

边坡的弹塑性有限元可靠度分析

谭晓慧¹, 王建国²

(1. 合肥工业大学资源与环境工程学院, 安徽 合肥 230009; 2. 合肥工业大学土建工程学院, 安徽 合肥 230009)

摘 要: 以弹塑性有限元理论和可靠度理论为基础, 基于偏微分技术及增量初应力法, 对采用 Mohr-Coulomb 屈服准则的边坡土体进行了弹塑性随机有限元可靠度分析, 比较了基于强度折减法法和基于滑面应力分析的弹塑性随机有限元分析法的异同: 前者编程简单, 可利用现有大型有限元计算软件计算边坡的整体可靠指标, 但不能确定边坡中相应的潜在滑动面的位置, 计算量较大, 运算速度较慢; 后者可以同时求出边坡的整体可靠指标及潜在滑动面的位置, 运算速度快, 但编程复杂。文中还研究了基于滑面应力分析的弹塑性随机有限元可靠度分析方法中滑面可靠指标的 4 种计算方法, 比较了不同功能函数形式对边坡可靠指标及滑面位置的影响, 指出采用考虑滑面方向的功能函数形式来求解可靠指标的方法 3 与基于强度折减法的可靠度分析本质相同, 较为合理。

关键词: 边坡; 弹塑性有限元; 可靠度分析; 可靠指标; 强度折减法; 应力分析

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2007)01-0044-07

作者简介: 谭晓慧(1971-), 女, 安徽宣城人, 副教授, 博士研究生, 主要从事岩土工程可靠度研究。E-mail: israining2000@yahoo.com.cn。

Slope reliability analysis using elasto-plastic finite element method

TAN Xiao-hui¹, WANG Jian-guo²

(1. School of Resources and Environmental Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 2. School of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: Based on the theory of elasto-plastic finite element and reliability analysis, the slope reliability index was studied by using partial differential technique and the incremental initial stress method. During the FEM analysis, the soil mass was assumed to be realistic elasto-plastic and Mohr-Coulomb yield criterion was adopted. Two methods of elasto-plastic FEM analysis were studied and compared—one was based on the technique of Strength Reduction Method (SRM) and the other was based on the technique of Sliding surface Stress Analysis (SSA). It was concluded that the former was simple in programming and could make use of some software. Although it could get the reliability index of the whole slope, it could not calculate the location of the corresponding sliding surface, which was very important in slope stability analysis. The later, however, could give the reliability index and the corresponding sliding surface, and it ran faster than the former, but it was very complicated in coding. In the analysis of the later case, four methods of calculating the reliability index of the sliding surface and the influences of the limit state function to the reliability index and the location of the sliding surface were discussed. It was concluded that method No.3, which could consider the direction of the sliding surface, was the same as the method based on SRM substantially and was the best one among the four methods.

Key words: slope; elasto-plastic finite element method; reliability analysis; reliability index; strength reduction method; stress analysis

0 引 言

边坡稳定性分析是岩土工程中一个很重要的研究课题。常用的边坡稳定性分析方法有极限平衡法^[1-4]、有限元法^[5-8]等, 其中有限元法由于能全面满足静力许可、应变相容及应力应变之间的本构关系, 因而是一种比较理想的分析边坡应力、变形和稳定性的方法。传统的边坡有限元分析法是在边坡中定义一个潜在的

滑动面, 根据有限元得出的应力分布, 计算滑动面上各点的应力水平, 然后根据加权平均的原则求解安全系数。近年来, 基于强度折减法的边坡稳定性计算也

基金项目: 安徽省水利厅科研项目; 安徽省教育厅青年教师科研资助项目 (2005jq1021)

收稿日期: 2005-10-25

受到了重视^[9-11]。

由于边坡工程中存在种种不确定性, 因而需要进行边坡稳定的可靠度分析。目前, 进行边坡有限元可靠度分析的方法主要是基于有限元的应力分析结果而进行的“点”可靠度计算, 如文献[12, 13]都只计算了各积分点或单元上的可靠指标, 未能给出边坡的整体可靠指标。而边坡的整体可靠指标在进行边坡的设计及稳定性评价时非常重要, 如何由各单元的可靠指标来求边坡的整体可靠指标还需进行一步研究。

为了计算边坡的整体可靠指标, 本文假定边坡体为Mohr-Coulomb理想弹塑性材料, 提出基于强度折减法(Strength Reduction Method, 简称SRM)的边坡弹塑性有限元可靠度分析法; 利用偏微分技术及增量初应力法, 探讨基于滑面应力分析(Sliding surface Stress Analysis, 简称SSA)的边坡弹塑性有限元可靠度分析法中滑面可靠指标的计算方法及功能函数的选择。最后, 分析比较二者的异同点。

