

基于 AHP 先验分布融合法的岩土参数概率分布推断

官凤强, 李夕兵, 邓建

(中南大学资源与安全工程学院, 湖南 长沙 410083)

摘要: 在存在多个大样本先验分布和现场有限个小样本的条件下, 提出了推断岩土参数概率分布的 AHP 先验分布融合法, 探讨如何综合利用已有的经验资料并结合工程现场的试验数据来确定岩土参数的概率分布。借鉴 AHP 多目标决策方法的思想, 并考虑各先验分布的影响因素, 构造关于可信度的层次结构模型来确定各先验分布的权重并进行整体融合, 进而求得融合后分布的参数估计。研究结果表明: 该方法可以增强统计决策中的稳健性, 实现统计意义上概率分布类型的优化。

关键词: 小样本; 岩土参数; 先验分布; 概率分布

中图分类号: TU457

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2006)10-1313-06

作者简介: 官凤强(1979-), 男, 山东潍坊人, 硕士研究生, 主要从事岩土工程可靠度分析及应用方面的研究。

Probabilistic distribution of geotechnical parameters by using AHP prior distribution fusion method

GONG Feng-qiang, LI Xi-bing, DENG Jian

(School of Resources and Safety Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: The AHP (Analytic hierarchy process) prior distribution fusion method was put forward to estimate the distribution of geotechnical parameters for a small sample in the case of insufficient data by using testing data and some groups of prior distribution data (existing in history) in the same zone. Based on the AHP method and considered by the influence factor to each prior distribution between its prior data and testing data, a hierarchy model about reliability was established to confirm the weight of every prior distribution. The results show that this method can enhance the steadiness in statistical decision-making and bring about the optimum fitting of probabilistic model of geotechnical parameters.

Key words: small sample; geotechnical parameters; prior distribution; probabilistic distribution

0 引言

岩土工程的可靠度分析和设计中, 岩土参数的概率分布特性研究始终是一项基础性的重要工作^[1], 也是目前的一个研究热点问题^[1-9]。而在实际工程中, 经常遇到原位岩土参数测试数据太少, 即有限小样本条件下推断岩土参数的概率分布问题, 因此研究小样本概率分布的分析方法, 具有重要的现实意义。推广的 Bayes 法以及模糊 Bayes 法是一种针对小样本情况下的统计分析理论, 现已获得了广泛应用^[2-6]。但以往的研究都是基于一种先验分布情况下所做出的推断。在存在多个先验分布的情况下, 如何客观合理的综合利用这些信息, 并结合具体工程的试验数据, 确定岩土参数的概率分布, 为统计推断提供充分的论据, 具有重要的实用价值和理论意义。对多个先验分布进行融合, 最重要的是确定各先验分布在综合先验分布中的合理权重。本文借鉴 AHP (Analytic hierarchy process)

多目标决策方法的思想, 提出基于 AHP 的先验分布融合法, 基于专家决策信息来确定先验分布的权重, 把各个先验分布融合为一个综合先验分布, 继而利用 Bayes 理论进行一系列推断, 并用实例进行了验证。

1 概率分布参数的推广 Bayes 法

推广的 Bayes 法^[2]根据先验分布信息, 即利用已积累的某一岩土参数的试验资料, 对分布类型进行初估, 再根据后验分布信息, 即某一具体工程的有限试验数据, 对概率分布参数进行重新估计。该方法可以较好的避免由于具体工程试验数据不足引起的统计参数的误差。

设变量 θ 的先验分布密度函数为 $\pi'(\theta)$, 后验分

基金项目: 国家自然科学基金重大资助项目 (50490274); 国家自然科学基金资助项目 (10472134, 50404010); 国家“973”资助项目 (2002CB412703)

收稿日期: 2005-07-06

布密度函数为 $\pi''(\theta)$ ，根据 Bayes 公式，有

$$\pi''(\theta_i)\Delta\theta = \frac{P(E|\theta_i)\pi'(\theta_i)\Delta\theta}{\sum_{j=1}^n P(E|\theta_j)\pi'(\theta_j)\Delta\theta}, \quad (1)$$

式中 $P(E|\theta_i) = P(E|\theta_i < \theta \leq \theta_i + \Delta\theta)$ ，表示 θ 发生在区间 $(\theta_i, \theta_i + \Delta\theta)$ 上的试验概率； E 表示试验结果； n 为数据分段数； $\Delta\theta$ 是分段区间。

