

陡峭岩石边坡随机-模糊可靠度算法

李胡生¹, 叶黔元²

(1. 上海应用技术学院土建系, 上海 200235; 2. 上海理工大学城建学院, 上海 200093)

摘要: 给出了陡峭边坡极限平衡分析中计算随机-模糊可靠度的方法, 这种方法将模糊数学原理与可靠性理论结合起来, 导出了以模(糊事件)-精(确概率)指标表达的边坡工程随机-模糊可靠度公式, 既考虑了岩石边坡工程的客观本质又满足了稳定性定量评价的要求, 具有确定的数学表达形式, 便于应用。

关键词: 岩土力学; 边坡工程; 可靠性理论; 模糊可靠度

中图分类号: TU45

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2006)08-1019-04

作者简介: 李胡生(1960-), 男, 博士, 主要从事岩土工程稳定性方面的研究。

Calculation of random-fuzzy reliability of steep slopes

LI Hu-sheng, YE Qian-yuan

(1. Shanghai Institute of Technology, Shanghai 200235, China; 2. University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The method for calculating the random-fuzzy reliability in the limit equilibrium analysis of the stability of the steep slopes was given. The corresponding calculating formulas were deduced by combining fuzzy mathematics with the reliability theory. The random-fuzzy reliability of the slope engineering was expressed by the fuzzy (event)—exact (probability) index in the suggested method. Both of the objective attributes of the rock soil mass and the quantitative evaluation of the slope engineering stability were considered at the same time. The calculating formulas in the method are determinate and convenient for use.

Key words: rock mechanics; slope engineering; reliability theory; fuzzy reliability

0 引言

工程实践中, 由于工程需要、自然环境或综合因素的影响, 出现了陡峭的边坡。从滑床整体极限平衡角度看, 滑床可看为一个单元, 这时单元可靠度即是边坡的可靠度。因此, 可采用计算单元可靠度的方法来计算滑床可靠度。深入的研究表明: 岩土体的力学特性同时包含着随机性和模糊性, 且其模糊性是一种比其随机性更深刻、更普遍的不确定性^[1]。随机性和模糊性相互渗透的影响, 使边坡工程的稳定状态具有随机模糊性。在对其进行稳定性分析时, 将岩土体力学参数值用其随机-模糊数字特征及分布取代, 进而确定安全裕度的随机-模糊数字特征及分布, 引入安全裕度隶属函数, 即可计算边坡的随机-模糊可靠度。

1 岩土力学参数变量随机-模糊数字特征的确定

1.1 随机-模糊均值、方差

若试验获得的某岩石力学参数容量为 n 的样本值为 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 记它们的随机-模糊平均值为 $\bar{x}$ 、随机-模糊方差为 σ^2 , 则样本值的随机-模糊均值为^[1]

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \exp[-2(x_i - \bar{x})^2 / (d_{1\max} - d_{1\min})] \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n \exp[-2(x_i - \bar{x})^2 / (d_{1\max} - d_{1\min})]} ; \quad (1)$$

而样本值的随机-模糊方差为

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^n \exp\{A_i / (d_{2\max} - d_{2\min})\} \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n \exp\{A_i / (d_{2\max} - d_{2\min})\}} . \quad (2)$$

式中 $d_{1\max}$ 、 $d_{1\min}$ 和 $d_{2\max}$ 、 $d_{2\min}$ 分别是 $(x_i - \bar{x})^2$ 中和 $[(x_i - \bar{x})^2 - \sigma^2]^2$ ($i=1, 2, \dots, n$) 中的最大、最小值, 而 $A_i = -2[(x_i - \bar{x})^2 - \sigma^2]^2$ 。

1.2 随机-模糊协方差

设 x 、 y 的样本分别为 x_i 、 y_i ($i=1, 2, \dots, n$), 它们之间的随机-模糊协方差为 σ_{xy} , 则其计算式为

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n \exp\{B / (d_{3\max} - d_{3\min})\} \cdot (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n \exp\{B / (d_{3\max} - d_{3\min})\}} , \quad (3)$$

基金项目: 上海应用技术学院引进人才科研基金资助项目(YJ2006-12)

收稿日期: 2006-03-28

式中, $B = -2[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) - \sigma_{xy}]^2$, $d_{3\max}$ 、 $d_{3\min}$ 是 $[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) - \sigma_{xy}]^2$ 中的最大值和最小值 ($i=1, 2, \dots, n$)。显然, 式 (1) ~ (3) 均为隐函数式, 实际计算采用迭代法, 详见文献[1, 8~11]。