1 基于强度折减法(SRM)的边坡弹塑性有限元可靠度分析

1.1 边坡稳定分析的有限元强度折减法

有限元强度折减法的基本原理是将岩土体参数 c , ϕ , ϕ' 值同时除以一个折减系数 F_s , 得到一组新的值 c^1 , ϕ^1 , ϕ'^1 , 然后以 c^1 , ϕ^1 , ϕ'^1 作为新的材料参数代入有限元程序进行试算。当计算至刚好不收敛时, 对应的 F_s 值就是边坡的最小安全系数。对 c 、 ϕ 、 ϕ' 值的具体折减公式如下:

$$c^1 = c/F_s, \quad (1a)$$

$$\phi^1 = \arctan(\tan\phi/F_s), \quad (1b)$$

$$\phi'^1 = \arctan(\tan\phi'/F_s). \quad (1c)$$

1.2 基于强度折减的边坡稳定有限元可靠度分析

在进行可靠度分析之前, 必需先确定相应的极限状态函数(即: 功能函数)的型式。由于有限元强度折减法可以求出边坡的整体安全系数, 因此可取相应的极限状态函数的型式为

$$Z = g(X) = F_s(X_1, X_2, \dots, X_n)^{-1}, \quad (2)$$

式中, F_s 为边坡的安全系数, 它是基本变量 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的隐函数, 由强度折减法求得。

因为边坡可靠指标 β 的计算只与极限状态函数值 Z 及其对基本变量的偏导数有关, 并不需要写出极限状态函数的显式, 因此, 只需由边坡稳定分析的有限元强度折减法求出边坡的安全系数 F_s , 再由数值法(如差分法、有理多项式法等)^[14]求出功能函数对基本变量的偏导数, 就可求出边坡的整体可靠指标。该方法简单实用, 可利用各种现有大型软件包进行计算, 缺

点是上述计算过程无法计算出边坡中潜在滑动面的位置。

1.3 一阶可靠度分析方法

在各种可靠度分析方法中, 最常用的是一阶可靠度方法, 其中又分为中心点法和验算点法^[15]。

当采用中心点法进行可靠度分析时, 其计算公式如下:

$$\mu_Z = g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}), \quad (3a)$$

$$\sigma_Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial g(\mu_X)}{\partial X_i} \frac{\partial g(\mu_X)}{\partial X_j} \rho_{X_i X_j} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \right]^{1/2}, \quad (3b)$$

$$\beta = \mu_Z / \sigma_Z. \quad (3c)$$

当采用验算点法计算可靠度分析时, 可靠指标的计算需要按下述方程组进行迭代求解:

$$x_i^* = \mu_{X_i} + \alpha_{X_i} \beta \sigma_{X_i}, \quad (4a)$$

$$\alpha_{X_i} = - \frac{\sum_{k=1}^n \frac{\partial g(x^*)}{\partial X_k} \rho_{X_i X_k} \sigma_{X_k}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g(x^*)}{\partial X_i} \frac{\partial g(x^*)}{\partial X_j} \rho_{X_i X_j} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j}}}, \quad (4b)$$

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(x^*)}{\partial X_i} (x_i^* - \mu_{X_i})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g(x^*)}{\partial X_i} \frac{\partial g(x^*)}{\partial X_j} \rho_{X_i X_j} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j}}}. \quad (4c)$$

式中 $\rho_{X_i X_j}$ 为变量 X_i , X_j 间的相关系数; μ_{X_i} , σ_{X_i} ($i=1, 2, \dots, n$) 分别为基本变量 X_i 的均值和均方差; μ_Z , σ_Z 分别为功能函数 Z 的均值和均方差, β 为可靠指标; $\frac{\partial g(\mu_X)}{\partial X_i}$ 及 $\frac{\partial g(x^*)}{\partial X_i}$ 分别表示功能函数在均值点 μ_X 及验算点 x^* 处求导数。

2 基于滑面应力分析(SSA)的边坡弹塑性有限元可靠度分析

目前, 进行边坡有限元可靠度分析的方法主要是基于有限元的应力分析结果而进行的“点”可靠度计算, 其分析结果主要是各积分点或单元的可靠指标、破坏概率及其等值线, 并由此进行边坡稳定的定性分析。本文重点在于分析滑面可靠指标的计算方法。

2.1 基本原理

随机有限元分析的实质是在有限元分析的基础上, 考虑各种计算参数的随机性, 计算由于参数的变异性而引起的响应的变异性, 它与定值法有限元分析的主要不同在于它在弹塑性有限元的基础上加入了计算位移、应力对随机变量的偏导^[13, 16]。计算出偏导之后, 再根据功能函数和可靠度理论求解单元及边坡潜在滑面的可靠指标。本文假定边坡体为Mohr-Coulomb

