

有初始间隙摩擦接触问题的有限元混合法

赵兰浩, 李同春, 牛志伟

(河海大学水利水电工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 针对三维有初始间隙摩擦接触问题, 提出了一种新的迭代求解方法——有限元混合法。根据接触问题局部非线性的特点, 将作用在接触体上的力系分解为外力和接触界面上的接触力, 以接触体的位移为基本未知量, 而以接触区域局部坐标系下的结点接触力为迭代变量, 将非线性接触迭代收缩在可能接触面上进行, 把复杂的摩擦接触非线性反映在接触力的变化上, 使得迭代计算变得简单易行, 并且对于存在多个接触界面的多体接触问题, 可以保持柔度矩阵的对称性和稀疏性, 大大提高了计算效率。文中首先给出了三维有初始间隙摩擦接触问题的力学模型, 推导得出了相应的有限元柔度方程, 然后详细给出了迭代求解步骤。最后通过两个数值算例来验证本文方法的正确性和有效性。

关键词: 有限元混合法; 摩擦接触; 初始间隙; 接触力

中图分类号: O343.3

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2006)11-2015-04

作者简介: 赵兰浩(1980-), 男, 山东临沂人, 博士, 水工结构专业。

Mixed finite element method for contact problems with friction and initial gaps

ZHAO Lan-hao, LI Tong-chun, NIU Zhi-wei

(College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract: A new iterative method—mixed finite element method, was proposed for contact problems with friction and initial gaps. Based on the characteristic of local nonlinearity for this problem, the system of forces acting on the contactor was divided into two parts: external forces and contact forces. The displacement of contactor was chosen as the basic variable and the nodal contact force in possible contact region was chosen as the iterative variable, so that the nonlinear iteration process was only limited in the possible contact surface. In this way, the sophisticated contact nonlinearity was shown by the variation of the contact forces. Moreover, in the case of multi-body contact problem, the flexibility matrix is symmetric and sparse. Thus the iterative procedure became easily to be carried out and much more economical. Firstly, the mechanical model for three-dimensional contact problems with friction and initial gaps was presented, and its finite element compliance equations were obtained. And then, the iteration process was given in detail. At last, the validity and accuracy of the proposed procedure was demonstrated with two numerical examples.

Key words: mixed finite element method; contact problems with friction; initial gaps; contact force

0 概述

接触问题广泛存在于机械工程、土木水利工程等工程领域。接触是一种高度非线性行为, 其特点和难点在于接触边界和接触力均事先未知, 而初始间隙和摩擦效应使问题变得更加困难起来。所以, 摩擦接触行为的分析被认为是固体力学领域中最具有挑战性的问题之一。目前求解接触问题的有限元方法主要有拉氏乘子法^[1-2]、罚函数法^[3-4]、间隙元法^[5-6]、数学规划法^[7]等。接触面条件的单边不等式约束性, 决定了接触问题需要采用试探-校核的增量迭代方法进行求解, 以往一般采用全自由度作为迭代求解变量, 以降低求解效率。有的学者针对接触问题是局部非线性问

题的特点, 提出了自由度凝聚的方法^[8-9], 使非线性接触迭代在接触面上进行, 在一定程度上提高了计算效率, 但得到的系数矩阵是满阵, 当存在多个接触面接触点对较多时, 计算效率仍不理想。

本文针对小变形假定下的三维弹性有初始间隙的摩擦接触问题, 提出一种新的迭代求解方法——有限元混合法。该方法将作用在接触体上的力系分解为外力和接触界面上的接触力, 把接触体的位移和接触界面上的接触力作为混合变量, 其中以接触体的位移为基本未知量, 而以接触区域局部坐标系下的结点接触

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (90510017)

收稿日期: 2005-11-22

力为迭代变量, 将非线性接触迭代收缩在接触面上进行, 把复杂的摩擦接触非线性反映在接触力的变化上, 同时进行接触状态和接触力的迭代, 使得迭代计算变得简单易行, 大大提高了计算效率。计算过程中不需要指定法向刚度、切向刚度等参数, 避免了其它方法中所存在的人为因素对结果的影响, 并且不存在其他方法难以处理的嵌入问题。当结构中存在多个接触面时, 可以保持关于接触力的柔度矩阵的带状性和稀疏性。计算初始时预先计算出柔度矩阵的各个元素, 每个增量步计算时考虑接触面的张开、闭合、滑移等变形模式, 采用广义 Mohr-Coulomb 准则来描述接触面上的摩擦效应, 根据接触状态组装柔度矩阵, 迭代求解结点接触力, 最后将求解出的结点接触力累加到总体荷载列阵中去进行整体求解。