2 基于 AHP 的先验分布融合法

在现场试验前，如果未知参数 θ 具有 $k(k \geq 2)$ 个不同的先验分布 $\pi'(\theta)$ ($t=1, \dots, k$)，在进行 Bayes 统计分析之前，需要将这 k 个不同的先验分布融合成为关于 θ 的一个先验分布，进而确定岩土参数的概率分布。对各先验分布进行融合，通常选用加权方法进行。定义 ω_t 是相应于第 t 个先验分布 $\pi'_t(\theta)$ 的权重，记融合后的先验分布为 $\pi'(\theta)$ ，则有

$$\pi'(\theta) = \sum_{t=1}^k \omega_t \pi'_t(\theta), \quad (\sum_{t=1}^k \omega_t = 1) \quad (2)$$

AHP 方法^[10]是美国运筹学家 Saaty T L 在 20 世纪 70 年代提出的一种多目标决策分析方法。这一方法基于对问题的全面考虑，将定性与定量分析相结合，将决策者的经验判断予以量化，对目标（因素）结构复杂且缺乏必要数据情况下更为适用。在对先验分布进行融合时，大多数情况下决策者很难直接给出每一种先验分布的权重。本文基于 AHP 方法的思想，从影响各先验分布权重的每一个因素出发，两两比较各先验分布的相对重要性，得到相应的成对比较矩阵，首先计算各层影响因素的权重，最终计算出各先验分布对综合先验分布的权重，进而实现统计意义上的先验分布融合。影响各先验分布权重的因素主要表现在^[11]：

- (1) 先验分布的准确性：表征先验分布的均值 μ 与未知参数 θ 真值的接近程度，越接近真值相对重要性越高。
- (2) 先验分布的离散性：表征先验分布方差 σ^2 的大小， σ^2 越小相对重要性越高。
- (3) 先验分布的稳健性：表征先验分布对随机扰动的灵敏性，先验分布的稳健性越高，相对的重要性越高。

在具体工程应用中，可以根据实际情况对上述影响因素数量作相应调整，进行增删。基于 AHP 的先验分布融合法实施步骤如下^[10]：

(1) 构造问题的层次结构模型。第一层为综合目标，即先验分布的可信度（权重），第二层为影响权重的因素，最后一层为各先验分布。各层之间互相联系，用连线表示。

(2) 构造成对比较矩阵。从构造模型的第二层开

始，比较某一层的因素 $A_1, \dots, A_n$ 对上一层一个因素 O 的影响。用 a_{ij} 表示 A_i 和 A_j 对 O 的影响之比，全部比较结果即构成成对比较矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 。成对比较的结果值一般取为 $1/9, 1/8, \dots, 1/2, 1, 2, \dots, 8, 9$ 等，比较尺度 a_{ij} 含义如表 1 所示。

表 1 尺度 a_{ij} 含义表

Table 1 Meanings of a_{ij}

尺度 a_{ij}	含义
1	表示待比较的两个因素具有同等重要性
3	一个因素比另一个因素稍微重要
5	一个因素比另一个因素明显重要
7	一个因素比另一个因素强烈重要
9	一个因素比另一个因素极端重要
2, 4, 6, 8	因素之间重要性比较在上述等级之间
上述数的倒数	一个因素比另一个因素不重要的上述描述

(3) 计算权向量并做一致性检验。根据决策者的回答，得到比较矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n \times n}$ ($\bar{a}_{ij}$ 为决策者的回答值)，为了满足一致性条件 $a_{ij} \times a_{jk} = a_{ik}$ ，引入一致性指标 CI

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}, \quad (3)$$

式中 $\lambda_{\max}$ 为 $\bar{A}$ 的最大特征值。为了判断 $\bar{A}$ 不一致程度的容许范围，T.L.Saaty 给出随机一致性指标 RI ， RI 的具体数值见表 2。

表 2 随机一致性指标 RI 的数值

Table 2 Meanings of RI

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

对于 $n > 3$ 的成对比较矩阵 $\bar{A}$ ，定义一致性比率

$$CR = \frac{CI}{RI} \quad (4)$$

并且只有当 $CR < 0.1$ ，认为检验通过，特征向量（归一化后）即为权向量；如不通过，需重新构造成对矩阵。计算对比矩阵的特征值和特征向量，可以采用和法、幂法和根法。

