的总势能包括面层的弯曲应变能及主动土压力和土钉拉力的外势。

### 2.1 面层的弯曲应变能

$$u_z = \frac{1}{2} E_{ep} I \int_0^L \int_0^H y''^2 dx dz = \frac{E_{ep} I \pi^4 L}{32 H^3} d_0^2. \quad (6)$$

式中  $D$  为面层厚度;  $E_{ep}$  为面层的弹性模量;  $I$  为惯性矩 ( $I = LD^2/12$ )。其它符号意义同前。

### 2.2 土钉外势

$$u_d = - \sum_{j=0}^n T_j y = - \sum_{j=0}^n n T_j d_0 \left(1 - \frac{z_j}{H}\right), \quad (7)$$

$$\text{或 } u_d = - \sum_{j=0}^n T_j y = - \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n T_j d_0 \sin\left(\frac{\pi}{L} x_i\right) \left(1 - \frac{z_j}{H}\right).$$

为简化计算,  $n$  为一排土钉的根数, 其中  $y = d_0 \sin \frac{\pi}{L} x \left(1 - \frac{z_j}{H}\right)$  详见文献[6]。

### 2.3 主动土压力外势

$$\begin{aligned} u_{p_a} &= \int_0^L \int_0^H p_a y dx dz \\ &= \int_0^L \int_0^H 0.65gzk_a d_0 \sin \frac{\pi}{L} x \left(1 - \frac{z}{H}\right) dx dz \\ &= \frac{0.65k_a g d_0 L H^2 \times 2}{6\pi}. \end{aligned} \quad (8)$$

式中符号意义同前。

### 2.4 面层系统的总势能

$$\Pi = u_z + u_{p_a} + u_d, \quad (9)$$

由最小势能原理, 对式(9)取  $\frac{\partial \Pi}{\partial d_0} = 0$ , 得

$$\frac{E_{ep} I \pi^4 L}{16 H^3} d_0 = \sum_{j=0}^n n T_j \left(1 - \frac{z_j}{H}\right) - \frac{0.65k_a \times 2}{6\pi} g L H^2,$$

移项即得

$$d_0 = \frac{\sum_{j=0}^n n T_j \left(1 - \frac{z_j}{H}\right) - \frac{0.65k_a \times 2}{6\pi} g L H^2}{\frac{E_{ep} I \pi^4 L}{16 H^3}}, \quad (10)$$

所以得

$$y = \frac{\sum_{j=0}^n n T_j \left(1 - \frac{z_j}{H}\right) - \frac{0.65k_a \times 2}{6\pi} g L H^2}{\frac{E_{ep} I \pi^4 L}{2 \cdot 16 H^3}} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \left(1 + \cos \frac{\pi}{H} z\right).$$

## 3 工程实例

新疆乌鲁木齐市某高层建筑<sup>[11]</sup>, 其工程场区地层主要为砂质粉土和粉质黏土, 基坑垂直挖深 8.2 m。在基坑开挖过程中, 地层内的水平位移用测斜仪量测, 土钉拉力用应变钢筋计测试。土体、土钉和面层的计算参数根据试验场区岩土条件和试验资料确定。分析中采用的参数见表1和表2, 本文的计算结果与文献[11]的数值计算结果及实测结果的对比见表3。

由表可见: 根据最小势能原理推导的支护结构水平位移的解析解与实测结果和数值解基本一致。

表 1 土、土钉及面层力学特性参数

土层						土钉			面层		
$g$ /(kN·m <sup>-3</sup> )	$k_0$	$f_y$ /MPa	$E_{eq}$ /GPa	$\tau_{uk}$ /GPa	$\theta$ /(°)	$g$ /(kN·m <sup>-3</sup> )	$E_{eq}$ /GPa	$m$ /mm	$D$ /mm		
20	0.64	340	48	60	0	26	22	0.3	20		

表 2 非线性 E-B 模型参数

$c$ /kPa	$\varphi_1$ /(°)	$\Delta\varphi$ /(°)	$R_f$	$K$	$K_{ur}$	$n$	$K_b$	$m$
5	36	3	0.79	548	1370	0.5	360	0.3