理想弹塑性材料, 其屈服函数形式为

$$F = \sigma_m \sin \varphi + \sqrt{J_2} (\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \varphi) - c \cos \varphi, \quad (5)$$

$$\text{则} \quad \frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial F(X, \sigma^*)}{\partial X} + \frac{\partial F(X^*, \sigma)}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial X}, \quad (6)$$

式中, σ_m , J_2 及 θ 为应力的 3 个不变量, c , φ 为黏聚力及内摩擦角, X 为基本变量, σ 为应力向量, 上标*表示在求导时取常数。

本文采用偏微分法计算位移、应力对随机变量的偏导, 弹塑性随机有限元采用增量初应力法。

由于增量初应力法的迭代格式可写为^[17]

$$K_0 \Delta u_i^k = \Delta F^k + \Delta R_{i-1}^k, \quad (7)$$

式中, K_0 为弹性刚度矩阵, Δu_i^k 为第 k 级荷载增量下第 i 次迭代时的位移增量, ΔF^k 为第 k 级荷载增量下的外力增量, ΔR_{i-1}^k 第 k 级荷载增量下第 $i-1$ 次迭代后的体力增量(由初应力 $\Delta \sigma_{0i-1}^k$ 产生的等效荷载)。其中, K_0 和 ΔR_{i-1}^k 的计算公式为

$$K_0 = \sum_e \int_{V_e} B^T D^e B dV, \quad (8)$$

$$\Delta R_{i-1}^k = - \sum_e \int_{V_e} B^T \Delta \sigma_{0i-1}^k dV, \quad (9)$$

式中, B , D^e 分别为应变矩阵及弹性矩阵。

根据上述公式, 可得基于增量初应力法的随机有限元的主要迭代步骤如下。

(1) 赋初值, 组装弹性刚度矩阵 K_0 及其偏导矩阵 $\partial K_0 / \partial X$ 。由式 (8) 可得

$$\frac{\partial K_0}{\partial X} = \sum_e \int_{V_e} B^T \frac{\partial D^e}{\partial X} B dV. \quad (10)$$

(2) 对第 k 级荷载增量的第 i 次迭代, 求位移增量 Δu_i^k 及其偏导 $(\partial \Delta u / \partial X)_i^k$ 。由式 (7) 可得

$$\Delta u_i^k = K_0^{-1} (\Delta F^k + \Delta R_{i-1}^k). \quad (11)$$

对式 (7) 两边同时求导, 可得

$$K_0 \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial X} \right)_i^k + \frac{\partial K_0}{\partial X} \Delta u_i^k = \left(\frac{\partial \Delta F}{\partial X} \right)_i^k + \left(\frac{\partial \Delta R}{\partial X} \right)_{i-1}^k,$$

因此,

$$\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial X} \right)_i^k = K_0^{-1} \left[\left(\frac{\partial \Delta F}{\partial X} \right)_i^k + \left(\frac{\partial \Delta R}{\partial X} \right)_{i-1}^k - \frac{\partial K_0}{\partial X} \Delta u_i^k \right]. \quad (12)$$

(3) 计算各单元的弹性应力增量 $(\Delta \sigma^{el})_i^k$ 、当前应力值 σ_i^k 及其偏导 $(\partial \Delta \sigma^{el} / \partial X)_i^k$ 、 $(\partial \sigma / \partial X)_i^k$:

$$(\Delta \sigma^{el})_i^k = D^e B \Delta u_i^k, \quad (13)$$

$$\sigma_i^k = \sigma^{k-1} + (\Delta \sigma^{el})_i^k, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta \sigma^{el}}{\partial X} \right)_i^k = \frac{\partial D^e}{\partial X} B \Delta u_i^k + D^e B \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial X} \right)_i^k, \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial X} \right)_i^k = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial X} \right)^{k-1} + \left(\frac{\partial \Delta \sigma^{el}}{\partial X} \right)_i^k. \quad (16)$$

(4) 按 Mohr-Coulomb 条件判断单元是否进入塑性屈服。若屈服, 则计算相应的塑性矩阵 D^p , 初应力

$(\Delta \sigma_0)_i^k$, 体力增量 $(\Delta R)_i^k$ 及其偏导 $\partial D^p / \partial X$, $(\partial \Delta \sigma_0 / \partial X)_i^k$, $(\partial \Delta R / \partial X)_i^k$:

$$D^p = \frac{D^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D^e}{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma}}, \quad (17)$$

$$(\Delta \sigma_0)_i^k = -D^p B \Delta u_i^k, \quad (18)$$

$$\Delta R_i^k = - \sum_e \int_{V_e} B^T (\Delta \sigma_0)_i^k dV, \quad (19)$$

$$\frac{\partial D^p}{\partial X} = \frac{\partial D^p(X, \sigma_i^{k-1})}{\partial X} + \frac{\partial D^p(X^*, \sigma_i^k)}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial X} \right)_i^k, \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta \sigma_0}{\partial X} \right)_i^k = - \left[\frac{\partial D^p}{\partial X} B \Delta u_i^k + D^p B \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial X} \right)_i^k \right], \quad (21)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta R}{\partial X} \right)_i^k = - \sum_e \int_{V_e} B^T \left(\frac{\partial \Delta \sigma_0}{\partial X} \right)_i^k dV, \quad (22)$$