(4) 计算组合权向量并做组合一致性检验。对于 3 个层次的决策问题，若第 1 层 1 个因素，第 2, 3 层分别有 3 个因素，记第 2, 3 层对第 1, 2 层的权向量分别为

$$\begin{aligned} \omega^{(2)} &= (\omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}, \omega_3^{(2)})^T, \\ \omega_h^{(3)} &= (\omega_{h1}^{(3)}, \omega_{h2}^{(3)}, \omega_{h3}^{(3)})^T, \quad (h=1, \dots, 3), \end{aligned}$$

以 $\omega_h^{(3)}$ 为列向量构成矩阵

$$W^{(3)} = [\omega_1^{(3)}, \omega_2^{(3)}, \omega_3^{(3)}], \quad (5)$$

则第 3 层对第 1 层的组合权向量为

$$\omega^{(3)} = W^{(3)} \omega^{(2)} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T \quad (6)$$

得到组合权向量之后，进行组合一致性检验，确

定组合权向量是否可以作为最终的决策依据。组合一致性检验要逐层进行。若第 k 层的一致性指标为 $CI_1^{(k)}, \dots, CI_n^{(k)}$ (n 是第 $k-1$ 层因素的数目), 随机一致性指标为 $RI_1^{(k)}, \dots, RI_n^{(k)}$, 定义

$$CI^{(k)} = [CI_1^{(k)}, \dots, CI_n^{(k)}] \omega^{(k-1)}, \tag{7}$$

$$RI^{(k)} = [RI_1^{(k)}, \dots, RI_n^{(k)}] \omega^{(k-1)}, \tag{8}$$

则第 k 层对第 1 层的组合一致性比率为

$$CR^{(k)} = CR^{(k-1)} + \frac{CI^{(k)}}{RI^{(k)}}, (k=3,4,\dots). \tag{9}$$

如果最下层 (假设共有 p 层) 对最上层的组合一致性比率

$$CR^{(p)} < 0.1$$

时认为整个层次的比较判断通过一致性检验。

把 ω_i 代入式 (2), 得到融合后的总体先验分布 $\pi'(\theta)$ 。

3 多源先验分布的融合验后分布参数估计

得到融合后的总体先验分布 $\pi'(\theta)$ 之后, 需要考虑怎样把 $\pi'(\theta)$ 运用到验后分布 $\pi''(\theta)$ 的参数估计中去。根据 Bayes 公式^[12], 有

$$\pi''(\theta_i) \Delta \theta = KL(\theta_i) \pi'(\theta_i) \Delta \theta, \tag{10}$$

式中 $L(\theta)$ 为似然函数; K 为归一化常数。假设先验分布函数与后验分布函数概型一致, θ 的后验分布参数可由下式近似确定^[12]

$$\mu_\theta = \sum_{i=1}^n \bar{\theta}_i \cdot \pi''(\theta_i) \Delta \theta, \tag{11}$$

$$\sigma_\theta^2 = \sum_{i=1}^n (\bar{\theta}_i - \mu_\theta)^2 \cdot \pi''(\theta_i) \Delta \theta, \tag{12}$$

式中 $\bar{\theta}$ 是分段区间 $(\theta_i, \theta_i + \Delta \theta)$ ($i=1,2,\dots,n$) 上 θ 的中值; $\pi''(\theta_i) \Delta \theta$ 由式 (1) 得到。

把式 (2) 代入式 (10), 得到

$$\pi''(\theta_i) \Delta \theta = KL(\theta_i) \Delta \theta \sum_{t=1}^k \omega_t \pi'_t(\theta_i). \tag{13}$$

把式 (13) 代入式 (11) 和式 (12), 得到验后分布 $\pi''(\theta)$ 的参数估计

$$\mu_\theta = \sum_{i=1}^n \bar{\theta}_i \cdot KL(\theta_i) \Delta \theta \cdot \sum_{t=1}^k \omega_t \pi'_t(\theta_i), \tag{14}$$

$$\sigma_\theta^2 = \sum_{i=1}^n (\bar{\theta}_i - \mu_\theta)^2 \cdot KL(\theta_i) \Delta \theta \cdot \sum_{t=1}^k \omega_t \pi'_t(\theta_i). \tag{15}$$