1 有初始间隙摩擦接触问题的力学描述

实际工程中的接触过程是一个复杂的力学行为, 当抽象为力学模型时, 应满足 3 个接触条件^[10]: ① 法向不可贯入性, 即在变形过程中接触面上各点对的位移应满足相容性, 不允许相互侵入或覆盖。② 法向接触力为压应力条件。当接触面法向拉应力首次超过其抗拉强度以后, 接触面上的法向应力只能是压应力。③ 切向摩擦力条件。当作用在接触面上某一点处的切向力达到并超过该方向上的最大抗力时, 接触体将沿该方向滑动, 采用广义 Mohr-Coulomb 准则来描述。

如图 1 所示, 具有应力边界 Γ_i^l ($i=1,2$) 和位移边界 Γ_u^l 的两个弹性接触体 Ω_1 、 Ω_2 , 考查其可能接触边界 Γ_c^1 、 Γ_c^2 上的一个任意点 1、2, u_i 、 f^i 分别为边界 Γ_c^i 上的位移和接触力。 $\xi\eta\zeta$ 为定义在可能接触边界上的局部坐标系, 其中 ξ 为法线方向, η 、 ζ 为两个切线方向。点对 1、2 间的法向间隙 $\delta = (u^1 - u^2) \cdot \bar{\xi} + \delta_0$, δ_0 为接触面初始间隙值。记点对所控制的面积为 A , A 可以由缝面的单元面积对点对的贡献求得, 并记摩擦系数为 μ , 凝聚力为 c , 接触面抗拉强度为 σ_t , 则对图 1 所示的接触问题力学模型, 上述 3 个接触条件可以归纳为表 1 的形式。

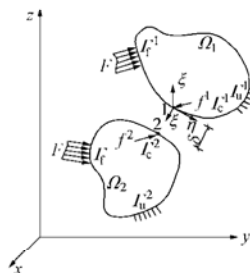


图 1 接触问题的力学模型

Fig. 1 Mechanical model for contact problem

对接触体 Ω_1 、 Ω_2 , 第 $n+1$ 荷载增量步的有限元

平衡方程为

$$K\Delta u_n = (F_{n+1} + f_n - \int B^T \sigma_n d\Omega) + \Delta f_n \quad (1)$$

式中, K 为总体刚度矩阵, Δu_n 为位移增量列阵, F_{n+1} 为外荷载向量, f_n 为上级增量步的接触力向量, Δf_n 为本级增量步的接触力增量, σ_n 为上级增量步的应力张量。式 (1) 可以写为

$$\Delta u_n = K^{-1}(F_{n+1} + f_n - \int B^T \sigma_n d\Omega) + K^{-1}\Delta f_n \quad (2)$$

记 $\Delta \bar{u}_n = K^{-1}(F_{n+1} + f_n - \int B^T \sigma_n d\Omega)$, 并引进定义在可能接触边界上的柔度矩阵 C , 式 (2) 又可写为

$$\Delta u_n = \Delta \bar{u}_n + C\Delta f_n \quad (3)$$

对接触体 Ω_1 、 Ω_2 上的接触点对 1、2, 有

$$\Delta u_n^1 = \Delta \bar{u}_n^1 + C^1 \Delta f_n^1 \quad (4)$$

$$\Delta u_n^2 = \Delta \bar{u}_n^2 + C^2 \Delta f_n^2 \quad (5)$$

由作用力和反作用力的关系, $\Delta f_n^1 = -\Delta f_n^2 = \Delta f_n$, 并记 $C = C^1 + C^2$, 式 (4) 减去式 (5) 合并可得

$$C\Delta f_n = (\Delta u_n^1 - \Delta u_n^2) - (\Delta \bar{u}_n^1 - \Delta \bar{u}_n^2) \quad (6)$$