式中, F , Q 分别为屈服函数及塑性势函数。

对于首次由弹性状态过渡到塑性状态的单元, 需对塑性矩阵进行修正, 得

$$(\Delta \sigma_0)_i^k = -m D^p B \Delta u_i^k, \quad (23)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta \sigma_0}{\partial X} \right)_i^k = - \left[m \frac{\partial (D^p B \Delta u_i^k)}{\partial X} + \frac{\partial m}{\partial X} D^p B \Delta u_i^k \right], \quad (24)$$

式中, 系数 m 可由如下公式求得

$$m = \frac{F(\sigma_i^k)}{F(\sigma_i^k) - F(\sigma^{k-1})}. \quad (25)$$

(5) 计算本次迭代后的应力增量 $\Delta \sigma_i^k$ 及其偏导 $(\partial \Delta \sigma / \partial X)_i^k$:

$$\Delta \sigma_i^k = (\Delta \sigma^{el})_i^k + (\Delta \sigma_0)_i^k, \quad (26)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial X} \right)_i^k = \left(\frac{\partial \Delta \sigma^{el}}{\partial X} \right)_i^k + \left(\frac{\partial \Delta \sigma_0}{\partial X} \right)_i^k. \quad (27)$$

(6) 重复 (2) ~ (5) 直至所有单元收敛至精度要求, 计算本级荷载增量下的位移 u^k , 应力 σ^k 及其偏导 $(\partial u / \partial X)^k$, $(\partial \sigma / \partial X)^k$, 再施加下一级荷载, 直至所有的荷载增量计算完为止:

$$u^k = u^{k-1} + \Delta u_i^k, \quad (28)$$

$$\sigma^k = \sigma^{k-1} + \Delta \sigma_i^k, \quad (29)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^k = \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^{k-1} + \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial X} \right)_i^k, \quad (30)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial X} \right)^k = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial X} \right)^{k-1} + \left(\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial X} \right)_i^k. \quad (31)$$

2.2 功能函数形式的确定

由图 1 所示的莫尔圆与抗剪强度线的相对位置关系可以确定相应的功能函数形式。对于某一有限单元, 若不知潜在滑面的方向, 则其最可能的破坏方向是 B 点所代表的方向, 相应的功能函数可取为

$$Z = AC - AB = c \cos \varphi - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \sin \varphi - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (32a)$$

式中, σ_1 , σ_3 分别为单元的最大及最小主应力。上

式亦可写为应力分量 σ_x , σ_y , τ_{xy} 的函数, 即

$$Z = c \cos \varphi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin \varphi - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (32b)$$

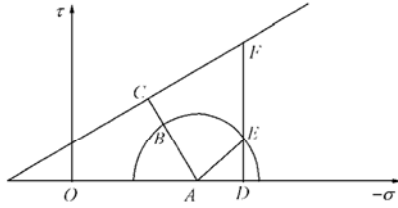


图 1 莫尔 - 库仑屈服条件

Fig. 1 Mohr-Coulomb yield criterion

当已知单元中潜在滑面的方向时 (假设为图中 E 点所代表的滑面方向), 则相应的功能函数可取为

$$Z = DF - DE = \tau_f - \tau = -\sigma_n \tan \varphi + c - \tau \quad (33a)$$

式中应力以受拉为正。其中

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (33b)$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (33c)$$

式中, α 为潜在滑面的倾角。

2.3 单元可靠指标的计算

在计算所有单元的可靠指标时, 由于滑面方向未知, 故只可取形如式 (32b) 的功能函数形式, 其可靠度的计算方法与一般的可靠度计算方法类似。例如, 当采用中心点法时, 单元可靠指标的计算公式为

$$\beta_i = \mu_{zi} / \sigma_{zi} \quad (34)$$

式中, $i=1, \dots, n$, n 为有限单元的个数, μ_{zi} , σ_{zi} 分别为第 i 单元功能函数的均值和均方差, 可参考式 (3) 求解。此时,

$$\frac{\partial Z_i}{\partial X} = \frac{\partial g_i(X, \sigma)}{\partial X} = \frac{\partial g_i(X, \sigma^*)}{\partial X} + \frac{\partial g_i(X^*, \sigma)}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial X} \quad (35a)$$