4 计算实例

山东泰莱盆地土质多为粉质粘土, 在工程分析设计中通常作为持力层对待。利用参考文献[6]的数据, 把某建筑小区的 33 个粉质粘土粘聚力的数据 33 个现

场试验数据作为有限小样本, 历史上的 207 个粉质粘土粘聚力的原始数据, 平均分为 3 组作为先验分布的信息源 (见表 3, 4)。利用 AHP 法的思想, 构造层次结构模型如图 1 所示。

表 3 某小区粉质粘土粘聚力试验数据表
Table 3 Test data of cohesion of silty clay

序号	粘聚力 /kPa	序号	粘聚力 /kPa	序号	粘聚力 /kPa
x_1	18.6	x_{12}	40.5	x_{23}	51.8
x_2	25.6	x_{13}	42.7	x_{24}	53.2
x_3	28.4	x_{14}	43.2	x_{25}	54.1
x_4	30.6	x_{15}	44.8	x_{26}	55.2
x_5	33.2	x_{16}	46.3	x_{27}	56.7
x_6	34.1	x_{17}	46.9	x_{28}	57.6
x_7	36.6	x_{18}	47.2	x_{29}	58.0
x_8	37.3	x_{19}	48.2	x_{30}	59.8
x_9	38.2	x_{20}	48.5	x_{31}	65.8
x_{10}	39.8	x_{21}	48.8	x_{32}	66.8
x_{11}	40.5	x_{22}	49.6	x_{33}	79.9

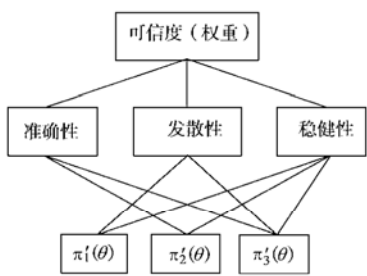


图 1 层次结构模型

Fig. 1 Hierarchy model

用 $K-S$ 法检验, 认为这 4 组数据分别服从 $\pi'_1(\theta) = N_1(44.47, 16.62^2)$, $\pi'_2(\theta) = N_2(44.54, 16.59^2)$, $\pi'_3(\theta) = N_3(44.53, 16.50^2)$ 和 $N'(46.32, 12.73^2)$ 。

利用本文的方法, 构造第 2 层对第 1 层可信度 (权重) 的成对矩阵 G 和第 3 层各先验分布分别对第 2 层的准确性、发散性和稳健性三因素的成对矩阵 E_1 、 E_2 和 E_3 , 形式如下

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1/3 & 1 & 3 \\ 1/8 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

采用和法计算上述矩阵的近似特征值和近似特征向量。步骤如下^[10]:

- (1) 将 A 的每一列向量归一化得 $\bar{\omega}_{ij} = \bar{a}_{ij} / \sum_{i=1}^n \bar{a}_{ij}$;