方程 (6) 即有限元混合法求解有初始间隙摩擦接触问题的柔度方程。 $(\Delta \bar{u}_n^1 - \Delta \bar{u}_n^2)$ 为外荷载增量引起的增量位移差, 与当前增量步的接触状态无关, 可直接回代得到。 $(\Delta u_n^1 - \Delta u_n^2)$ 为当前增量步的总体位移差, 与当前增量步的接触状态有关。方程 (6) 中 $(\Delta u_n^1 - \Delta u_n^2)$ 和 Δf_n 均未知, 需结合接触条件进行迭代求解。

2 有限元混合法的迭代步骤

由表 1 的接触定解条件和约束条件, 有限元混合法求解有初始间隙摩擦接触问题的迭代步骤归纳为:

(1) 形成总体刚度矩阵 K , 并进行分解。求解接触面上可能接触点对的柔度矩阵的元素 c_{ij} , 其含义是由自由度 j 上的单位力在自由度 i 上产生的位移, 可以由单位力法求得。

(2) 假设第 n 荷载增量步的计算已完成, 进入第 $n+1$ 步计算。更新接触状态和接触力, 将上一增量步的结果作为接触迭代的初始假定条件, 回代求解

$$\Delta \bar{u}_n = K^{-1}(F_{n+1} + f_n - \int B^T \sigma_n d\Omega) \quad (7)$$

(3) 假设第 i 次接触迭代已完成, 进入第 $i+1$ 次接触迭代。更新接触状态, 将上一次接触迭代的结果作为当前状态。对不同的接触状态, 分情况处理: ① 若当前状态为张开, 求解接触间隙 $\delta_{n+1}^{i+1} = \delta_{n+1}^i + (\Delta u_n^{1,i} - \Delta u_n^{2,i}) \cdot \bar{\xi}$, 上标表示接触迭代次数, 下标表示荷载增量步数, 若 $\delta_{n+1}^{i+1} < 0$, 令 $\delta_{n+1}^{i+1} = 0$, 且更新接触状态为闭合; ② 若当前状态为闭合或滑移, 求解法向应力 $(\sigma_n^{i+1})_\xi = \sigma_n^{i+1} \cdot \bar{\xi}$, 若 $(\sigma_n^{i+1})_\xi > \sigma_t^i$, 则 $\sigma_t^{i+1} = 0$, 更新接触状态为张开, 接触力 $f_{n+1}^{i+1} = 0$, 其中 σ_t^i 为抗拉强度; ③ 若经过①、②更新后的状态为闭合或滑移。

表 1 初始间隙摩擦接触问题的接触条件

Table 1 Contact conditions for contact problem with friction and initial gaps		
接触状态	等式约束	不等式约束
张开	$f^1 = f^2 = 0$	$\delta > 0$
闭合	$\delta = 0, f^1 = -f^2$	$f_\xi < \sigma_i \cdot A, \sqrt{f_\eta^2 + f_\zeta^2} < -\mu \cdot f_\xi + A \cdot c$
滑移	$\delta = 0, \sqrt{f_\eta^2 + f_\zeta^2} = -\mu \cdot f_\xi + A \cdot c$	$f_\xi < \sigma_i \cdot A$

计算切向力 $f_{\eta\zeta} = \sqrt{f_\eta^2 + f_\zeta^2}$, 根据 Mohr-Coulomb 准则判断是否发生滑移, 若 $f_{\eta\zeta} > Ac + N\mu$, 更新接触状态为滑移, 在局部坐标系 $\xi\eta\zeta$ 内的滑动方向由接触力分量 f_η 、 f_ζ 的关系确定, 其中 N 为法向压力, 并标记闭合状态的 3 个自由度和滑移状态的法向自由度。

(4) 对接触状态进行收敛性判断。即当所有点对的当前接触状态与上一次迭代的状态相同时, 接触状态收敛, 转向第 (6) 步。

(5) 根据更新后的当前接触状态, 对式 (3) 中所标记的自由度累加形成柔度矩阵 C , 并分解。

(6) 求解柔度方程 (6)。首先形成柔度方程的右端项 $R_{hs} = (\Delta u_n^{1,i} - \Delta u_n^{2,i}) - (\Delta \bar{u}_n^1 - \Delta \bar{u}_n^2)$, 然后回代得到接触力的迭代增量 $\Delta f^i = C^{-1}R_{hs}$, 进而便可得到本次接触迭代的接触力荷载步增量 $\Delta f_n^i = f_{n+1}^i + \Delta f^i - f_n$ 。