设应力 $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^T$, 基本变量 $X = (c, \varphi, \phi, \gamma, E, \mu)^T$ ($c, \varphi, \phi, \gamma, E, \mu$ 分别为黏聚力、内摩擦角、膨胀角、重度、弹性模量、泊松比), 则对于第 i 单元, 功能函数对基本变量的导数为

$$\frac{\partial g_i(X, \sigma^*)}{\partial X} = \{\cos \varphi, -c \sin \varphi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cos \varphi, 0, 0, 0, 0\}^T \quad (35b)$$

$$\frac{\partial g_i(X^*, \sigma)}{\partial \sigma} = \left\{ -\frac{\sin \varphi}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}, -\frac{\sin \varphi}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}, \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \right\} \quad (35c)$$

2.4 滑面可靠指标的计算

边坡稳定可靠度分析的目的之一是得到边坡中最小可靠指标及其滑面位置, 本文采用与定值法中求解边坡最小安全系数相同的方法来求边坡的最小可靠指

标, 即: 先假定一个滑动面, 求解此滑面的可靠指标; 再用简单枚举法或各种优化方法搜索整个边坡的最小可靠指标。因此, 滑面可靠指标的求解很重要。本文探讨如下几种由随机有限元计算结果求解滑面可靠指标的方法。

(1) 方法 1: 取单元功能函数 Z_i 为不考虑滑面方向的式 (32b), 并设滑面功能函数

$$Z = \sum_{i=1}^m Z_i \Delta l_i \quad (36a)$$

$$\mu_Z = \sum_{i=1}^m \mu_{zi} \Delta l_i \quad (36b)$$

$$\sigma_Z = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \Delta l_i \Delta l_j \sigma_{zi} \sigma_{zj} \rho_{zi, zj} \right)^{1/2} \quad (36c)$$

式中, m 为滑弧上的单元个数; Δl_i 、 Z_i 、 μ_{zi} 、 σ_{zi} 分别为第 i 单元切割的滑弧长度、功能函数、功能函数的均值及均方差, $\rho_{zi, zj}$ 为功能函数 Z_i 、 Z_j 间的相关系数, 可由下式计算^[18]:

$$\rho_{zi, zj} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \alpha_{jk} \quad (37a)$$

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial Z_i / \partial X_k}{\left(\sum_{k=1}^n (\partial Z_i / \partial X_k)^2 \sigma_{X_k}^2 \right)^{1/2}} \quad (37b)$$

(2) 方法 2: 取单元功能函数 Z_i 为不考虑滑面方向的式 (32b), 设滑面可靠指标为滑面上各单元可靠指标对滑弧长度的加权平均, 则

$$\beta = \sum_{i=1}^m \beta_i \Delta l_i / \sum_{i=1}^m \Delta l_i \quad (38)$$

式中, β_i 的计算与方法 1 的计算相同。

(3) 方法 3、4: 在求解滑面可靠指标时, 对于某一固定滑面, 其上各单元的滑动方向已知, 因此单元功能函数 Z_i 可取为考虑滑面方向的式 (33a), 则

$$\frac{\partial g_i(X, \sigma^*)}{\partial X} = \left\{ 1, -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \sec^2 \varphi, 0, 0, 0, 0 \right\}^T \quad (39a)$$

$$\frac{\partial g_i(X^*, \sigma)}{\partial \sigma} = \left\{ -\frac{1}{2}[(1 - \cos 2\alpha) \tan \varphi + \sin 2\alpha], -\frac{1}{2}[(1 + \cos 2\alpha) \tan \varphi - \sin 2\alpha], -\sin 2\alpha \tan \varphi - \cos 2\alpha \right\} \quad (39b)$$

基于上述理论分析, 本文用 FORTRAN 语言编写了边坡弹塑性随机有限元可靠度计算程序, 并将相应的计算结果输出至数据文件中, 以便进行绘图、结果分析等后处理。

3 算例分析

有一坡比为 1:1 的均质土坡, 高 $H=20$ m, 黏聚

力 $c=40$ kPa, 内摩擦角 $\varphi=20^\circ$, 膨胀角 $\psi=20^\circ$, 重度 $\gamma=20$ kN/m³, 弹性模量 $E=20$ MPa, 泊松比 $\mu=0.3$ ^[19]。设 c, φ 为相互独立的正态基本变量, 其余参数为定值。有限元计算采用 8 节点四边形网格, 共划分个 331 节点, 94 个单元。约束条件是底边界固定, 两侧边界水平约束。土体采用 Mohr-Coulomb 理想弹塑性模型。

3.1 计算结果及分析

按照前述理论分析, 笔者对该例题进行了基于强度折减及基于滑面应力分析的有限元可靠度计算。计算时分别假定 c, φ 的变异系数 δ_c, δ_φ 为 0.1、0.2、0.3, 计算结果如图 2~5 所示。