表 4 粉质粘土粘聚力历史数据表
Table 4 History data of cohesion of silty clay

第一组数据				第二组数据				第三组数据			
序号	粘聚力 /kPa	序号	粘聚力 /kPa	序号	粘聚力 /kPa	序号	粘聚力 /kPa	序号	粘聚力 /kPa	序号	粘聚力 /kPa
x_1^1	10.8	x_{36}^1	44.3	x_1^2	14.7	x_{36}^2	44.4	x_1^3	15.3	x_{36}^3	44.1
x_2^1	17.7	x_{37}^1	44.4	x_2^2	17.1	x_{37}^2	44.5	x_2^3	17.2	x_{37}^3	44.5
x_3^1	17.8	x_{38}^1	45.1	x_3^2	18.1	x_{38}^2	44.7	x_3^3	17.7	x_{38}^3	45.0
x_4^1	18.2	x_{39}^1	45.3	x_4^2	18.5	x_{39}^2	45.5	x_4^3	19.1	x_{39}^3	45.1
x_5^1	20.7	x_{40}^1	45.6	x_5^2	19.3	x_{40}^2	45.7	x_5^3	19.7	x_{40}^3	45.8
x_6^1	22.0	x_{41}^1	46.1	x_6^2	23.0	x_{41}^2	45.8	x_6^3	21.0	x_{41}^3	45.8
x_7^1	23.1	x_{42}^1	46.3	x_7^2	23.3	x_{42}^2	46.3	x_7^3	23.7	x_{42}^3	46.1
x_8^1	24.9	x_{43}^1	46.4	x_8^2	24.0	x_{43}^2	46.6	x_8^3	24.8	x_{43}^3	47.2
x_9^1	25.5	x_{44}^1	47.6	x_9^2	25.7	x_{44}^2	47.5	x_9^3	25.2	x_{44}^3	47.6
x_{10}^1	25.8	x_{45}^1	47.7	x_{10}^2	26.4	x_{45}^2	48.3	x_{10}^3	27.1	x_{45}^3	47.7
x_{11}^1	28.0	x_{46}^1	48.3	x_{11}^2	27.5	x_{46}^2	48.4	x_{11}^3	27.8	x_{46}^3	48.5
x_{12}^1	29.9	x_{47}^1	48.7	x_{12}^2	29.9	x_{47}^2	48.5	x_{12}^3	28.1	x_{47}^3	48.6
x_{13}^1	29.9	x_{48}^1	49.1	x_{13}^2	30.2	x_{48}^2	49.2	x_{13}^3	30.7	x_{48}^3	49.1
x_{14}^1	31.6	x_{49}^1	50.0	x_{14}^2	30.8	x_{49}^2	50.0	x_{14}^3	30.9	x_{49}^3	50.3
x_{15}^1	31.8	x_{50}^1	51.1	x_{15}^2	32.0	x_{50}^2	50.5	x_{15}^3	31.8	x_{50}^3	51.0
x_{16}^1	32.4	x_{51}^1	51.3	x_{16}^2	32.5	x_{51}^2	51.5	x_{16}^3	32.9	x_{51}^3	51.3
x_{17}^1	33.6	x_{52}^1	51.5	x_{17}^2	32.9	x_{52}^2	51.6	x_{17}^3	33.0	x_{52}^3	52.4
x_{18}^1	33.9	x_{53}^1	53.3	x_{18}^2	33.9	x_{53}^2	53.0	x_{18}^3	33.7	x_{53}^3	53.0
x_{19}^1	33.9	x_{54}^1	53.5	x_{19}^2	34.6	x_{54}^2	54.4	x_{19}^3	34.7	x_{54}^3	53.4
x_{20}^1	35.4	x_{55}^1	54.5	x_{20}^2	34.7	x_{55}^2	54.5	x_{20}^3	35.3	x_{55}^3	54.6
x_{21}^1	35.7	x_{56}^1	57.3	x_{21}^2	36.0	x_{56}^2	57.1	x_{21}^3	35.5	x_{56}^3	57.3
x_{22}^1	36.4	x_{57}^1	58.9	x_{22}^2	36.4	x_{57}^2	59.7	x_{22}^3	36.6	x_{57}^3	58.2
x_{23}^1	37.4	x_{58}^1	60.6	x_{23}^2	37.0	x_{58}^2	60.9	x_{23}^3	37.4	x_{58}^3	61.1
x_{24}^1	37.8	x_{59}^1	62.9	x_{24}^2	37.8	x_{59}^2	61.4	x_{24}^3	37.7	x_{59}^3	62.8
x_{25}^1	37.9	x_{60}^1	63.2	x_{25}^2	38.0	x_{60}^2	64.9	x_{25}^3	38.0	x_{60}^3	63.2
x_{26}^1	38.5	x_{61}^1	64.9	x_{26}^2	38.1	x_{61}^2	65.3	x_{26}^3	38.4	x_{61}^3	66.3
x_{27}^1	38.7	x_{62}^1	68.2	x_{27}^2	38.9	x_{62}^2	67.6	x_{27}^3	38.5	x_{62}^3	67.6
x_{28}^1	38.9	x_{63}^1	68.9	x_{28}^2	39.5	x_{63}^2	69.5	x_{28}^3	39.5	x_{63}^3	68.2
x_{29}^1	39.9	x_{64}^1	69.7	x_{29}^2	39.6	x_{64}^2	71.6	x_{29}^3	39.6	x_{64}^3	71.9
x_{30}^1	40.0	x_{65}^1	74.4	x_{30}^2	40.0	x_{65}^2	72.6	x_{30}^3	39.9	x_{65}^3	73.8
x_{31}^1	40.2	x_{66}^1	79.3	x_{31}^2	40.4	x_{66}^2	79.9	x_{31}^3	40.8	x_{66}^3	77.1
x_{32}^1	41.7	x_{67}^1	79.9	x_{32}^2	41.1	x_{67}^2	80.7	x_{32}^3	41.3	x_{67}^3	82.0
x_{33}^1	42.0	x_{68}^1	84.7	x_{33}^2	42.1	x_{68}^2	82.9	x_{33}^3	42.0	x_{68}^3	84.1
x_{34}^1	42.2	x_{69}^1	87.1	x_{34}^2	42.3	x_{69}^2	88.3	x_{34}^3	42.8	x_{69}^3	86.1
x_{35}^1	43.9			x_{35}^2	43.5			x_{35}^3	43.9		