2 岩土力学参数变量随机 - 模糊概型的确定

岩土力学变量的概率分布问题, 可以通过解求如下线性约束规划问题而获得:

$$\text{目标函数 } H = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i = \max, \quad (4)$$

$$\text{约束条件} \begin{cases} \sum_{i=1}^n p_i \mu_i = \alpha, \sum_{i=1}^n p_i x_i = \bar{x}, p_i > 0, \\ \sum_{i=1}^n p_i = 1, p(x_j) \leq p(x_i), \mu_A(x_j) \leq \mu_A(x_i). \end{cases} \quad (5)$$

式中 x_i ($i=1, 2, \dots, n$) 为变量 x 的样本值; $\bar{x}$ 为样本值的随机 - 模糊均值; p_i 为 x 取值 x_i 的概率; $\mu_i = \mu_A(x_i)$ 为隶属度; α 为一待定常数。

有关这个线性约束规划的建立和解法见文献[2]。

3 陡峭边坡破坏面形状的确定

图 1 所示是高为 H 的垂直边坡, 其可能的破坏面如图中的 $\widehat{AB}$ 曲线所示。文献[3]引进参数:

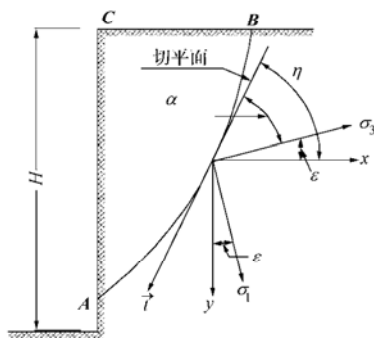


图 1 边坡剖面

Fig. 1 Section of steep slopes

$$1 - 1/(dx/dy)^2 = 1/\sqrt{t}, \quad (6)$$

取 x 、 y 为破坏面曲线 $\widehat{AB}$ 的流动坐标, t 为参数, r 为岩体的容重, σ_c 为岩体的单轴抗压强度, m 、 s 为 Hoek-Brown 破坏准则中的两个常数, 取决于岩体材料的性质, x_0 为积分常数。从而求得破坏面曲线 $\widehat{AB}$ 的参数方程为

$$x = \Omega(t) = \frac{m\sigma_c}{8r} [\ln(t^{0.25} + \sqrt{t^{0.5} - 1}) - \sqrt{t - t^{0.5}} (2t^{0.5} - 1)] + x_0, \quad (7)$$

$$y = \epsilon(t) = \frac{\sigma_c}{4mr} [m^2 t - (m^2 + 4s)] \quad (8)$$

取 A 点的坐标为 $A(0, y_1)$, B 点的坐标为 $B(x_2, 0)$, 则边界条件为

$$y = y_1, \quad x = x_1 = 0, \quad t = t_1, \quad (9)$$

$$y = 0, \quad x = x_2, \quad t = t_2. \quad (10)$$

将边界条件式 (9)、(10) 分别代入参数方程式 (7)、(8) 经整理后得

$$x_0 = \frac{m\sigma_c}{8r} [\sqrt{t_1 - t_1^{0.5}} \cdot (2t_1^{0.5} - 1) - \ln(t_1^{0.25} + \sqrt{t_1^{0.5} - 1})], \quad (11)$$

$$t_1 = \frac{4}{m} \left(\frac{r \cdot y_1}{\sigma_c} + \frac{s}{m} \right) + 1, \quad (12)$$

$$t_2 = \frac{4s}{m^2} + 1, \quad (13)$$

$$x_2 = \frac{m\sigma_c}{8r} [\ln(t_2^{0.25} + \sqrt{t_2^{0.5} - 1}) - \sqrt{t_2 - t_2^{0.5}} \cdot (2t_2^{0.5} - 1)] + x_0, \quad (14)$$

解方程 (11) ~ (13) 确定积分常数 x_0 和曲线 $\widehat{AB}$ 起止点参数 t_1 、 t_2 。

4 破坏面上载荷响应 S 及其允许值 R 的确定

文献[4]基于莫尔圆包络线, 推求得岩石破坏面上的正应力和剪切应力为

$$\sigma_\alpha = \frac{m\sigma_c}{8} \left[\frac{1}{2\cos^2 2\alpha} - \cos 2\alpha \right] - \sigma_c \left(\frac{3m}{16} + \frac{s}{m} \right), \quad (15)$$

$$\tau_\alpha = -m\sigma_c \frac{\tan 2\alpha + \sin 2\alpha}{8}, \quad (16)$$

式中 σ_α 、 τ_α 为岩石破坏面上的正应力、剪切应力, α 为破坏面的切面与最小主应力的夹角; 其他符号同前。记岩体破坏面上微元长度为 dL , 并假设在 dL 上正应力和剪应力不变, 那么作用在 dL 上的法向力 $dR_n = \sigma_\alpha \cdot dL$ 和切向力 $dS_t = \tau_\alpha \cdot dL$ 及抗剪力 $dR_r = (\sigma_\alpha \cdot f + c) \cdot dL$ 和剪切力 $dS_r = dS_t$ 。