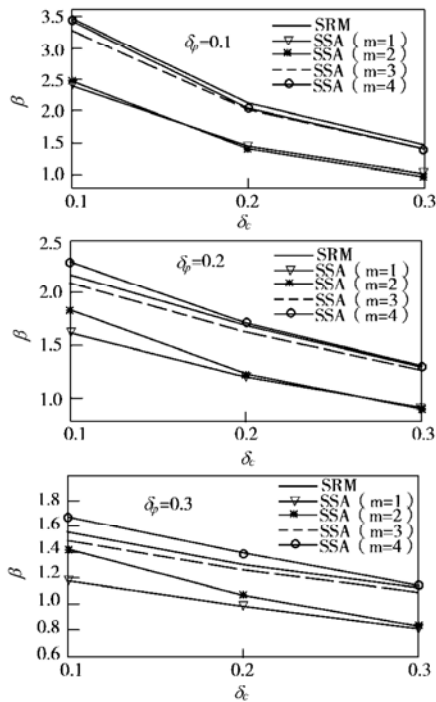


图 2 可靠指标与变异系数的关系 (MFORM)

Fig. 2 Relationship between β and δ (MFORM)

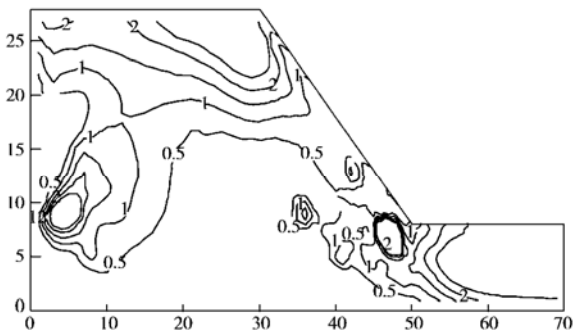


图 3 可靠指标等值线图 ($\delta_c=\delta_\varphi=0.3$)

Fig. 3 Contour of reliability index ($\delta_c=\delta_\varphi=0.3$)

图 2 是用中心点法所求边坡整体可靠指标与变异系数的关系曲线。图中, SRM 表示基于强度折减法的计算结果; SSA($m=1$)、SSA($m=2$)、SSA($m=3$)、

SSA($m=4$) 分别代表基于滑面应力分析的方法 1、方法 2、方法 3、方法 4 的计算结果。

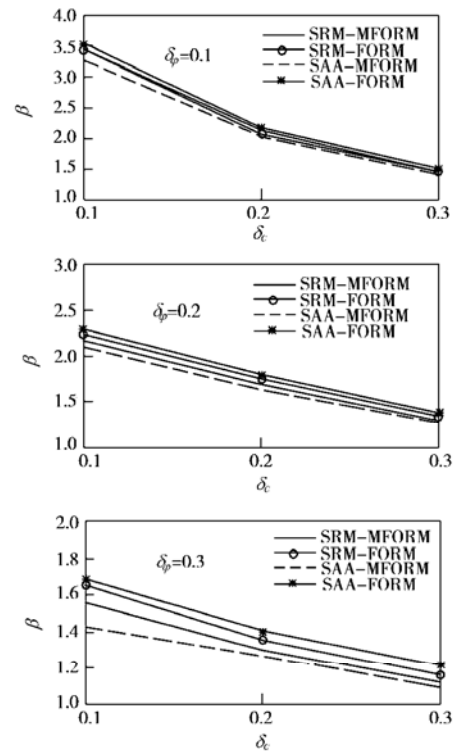


图 4 可靠指标与变异系数的关系 (FORM)

Fig. 4 Relationship between β and δ (FORM)

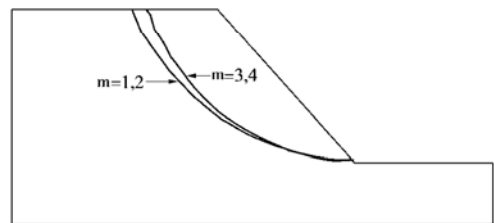


图 5 滑面位置图

Fig. 5 Location of sliding surfaces

由图 2 的计算结果可知: 在进行边坡的弹塑性有限元可靠度分析时, 与强度折减法相比, 基于滑面应力分析的各种方法中, 方法 3 最好, 其次为方法 4。这是因为方法 3、4 充分考虑了滑动方向的影响, 建立的功能函数更符合实际。其中, 方法 3 根据整个滑面的功能函数来求解滑面的可靠指标, 物理概念明确, 因而计算更合理; 方法 4 是方法 3 的简化形式, 它简单地视滑面的可靠指标为滑面上各单元可靠指标的均值, 故计算结果与方法 3 的结果有一定差别。方法 1、2 由于其功能函数没有考虑滑动面方向, 因而可靠指标的计算结果与 SRM 的相应值有较大差别。与方法 3、4 的关系类似, 方法 2 也是方法 1 的简化形式, 二者的计算结果较为接近。采用这种不考虑滑面方向的功能函数的优点在于它亦可求出边坡剖面上任一点的点