(7) 进行接触力迭代的收敛性判断。即若 $\|f_{n+1}^i - f_n^i\| < \varepsilon$, 则接触力迭代收敛。此时若在第 (4) 步中的接触状态也同时收敛, 转向第 (9) 步。

(8) 由总体平衡方程 (2) 回代求解新的迭代增量位移 $\Delta u_n^{i+1} = K^{-1}(F_{n+1} + f_n - \int B^T \sigma_n d\Omega) + K^{-1}\Delta f_n^i$, 然后转向第 (3) 步, 进行下一次接触迭代。

(9) 将接触迭代结束后的接触力增量代入总体平衡方程, 回代求解最终的位移增量, 然后转向第 (2) 步, 进入下一荷载增量步的计算, 直至计算完成。

3 数值算例

3.1 算例 1

如图 2 所示的无限长圆柱体与半空间体的接触问题。设圆柱中性轴上受铅直向下的均布荷载 p 的作用。其精确解 (Hertz 解) 为^[11]

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{4pr/\pi E'}, \\ q &= 2p(1.0 - (x/a)^2)/(\pi a), \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

$$\frac{1}{E'} = \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}, \tag{9}$$

式中, a 为接角半宽, q 为接触压力的分布, E_1 、 E_2 、 μ_1 、 μ_2 为圆柱体及半空间体的弹性模量和泊松比。

考虑到对称性, 取 1/4 结构按照平面应变问题进行计算, 在可能接触面布置 20 个点对。取 $E_1 = E_2 = 1.0 \times 10^5$ MPa, $\mu_1 = \mu_2 = 0.3$, $r = 100$ mm, $p = 2.0 \times 10^4$

N/mm。则其弹性力学解答为接触半宽 $b = 6.808$ mm, 最大接触压力集度 $q_{\max} = 1870.277$ N/mm²。由本文算法得到 $b_0 = 6.63$ mm, $q_{\max 0} = 1881.25$ N/mm², 均相差非常小。图 3 为接触压力沿接触半宽的分布比较。可以看出, Hertz 解答与本文的有限元解答吻合得很好。

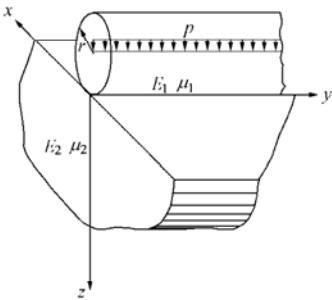


图 2 圆柱体与半空间体的接触

Fig. 2 Contact between cylinder and semi-space

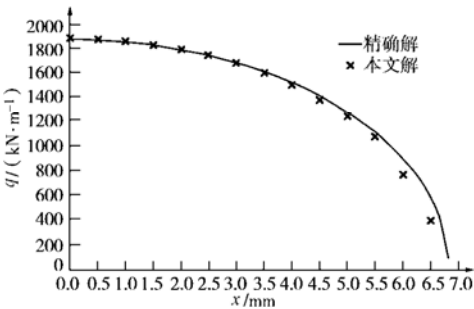


图 3 接触压力分布

Fig.3 Distribution of contact pressure

3.2 算例 2

一个单位厚度分两条缝的混凝土块体结构, 在左上角点处受幅值 $F_0 = 1.0 \times 10^7$ N 的静力折线集中荷载 F 的作用, $F(t)$ 的表达式为

$$F(t) = \begin{cases} F_0 t & (0 \leq t < 1), \\ F_0 (2-t) & (1 \leq t < 3), \\ F_0 (t-4) & (3 \leq t < 4). \end{cases} \tag{10}$$

弹性模量 $E = 24$ GPa, 泊松比为 0.167, 有限元模型见图 4。考虑摩擦效应时取摩擦系数为 0.7, 粘聚力为 0。图 5、6 分别为缝 1 和缝 2 在是否考虑摩擦效应时, 缝顶端点对的位移随荷载的变化曲线。可看出, 考虑摩擦效应之后, 不但位移幅值有相当的减小, 而且位移荷载的关系呈现明显的非线性特性。虽然没有解析解定量对比, 但从定性上看, 计算结果是合理的。