表 3 计算结果比较

$S_h$ /m	$S_v$ /m	$d$ /mm	$l$ /m	$z_j$ /m	计算值 /mm	实测值 /mm	数值解 /mm	备注
1.1	1.3	20	7.5	1.3	9.3	8.5	6.3	土钉孔径 $D_1=100$ mm
1.1	1.3	20	8.0	2.6	7.7	6.8	6.1	
1.1	1.3	20	7.8	3.9	5.4	5.2	5.8	
1.1	1.3	20	6.0	5.2	2.9	4.7	5.2	
1.1	1.3	20	5.2	6.5	1.0	2.8	4.6	
1.1	1.3	20	4.6	7.8	0.1	1.2	0.5	

注：本算例中土钉支护结构的破坏面取直线破坏面，即破坏面与水平面的夹角是  $45^\circ/\varphi/2$ 。

4 参数分析

4.1 面层厚度对土钉支护结构水平位移的影响

图5为在原设计方案其他条件不变的情况下，将土钉支护的面层厚度设计为200 mm，300 mm时，分别计算3组方案设计时的位移。由图可见，土钉支护结构的水平位移随着面层厚度的增加而减少。因为面层厚度增加时，面层的抗弯刚度增大，从而使得支护结构的水平位移减少。结果还显示，面层厚度的增加与水平位移的增加成非线性关系，对位移变化比较敏感，因而进行土钉支护结构设计时要经济、合理的选择此参数。

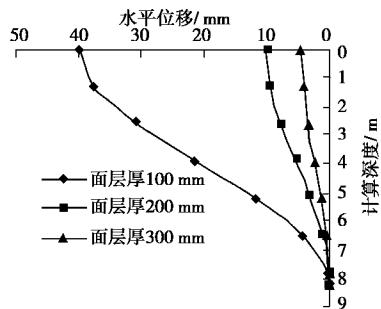


图 5 不同面层厚度与水平位移关系曲线

Fig. 5 Relationship between horizontal displacement and different thicknesses of soil-nail

4.2 土钉倾角对支护结构水平位移的影响

图6为在原设计方案其他条件不变的情况下，将土钉倾角分别设计为5°，10°，15°时，共4组方案分别计算，结果显示支护结构水平位移随着土钉倾角的增大而增大。由于面层的水平位移主要是由面层上的土钉拉应力产生，当土钉拉应力方向和位移方向一致时，水平位移最小，而当土钉倾角增大时，土钉与面层主应变方向偏离，从而使得土钉对面层水平变形的约束减弱，水平位移增大。

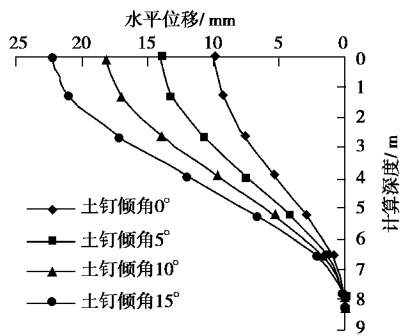


图 6 不同土钉倾角与水平位移关系曲线

Fig. 6 Relationship between horizontal displacement and different angles of soil-nail

4.3 土钉直径对支护结构水平位移的影响

图7为在原设计方案其他条件不变的情况下，将土钉直径设计为22 mm，25 mm时，分别计算3组设计方案时的位移。结果显示支护结构水平位移随着土钉直径的增大而增大，但此参数对位移的影响与前两者相比相对较小。

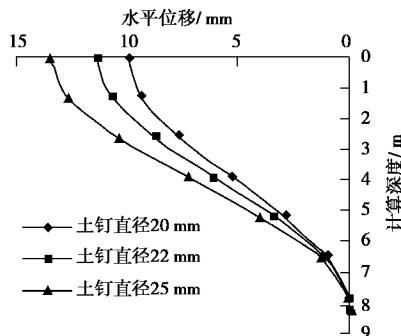


图 7 不同土钉直径与水平位移关系曲线

Fig. 7 Relationship between horizontal displacement and different diameters of soil-nail

5 结 论

- (1) 本文根据土钉支护结构面层的受力特性，建立其势能方程。并根据最小势能原理推导了支护结构水平位移的解析表达式。
- (2) 利用导出的解析表达式，分析了土钉支护参数对支护结构水平位移的影响。结果表明：面层的厚

度和土钉的倾角对土钉支护结构水平位移均有较大的影响,土钉直径对支护结构水平位移的影响相对较小。因而在实际工程的设计中,要经济、合理的选择设计参数,以达到优化设计的目的。