可靠指标,从而进行边坡稳定的定性分析。如图3是基本变量的 c , φ 变异系数均为0.3时的可靠指标等值线图,由此图可知在靠近边坡面中下部的可靠指标相对较低,破坏概率相对较大。

与中心点法相比,验算点法更为精确。因此,本文又用验算点法进行了相应的分析,图4表示的是中心点法与验算点法所求的边坡整体可靠指标与变异系数的关系曲线,其中基于SSA的计算结果是方法3的可靠指标。由该图亦可看出,对于方法3,基于SRM与SSA的可靠指标十分接近。同时,随着参数变异系数的增加,二者计算结果的差别稍有增大。

本文计算结果还表明基于SSA的方法1、2及方法3、4对应的潜在滑面的位置各自相同,如图5所示。可见造成这种滑面差异的原因主要是功能函数形式的影响。功能函数形式确定后,滑面的位置也相应确定。

3.2 基于SRM与SSA的可靠度分析方法的对比分析

文献[7]已指出,强度折减法是基于变形分析的边坡稳定性分析的首选方法。因此,基于强度折减的有限元可靠度分析方法是基于强度折减的定值分析法的自然推广,故本文将基于SSA的各种方法与基于SRM的计算结果进行对比。

本文通过计算表明:在进行边坡稳定的有限元可靠度分析时,采用基于SRM的边坡弹塑性有限元可靠度分析是完全可行的,这种方法编程简单,可直接调用定值法有限元分析程序,但计算量较大,运算速度较慢,因为它在用SRM求解边坡的安全系数及用数值法求解功能函数的导数时需多次进行弹塑性非线性有限元计算;此外,这种方法只能得出边坡的整体可靠指标,无法得到相应的潜在滑面的位置。基于SSA的边坡弹塑性有限元可靠度分析方法可以同时求出边坡的点可靠指标、整体可靠指标及潜在滑动面的位置,运算速度快,但编程复杂。

对于各种可靠度分析方法计算结果的区别,前面已进行了一定的讨论,指出基于SSA分析中的方法3较为合理,它与基于SRM的可靠指标最为接近。从本质上而言,由式(1)知,SRM的对强度参数进行折减,就是假定剪应力为

$$\tau = -\sigma_n \tan \varphi' + c' = -\sigma_n \frac{\tan \varphi}{F_s} + \frac{c}{F_s} = \frac{\tau_f}{F_s}, \quad (40)$$

$$\text{即} \quad F_s = \frac{\tau_f}{\tau}, \quad (41)$$

所以,基于SRM的功能函数的实质为

$$Z = F_s - 1 = \frac{\tau_f}{\tau} - 1, \quad (42)$$

而基于SSA分析的方法3中,滑面功能函数

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{i=1}^m Z_i \Delta l_i = \sum_{i=1}^m (\tau_f - \tau) \Delta l_i \\ &= \sum_{i=1}^m \tau \left(\frac{\tau_f}{\tau} - 1 \right) \Delta l_i = \sum_{i=1}^m \tau (F_s - 1) \Delta l_i, \end{aligned} \quad (43)$$

因此,这两种方法就其本质而言是一致的。但是,由于基于SRM的可靠度分析方法与基于SSA的可靠度分析方法的具体实现过程有所不同,前者是先对边坡进行定值法计算,求得各种参数情况下整个边坡的 F_s 值,再利用差分法进行导数的求解;而后者则是在每一单元内利用偏微分技术求解功能函数的导数,再对滑面上所有单元进行累加求解。因此,二者的计算结果存在着一定差异。

4 结 论

(1)在进行边坡稳定的有限元可靠度分析时,采用基于强度折减法的有限元可靠度分析是完全可行的。这种方法可直接调用定值法有限元分析程序;无需对各有限单元求单元的可靠指标,能一次性得出边坡的整体可靠指标,简单实用。但不能计算出边坡中潜在滑面的位置。

(2)基于滑面应力分析的弹塑性随机有限元可靠度分析在计算出边坡中各单元可靠指标的同时亦可计算出边坡总体可靠指标及其滑面位置,这有助于分析边坡的破坏过程、破坏面位置及边坡的防治。但这种分析方法编程复杂。

(3)基于滑面应力分析的弹塑性随机有限元可靠度分析中,滑面可靠指标的求解方法对计算结果影响很大。在分析边坡中各点的可靠指标时,其功能函数可采用不考虑滑面方向的函数形式(方法1、2),从而可得到边坡剖面中各点可靠指标的相对大小,进行边坡稳定的定性分析。但在求解边坡整体可靠指标时,应采用考虑滑面方向的函数形式作为功能函数(方法3、4),它能更好地反映滑面方向对边坡可靠指标的影响,其中方法3根据整个滑面的功能函数来求解滑面的可靠指标,物理概念明确,因而更为合理。