- (2) 对 $\overline{\omega}_{ij}$ 按行求和得到 $\overline{\omega}_i = \sum_{j=1}^n \overline{\omega}_{ij}$;
- (3) 把 $\overline{\omega}_i$ 归一化 $\omega_i = \overline{\omega}_i / \sum_{i=1}^n \overline{\omega}_i$, 特征向量即为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^T$;
- (4) 计算 $\lambda_{\max} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(A\omega)_i}{\omega_i}$ 作为最大特征值的近似值。

利用和法, 计算各层因素的权向量并查找表 2, 然后根据式 (4) 和式 (9) 作一致性检验。其中

$$CR^{(2)} = \frac{CI^{(2)}}{RI^{(2)}} = \frac{0.0092}{0.58} = 0.0158 < 0.1;$$
$$CR^{(3)} = CR^{(2)} + \frac{CI^{(3)}}{RI^{(3)}} = 0.0158 + \frac{0.0072}{0.58} = 0.0282 < 0.1。$$

可以看出 CR 值都小于0.1, 说明通过一致性检验, 结果有效。

表 5 计算结果表
Table 5 Computational results

	各层权向量值			$\lambda_{\max}$	CI
$\omega^{(2)}$	0.4429	0.3873	0.1698	3.0183	0.0092
$\omega_1^{(3)}$	0.1698	0.4429	0.3873	3.0183	0.0092
$\omega_2^{(3)}$	0.2500	0.2500	0.5000	3.0000	0
$\omega_3^{(3)}$	0.6816	0.2364	0.0820	3.0015	0.0008

利用表 5 结果, 根据式 (6) 计算组合权向量得到:
 $\omega^{(3)} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T = (0.2878, 0.3331, 0.3791)^T$ 。可以看出 $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$, 即第三组先验分布在融合后的总先验分布中权重最大, 影响程度最高。把 $\omega^{(3)}$ 代入式 (2), 得到融合后的先验分布参数估计式。因为随机变量 θ 的先验分布 $\pi'_t(\theta)$ 为正态分布 $N'_t[\mu'_t, (\sigma'_t)^2]$ ($t=1, 2, 3$), 并且地质成因相同, 可认为上述四组数据来自同一正态总体, 即似然函数 $L(\theta)$ 为正态分布 $N^*[\mu^*, (\sigma^*)^2]$, 后验分布 $\pi''(\theta)$ 也为正态分布 $N''[\mu'', (\sigma'')^2]$, 则根据 Bayes 分析理论, 后验分布 $\pi''(\theta)$ 的参数 $N''[\mu'', (\sigma'')^2]$ 、 σ'' 有如下推导公式^[12]

$$\mu''_t = \frac{[\mu^* (\sigma'_t)^2 + \mu'_t (\sigma^*)^2]}{(\sigma'_t)^2 + (\sigma^*)^2}, \tag{16}$$

$$(\sigma''_t)^2 = \frac{(\sigma'_t \cdot \sigma^*)^2}{(\sigma'_t)^2 + (\sigma^*)^2} \quad \circ \tag{17}$$

结合式 (2)、(14) 和 (15), 对式 (16)、(17) 推导可以得到

$$\mu'' = \omega_1 \mu''_1 + \omega_2 \mu''_2 + \omega_3 \mu''_3, \tag{18}$$

$$(\sigma'')^2 = \omega_1 (\sigma''_1)^2 + \omega_2 (\sigma''_2)^2 + \omega_3 (\sigma''_3)^2 \quad \circ \tag{19}$$