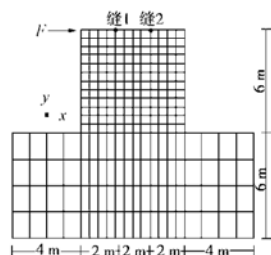


图4 结构的有限元模型

Fig. 4 FEM model for concrete block

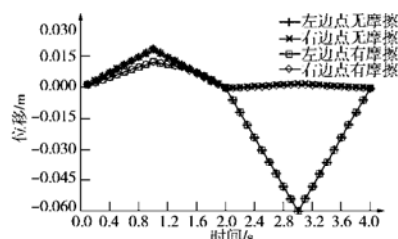


图5 第一条缝的荷载位移曲线

Fig. 5 Load vs. displacement for first joint

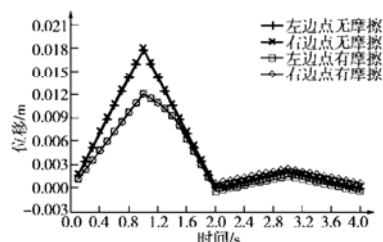


图6 第二条缝的荷载位移曲线

Fig. 6 Load vs. displacement for second joint

4 结 语

(1) 针对接触是一个局部非线性问题这一特点,建立了一种新的迭代求解方法。以接触点对的接触力为迭代未知量进行接触状态和接触力的迭代,然后将接触力代入到总体平衡方程中。求解时只需要在计算开始时形成和分解一次总体刚度矩阵,并求解可能接触点对的柔度矩阵的元素。在迭代过程中总体刚度矩阵保持不变,柔度矩阵是根据不同的接触状态按自由度累加形成,可大大提高计算效率,并避免了其它方法所存在的参数选择的困难和过量嵌入问题。在数值计算过程中发现,该方法具有较高的收敛性能,一般迭代5次便可得到正确的接触力。

(2) 文中首先给出了初始间隙摩擦接触问题的力学模型,然后推导了相应的有限元公式,并归纳了详细的迭代步骤,最后给出了两个数值算例子。计算结果表明了该方法的正确性和有效性。

参考文献:

[1] 王水林, 邓建辉, 葛修润. 改进的拉氏乘子法在接触摩擦问题中的应用[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(5):64 -

67.(WANG Shui-lin, DENG Jian-hui, GE Xiu-run. Application of augmented Lagrangian method in frictional contact method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1998, 20(5):64 - 67.)

[2] SIMO J C, WRIGGER P, TAYOR R L. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1985, 50: 163 - 180.

[3] KIKUHICI N. A smoothing technique for reduced integration penalty methods in contact problems [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1982, 18: 343 - 350.

[4] PERIC D, OWEN D R J. Computational model for 3D contact problems with friction based on the penalty method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, 35: 1289 - 1309.

[5] 雷晓燕, SWOBODE G, 杜庆华. 接触摩擦单元的理论及其应用[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(3):23 - 32.(LEI Xiao-yan, SWOBODE G, DU Qing-hua. Thoery and application of contact-friction interface element[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994,16(3):23 - 32.)

[6] 邵伟, 金锋, 王光伦. 用于接触面模拟的非线性薄层单元[J]. 清华大学学报, 1999,39(2): 34 - 38.(SHAO Wei, JIN Feng, WANG Guang-lun. Nonlinear thin-layer element for modeling interface[J]. Journal of Tsinghua University, 1999, 39(2):34 - 38.)

[7] HAUG D, SAXCE G. Frictionless contact of elastic bodies by finite element method and mathematical programming technique[J]. Computers Structures, 1980, 11: 55 - 67.

[8] FRANCAVILLA A, ZIENKIEWICZ O C. A note on numerical computation of elastic contact problems [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1975, 9: 913 - 924.

[9] SACHDEVA T D, RAMAKRISHNAN C V, A finite element solution for the two-dimensional elastic contact problems with friction[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1981,17:1257 - 1271.

[10] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003:666 - 671. (WANG Xu-cheng. Finite element method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003:666 - 671.)

[11] 徐芝纶. 弹性力学[M].北京:高等教育出版社,1985:295 - 302.(XU Zhi-lun. Mechanics of elasticity[M]. Beijing: Higher Education Press, 1985:295 - 302.)