参考文献:

- [1] 谭晓慧. 多滑面边坡的可靠性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2001,20(6): 822 - 825. (TAN Xiao-hui. The reliability analysis of a slope with several slide planes[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2001,20(6): 822 - 825. (in Chinese))
- [2] MALKAWI A I H, HASSAN W F, ABDULLA F A. Uncertainty and reliability analysis applied to slope stability[J]. Structural Safety, 2000,22: 161 - 187.

- [3] 陈晓平, 孙慕群, 吴起星. 软基上复杂土坡稳定可靠度研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, **23**(6): 925 - 929.(CHEN Xiao-ping, SUN Mu-qun, WU Qi-xing. Reliability study of complex slope stability on soft soil[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, **23**(6): 925 - 929.(in Chinese))
- [4] 陈祖煜. 土坡稳定性分析-原理、方法、程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003: 239 - 248.(CHEN Zu-yu. Soil slope stability analysis—theory, method and programs[M]. Beijing: China Water Power Press, 2003: 239 - 248.(in Chinese))
- [5] WOODWARD P K. Stability of slopes with berms on rigid foundations[J]. Geotechnical and Geological Engineering, 1999, **16**: 309 - 320.
- [6] ZHENG H, LIU D F, LEE C F. Displacement-controlled method and its applications to material non-linearity[J]. International Journal for Numerical Methods in Geomechanics, 2005, **29**: 209 - 226.
- [7] 郑宏, 田斌, 刘德富, 冯强. 关于有限元边坡稳定性分析中安全系数的定义问题[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, **24**(13): 2225 - 2230.(ZHENG Hong, TIAN Bin, LIU De-fu, Feng Qiang. On definition of safety factor of slope stability analysis with the finite element method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, **24**(13): 2225 - 2230.(in Chinese))
- [8] KIM J Y, LI S R. An improved search strategy for the critical slip surface using finite element stress fields[J]. Computer and Geotechnics, 1997, **21**(4): 295 - 313.
- [9] SWAN C C, SEO Y K. Limit state analysis of earthen slopes using dual continuum/FEM approaches[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1999, **23**: 1359 - 1371.
- [10] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by finite element[J]. Geotechnique, 1999, **49**(3): 387 - 403.
- [11] MATSUI T, SAN K C. Finite element slope stability analysis by shear strength reduction technique[J]. Soils and Foundations, 1992, **32**(1): 59 - 70.
- [12] MELLAH R, AUVINET G, MASROURI F. Stochastic finite element method applied to non-linear analysis of embankments[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2001, **15**: 251 - 259.
- [13] 刘宁. 可靠度随机有限元法及其工程应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2001: 76 - 105.(LIU Ning. Reliability SFEM and its application[M]. Beijing: China WaterPower Press, 2001: 76 - 105.(in Chinese))
- [14] 谭晓慧. 有理多项式技术在土坡可靠性分析中的应用[J]. 水文地质工程地质, 1998, **25**(5): 52 - 54.(TAN Xiao-hui. The application of rational polynomial technique in the reliability analysis of soil slope[J]. Hydrogeology and Engineering Geology, 1998, **25**(5): 52 - 54.(in Chinese))
- [15] 贡金鑫. 工程结构可靠度分析方法[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2003, **9**: 155 - 160.(GONG Jin-xin. Computational methods for reliability of engineering structures[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2003, **9**: 155 - 160.(in Chinese))
- [16] SMITH I M, GRIFFITH D V. 有限元方法编程[M]. 第三版. 王崧, 等译. 北京: 电子工业出版社, 2003.(SMITH I M, GRIFFITH D V. Programming the finite element method [M] 3rd edition. WANG Song, et al. trans. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2003.(in Chinese))
- [17] 王焕定, 吴德伦, 林家骥. 有限单元法及程序设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997: 391 - 420.(WANG Huan-ding, WU De-lun, LIN Jia-yi. Finite element method and program design[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 1997: 391 - 420.(in Chinese))
- [18] CHOWDHURY R N, XU D W. Geotechnical system reliability of slopes[J]. Reliability Engineering and System Safety, 1995, **47**: 141 - 151.
- [19] 迟世春, 关立军. 基于强度折减的拉格朗日差分方法分析土坡稳定性[J]. 岩土工程学报, 2004, **26**(3): 42 - 46.(CHI Shi-chun, GUAN Li-jun. Slope stability analysis by Lagrangian difference method based on shear strength reduction[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, **26**(3): 42 - 46.(in Chinese))