根据式 (16) 和 (17), 分别计算 μ''_t 和 σ''_t , 结果见表 6。

表 6 计算结果表
Table 6 Computational results

	$\omega^{(3)}$	μ'_t	σ'_t	μ^*	σ^*	μ''_t	σ''_t
$\pi_1(\theta)$	0.2878	44.47	16.62	46.32	12.73	45.64	10.10
$\pi_2(\theta)$	0.3331	44.54	16.59	46.32	12.73	45.66	10.10
$\pi_3(\theta)$	0.3791	44.53	26.50	46.32	12.73	45.65	10.08

把 μ''_t 和 σ''_t 代入式 (18)、(19) 得到验后分布函数的参数 μ'' 、 σ'' , 即后验分布函数为 $N''[45.650, (10.094)^2]$, 优化后的方差值比各先验分布和似然函数的方差值都小, 达到了统计意义上的优化目的。得到后验分布函数后, 进而可以此为基础进行估值、置信区间估计以及假设检验等统计推断。

5 结 语

随着岩土力学理论以及工程实践的不断发 展, 同一地区同一地质条件下历史上不同时期已经积累了一些丰富的工程资料, 如何充分利用这些历史资料并结

合工程现场的岩土参数试验数据, 来指导工程设计和分析具有很重要的现实意义。本文提出了 AHP 先验信息融合法, 探讨如何综合利用已有的经验资料并结合工程现场的试验数据来确定岩土参数的概率分布。在存在多个大样本先验分布的情况下, 基于 AHP 多目标决策方法的思想, 构造关于可信度的层次结构模型来确定各先验分布的权重进行整体融合, 进而求得融合验后分布的参数估计。该方法成功地解决了现场试验数据较少而无法确定先验分布的可信度导致无法确定先验分布合理权重的不足。从信息论的角度来看, 本文在选定先验分布函数类型后, 对确定先验分布参数的合理性上, 提出了更有效的方法, 增强了统计决策中的稳健性。并且能减少现场试验的次数, 节约试验费用, 可以考虑在岩土工程可靠性分析、设计等工程领域内进行推广 (注: 选取不同类型的函数之间的比较, 则较难采用该方法)。

参考文献:

[1] 苏永华,何满潮,孙晓明.大子样岩土随机参数统计方法[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(1): 117 - 119. (SU Yong-hua, HE Man-chao, SUN Xiao-ming. Approach on asymptotic approximations of polynomials for probability density function of geotechnics random parameters[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23(1): 117 - 119.)

[2] 张广文,刘令瑶.确定随机变量概率分布的推广 Bayes 法[J]. 岩土工程学报,1995, 17(3):91 - 94. (ZHANG Guang-wen, LIU Ling-yao. Generalized Bayes method to infer probabilistic distribution of random variable [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1995, 17(3): 91 - 94.)

[3] 严春风,张建辉.岩土力学参数的概率分布 Bayes 的推断[J]. 重庆建筑大学学报,1997,19(2):65 - 71.(YAN Chun-feng, ZHANG Jian-hui. The use of bayes method to infer distribution of mechanical parameters[J]. Journal of Chongqing Jianzhu University, 1997,19(2):65 - 71.)

[4] 徐 超,杨林德.随机变量拟合优度检验和分布参数 Bayes 估计[J]. 同济大学学报, 1998, 26(3):340 - 344.(XU Chao, YANG Lin-de. Test of goodness of fit of random variables and Bayesian estimation of distribution parameters [J]. Journal of Tongji University, 1998, 26(3): 340 - 344.)

[5] 徐 军,雷 用,郑颖人.岩土参数概率分布推断的模糊 Bayes 方法探讨[J].岩土力学, 2000, 21(4):394 - 396. (XU Jun, LEI Yong, ZHENG Ying-ren. The fuzzy bayes method to infer distribution of rock parameters[J]. Rock and Soil Mechanics, 2000, 21(4): 394 - 396.)