(3)通过工程实例对推求的解析表达式进行了验证,结果表明:本文的结果与实测结果基本一致。

### 参考文献:

- [1] 肖专文, 龚晓南, 谭昌明. 基坑土钉支护优化设计的遗传算法[J]. 土木工程学报, 1999, **32**(3): 73 - 80. (XIAO Zhuan-wen, GONG Xiao-nan, TAN Chang-ming. Genetic algorithm for optimal design of soil nailing for deep excavations[J]. China Civil Engineering Journal, 1999, **32**(3): 73 - 80. (in Chinese))
- [2] 陈进杰, 贾金青, 张明聚. 土钉支护工作性能参数分析[J]. 岩土工程学报, 2001, **23**(5): 618 - 622. (CHEN Jin-jie, JIA Jin-qing, ZHANG Ming-ju. Parametric studies on behaviors of soil nailing[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, **23**(5): 618 - 622. (in Chinese))
- [3] 贺可强, 阳吉宝, 王胜利. 遗传算法在土钉支护结构优化设计中的应用[J]. 岩土力学, 2001, **23**(5): 73 - 80. (HE Ke-qiang, YANG Ji-bao, WANG Sheng-li. Application of genetic algorithms in the optimizaion of soil-nail bracing[J]. Rock and Soil Mechanics, 2001, **23**(5): 73 - 80. (in Chinese))
- [4] 高 盟, 高广运, 张远芳. 土钉支护结构优化设计的有限元分析[J]. 岩土力学, 2007, **28**(11): 2463 - 2464. (GAO Meng, GAO Guang-yun, ZHANG Yuan-fang. Three-dimensional finite element analysis of structure optimal design in soil nailing[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, **28**(11): 2463 - 2464. (in Chinese))
- [5] 俞建霖, 龚晓南. 深基坑工程的空间性状分[J]. 岩土工程学报, 1999, **21**(1): 23 - 24. (YU Jian-lin, GONG Xiao-nan. Spatial behavior analysis of deep excavation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1999, **21**(1): 23 - 24. (in Chinese))
- [6] 许锡昌, 陈善雄, 徐海滨. 悬臂排桩支护结构空间变形分析[J]. 岩土力学, 2005, **26**(11): 185 - 186. (XU Xi-chang, CHEN Shan-xiong, XU Hai-bin. Spatial deformation analysis of cantilever soldier pile retaining structure in deep foundation pit[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, **26**(11): 185 - 186. (in Chinese))
- [7] 舒文超. 水泥搅拌桩 - 压顶梁支护结构空间变形分析[J]. 岩土力学, 2003, **24**(4): 557 - 560. (SHU Wen-chao. Analysis of spatial deformation forcement mixing piles-ring beam supporting structure[J]. Rock and Soil Mechanics, 2003, **24**(4): 557 - 560. (in Chinese))
- [8] 刘兴旺, 益德清, 施祖元. 基坑开挖地表沉陷理论分析[J]. 土木工程学报, 2000, **33**(4): 51 - 55, 60. (LIU Xing-wang, YI De-qin, SHI Zu-yuan. Theoretic alanalysis of surface settlement during excavation[J]. China Civil Engineering Journal, 2000, **33**(4): 51 - 55, 60. (in Chinese))
- [9] 丁振明, 秦四清, 刘 军, 等. 土钉支护体系抗拔力机理研究[J]. 岩土力学, 2005, **26**(11): 1799 - 1801. (DING Zhen-ming, QIN Si-qing, LIU Jun, et al. Research on anti-pulling mechanism in soil-nailing supporting system[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, **26**(11): 1799 - 1801. (in Chinese))
- [10] 赵明华, 俞 晓, 王贻荪. 土力学与基础工程[M]. 武汉: 武汉理工大学出版社, 2007: 274 - 275. (ZHAO Ming-hua, YU Xiao, WANG Yi-sun. Soil mechanics and foundation engineering[M]. Wuhan: Wuhan University of Technology Press, 2007: 274 - 275. (in Chinese))
- [11] 高 盟, 张远芳. 基于有限元分析的土钉支护优化设计的复合形算法[J]. 岩土工程学报, 2006, **28**(8): 1010 - 1012. (GAO Meng, ZHANG Yuan-fang. Complex algorithms for optimal design of structure in soil nailing based on three-dimensional finite element analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, **28**(8): 1010 - 1012. (in Chinese))