对于这里的陡峭边坡, 由于最小主应力方向接近水平, 故 $dy/dx = \tan \alpha$ 、 $dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ 。

顾及到式 (6)、(15)、(16) 并经三角转换, 可得

$$R = \frac{m\sigma_c}{16\sqrt{2}r} \left[c - \sigma_c f \left(\frac{3m}{16} + \frac{s}{m} \right) \right] [(4t^{0.5} - 1)\sqrt{4t - 2t^{0.5}} -$$

$$\ln(\sqrt{2t^{0.25} + \sqrt{2t^{0.5} - 1}})] \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{15m^2\sigma_c^2 f}{12288\sqrt{2}r} \left\{ \frac{48\sqrt{2}}{15} \cdot \right.$$

$$\sqrt{2t - t^{0.5}} \cdot [(2t^{0.5} - 1)^3 + \frac{1}{6}(2t^{0.5} - 1)^2 - \frac{5}{24}(2t^{0.5} - 1) +$$

$$\frac{15}{48}] - \ln(\sqrt{2t^{0.25} - \sqrt{2t^{0.5} - 1}})] \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{m^2\sigma_c^2 f}{32r} \cdot$$

$$[t^{0.25}\sqrt{2t^{0.5} - 1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2t^{0.25} + \sqrt{2t^{0.5} - 1}})] \Big|_{t_1}^{t_2}, \quad (17)$$

$$S = \frac{m^2\sigma_c^2}{8r} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \sqrt{2t^{0.5} - 1} (t^{0.5} - 1)^{3/2} (8t^{0.5} - 1) + \frac{3 - 6\sqrt{2}}{48} \right.$$

$$[\sqrt{2t^{0.5} - 1}\sqrt{2(t^{0.5} - 1)} - \ln(\sqrt{2t^{0.5} - 1} + \sqrt{2(t^{0.5} - 1)})] \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (18)$$

5 安全裕度的概率密度函数的确定

安全裕度定义为

$$Z = R - S \quad (19)$$

实际工作中, R 和 S 的概型通常进行当量正态化处理, 这样安全裕度 Z 也属于正态分布。将前述所有公式中的 σ_c 、 r 、 c 、 f 视为随机-模糊变量, 并依式(17)~(18)将抗力和响应写成

$$R = F_1(\sigma_c, r, c, f), \quad S = F_2(\sigma_c, r, c, f) \quad (20)$$

依据数理统计知识并顾及到 c 、 f 的相关性可得到:

$$\bar{R} = F_1(\bar{\sigma}_c, \bar{r}, \bar{c}, \bar{f}) + \frac{\partial^2 F_1}{\partial c \partial f} \cdot \sigma_{cf} \quad (21)$$

$$\bar{S} = F_2(\bar{\sigma}_c, \bar{r}, \bar{c}, \bar{f}) + \frac{\partial^2 F_2}{\partial c \partial f} \cdot \sigma_{cf} \quad (22)$$

$$\sigma_R^2 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial \sigma_c}\right)^2 \cdot \sigma_{\sigma_c}^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial r}\right)^2 \cdot \sigma_r^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial c}\right)^2 \cdot \sigma_c^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial f}\right)^2 \cdot \sigma_f^2 + \frac{\partial F_1}{\partial c} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f} \cdot \sigma_{cf} \quad (23)$$

$$\sigma_S^2 = \left(\frac{\partial F_2}{\partial \sigma_c}\right)^2 \cdot \sigma_{\sigma_c}^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial r}\right)^2 \cdot \sigma_r^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial c}\right)^2 \cdot \sigma_c^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial f}\right)^2 \cdot \sigma_f^2 + \frac{\partial F_2}{\partial c} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial f} \cdot \sigma_{cf} \quad (24)$$

式中, $\bar{x}$ 、 σ_x^2 为随机-模糊变量 x 的随机-模糊均值和方差, σ_{cf} 为 c 、 f 间的随机-模糊协方差。依式(21)~(24)可得安全裕度 Z_1 的均值和方差为

$$\bar{Z} = \bar{R} - \bar{S}, \quad \sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 \quad (25)$$

于是安全裕度 Z 的概率密度函数可写成:

$$p(Z) = \frac{1}{\sigma_Z \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{Z - \bar{Z}}{\sigma_Z}\right)^2\right] \quad (26)$$