- [6] 王俊杰,陈爱玖,姬凤玲,等.岩土参数的概率分布拟合及 Bayes 方法优化[J].华北水利水电学院学报,2004,25(2): 51 - 54. (WANG Jun-jie, CHEN Ai-jiu, JI Feng-ling, et al. Probability distribution fitting and bayes method optimization on geotechnical parameter[J]. Journal of North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, 2004, 25(2):51 - 54.)
- [7] 邓建,李夕兵,古德生.岩石力学参数概率分布的信息熵推断[J].岩石力学与工程学报,2004,23(13):2177 - 2181. (DENG Jian, LI Xi-bing, GU De-sheng. Probability distribution of rock mechanics parameters by using maximum entropy method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering,2004, 23(13):2177 - 2181.)
- [8] DENG J, LI X B, GU G S, A distribution-free method using maximum entropy and moments for estimating probability curves of rock variables[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2004, 41(Supplement 1): 1 - 6.
- [9] 宫凤强,李夕兵,邓建.基于正交多项式逼近法的岩土参数概率分布推断[J].岩土工程技术,2005,19(3):144 - 147. (GONG Feng-qiang, LI Xi-bing, DENG Jian. The inference of probabilistic distribution of geotechnical paramater by using orthogonal polynomial[J]. Geotechnical Engineering Technique,2005, 19(3):144 - 147.)
- [10] 姜启源.数学模型[M].北京:高等教育出版社,1993. (JIANG Qi-yuan. Mathematical model[M]. Beijing: Higher Education Press,1993.)
- [11] 刘琦,冯静,周经纶.基于专家信息的先验分布融合法[J].中国空间科学技术,2004,24(3):68 - 71. (LIU Qi, FENG Jing, ZHOU Jing-lun. The fusion method for prior distribution based on expert's information[J]. Chhinese Space Science and Technology, 2004, 24(3):68 - 71.)
- [12] 李晓勇,白晓红,谢康和.岩土参数概率分布统计意义上的优化分析[J].岩土工程技术,2001,15(3):130 - 133. (LI Xiao-yong, BAI Xiao-hong, XIE Kang-he. The statistically optimal analysis of probabilistic distribution about geotechnical paramaters[J]. Geotechnical Engineering Technique,2001, 15(3):130 - 133.)

《岩土工程学报》2006 年第 28 卷第 7 期被 EI 收录论文 (24 篇)

论文题目	作者	页码
基于模糊相似性之概率区间三维土壤地图	陈景文, 陈昶华	809~813
水下土石混合体的原位大型水平推剪试验研究	徐文杰, 胡瑞林, 曾如意	814~818
埋深基础沉降计算方法研究	梅国雄, 赵建平, 宰金珉, 赵维炳	819~822
土工合成材料循环受载、蠕变和应力松弛特性的统一本构模拟	刘华北	823~828
碎石-膨润土混合物之压实行为	田永铭, 吴柏林, 郭明峰	829~834
砂土液化后大变形的机理	张建民, 王刚	835~840
软弱地层管棚法施工中管棚作用空间分析	董新平, 周顺华, 胡新朋	841~846
海床波浪响应的积分变换解及其分析应用	王立忠, 潘冬子, 凌道盛	847~852
二布一膜改良路基试验研究	岳祖润, 赵玉成, 刘尧军, 孙铁成	853~856
基于 Monte Carlo 技术的临界滑面搜索算法的实现及改进	张鲁渝, 张建民	857~862
非饱和土的基质吸力和张力吸力	栾茂田, 李顺群, 杨庆	863~868
大型水电站导流洞围岩稳定分析	王海军, 张社荣, 练继建	869~873
利用弯曲元测试砂土剪切模量的国际平行试验	陈云敏, 周燕国, 黄博	874~880
二维颗粒堆中力传递的一个概率模型	蒋红英, 苗天德, 鲁进步	881~885
新型无网格法 (IMLS 方形域法) 的研究及其应用	张延军, 王恩志	886~890
饱和和软粘土的不排水循环累积变形特性	黄茂松, 李进军, 李兴照	891~895
公路软基超载预压机理研究	李国维, 杨涛, 殷宗泽	896~901
全长粘结式锚杆抗拔力计算公式的探讨	魏新江, 张世民, 危伟	902~905
某住宅楼倾斜原因与纠偏加固处理	王宝勋, 李夕兵, 张忠永, 郑作栋	906~909
台后填土对桥台桩基的影响分析	陈雪华, 律文田, 王永和	910~913
扰动土的结构参数	王秋生	914~917
基于现场监测的软土地基联合处理机理研究	徐超, 叶观宝, 姜竹生, 周启兆	918~921
边界元法模拟含随机分布裂纹介质中波的传播	韩开锋, 曾新吾	922~925
《岩土工程学报》1998~2004 年刊载论文统计分析	陈龙珠, 罗昊, 麦慧琳	926~821