6 安全裕度隶属函数的确定

设 $Z > 0$, 这一模糊事件的论域为 A , 直接取安全裕度 Z 对 A 的隶属度为

$$\mu_A(z) = \begin{cases} 1 & z \geq 3\sigma_z \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi z}{6\sigma_z} & -3\sigma_z \leq z \leq 3\sigma_z \\ 0 & z \leq -3\sigma_z \end{cases} \quad (27)$$

选取上式是基于下面的考虑:

(1) 由式(27)可知, 当 $Z = 3\sigma_z$ 时, $\mu_A(Z) = 1$; $Z = -3\sigma_z$ 时, $\mu_A(Z) = 0$; $Z = 0$ 时, $\mu_A(Z) = 0.5$, 这样就把模糊区间限于正负三倍中误差以内, 且 $Z = 0$, 以 0.5 的隶属度成为模糊区间的中点。

(2) 由于 R 、 S 均为随机-模糊变量, 按照第一节观点, 它们的隶属函数应取为降半正太分布。由模

糊数的运算法则可知, 安全裕度的隶属度 $\mu_A(Z)$ 取 $\mu_R(R)$ 和 $\mu_S(S)$ 中较小者, 也会是降半正态分布或分段降半正态分布。但是, 降半正态分布有这样的特点: 当 Z 趋于负无穷时, $\mu_A(Z)$ 趋于 0, 这就意味着当响应比抗力极端大的情况下滑体仍有不滑的可能(只是可能性极小), 这显然与工程实际不符。所以降半正态分布的隶属函数用于可靠度计算时其尾部必须修正。选择如式(27)的隶属函数既能截去降半正态分布的尾部, 也能较好地与降半正态分布吻合。

7 边坡随机-模糊可靠度的计算

由岩土工程随机-模糊可靠度的概念和方法^[5]知, 这里边坡的随机-模糊可靠度为

$$P_r = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_A(Z) \cdot p(Z) dZ \quad (28)$$

将式(26)、(27)代入式(28)得:

$$P_r = \int_{-3\sigma_z}^{3\sigma_z} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi z}{6\sigma_z}\right) \frac{1}{\sigma_z \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{Z - \bar{Z}}{\sigma_z}\right)^2\right] dZ + \int_{3\sigma_z}^{\infty} \frac{1}{\sigma_z \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{Z - \bar{Z}}{\sigma_z}\right)^2\right] dZ \quad (29)$$

顾及到式(11)、(12), 易见上式是 y_1 的函数。为了确定边坡最终的随机-模糊可靠度, 必须搜寻出潜滑面的具体位置并计算其 P_r , 为此, 可按一定步长 Δy 将边坡高度 H 离散, 然后取

$$y_{li} = i \cdot \Delta y \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (30)$$

将式(30)代入式(29)可得到对应的一系列随机-模糊可靠度值为

$$\{P_{r1}, P_{r2}, \dots, P_{rj}, \dots, P_{rn}\} \quad (31)$$

选取式(31)中最小者为边坡的随机-模糊可靠度:

$$P_r = \min_{i=1}^n P_{ri} \quad (32)$$

而式(32)所对应的式(30)的值即为破坏面在边坡面上的出漏点, 该点所对应的式(11)的值即为积分常数的值, 而式(11)所得积分常数对应的方程组式(7)、(8)就是破坏面的方程。

整个边坡的随机-模糊可靠度的具体计算步骤如下: ①根据 Hoek-Brown 破坏准则^[6]确定岩体的质量指标 m 、 s ; ②根据实测数据, 依第一节的方法求得 σ_c 、 r 、 c 、 f 的随机-模糊均值和方差、协方差; ③根据第二节方法确定有关变量的随机-模糊概型并进行正态当量化; ④依文献[7]的方法求定岩体的折减指标和概型; ⑤将边坡高度离散, 并令 $y_1 = i \cdot \Delta y$, 并依据式(11)~(13)求得 t_1 、 t_2 、 x_0 ; ⑥依据式(17)、(18)求得 R 、 S 的表达式, 并依式(25)求出 $\bar{Z}$ 、 σ_z^2 和概率密度函数 $p(z)$; ⑦用式(29)并循环第5至第6步搜索出潜滑面及其随机-模糊可靠度。

8 算 例

为了验证本文理论方法的正确可行性，笔者依照本文所介绍的方法计算了如图 1 所示边坡的随机 - 模糊可靠度。该边坡坡角 90° ，坡高 20 m，计算中间参数为： $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$ ， $\sigma_c = 8.12 \text{ MPa}$ ； $s = 0.0004$ ， $m = 0.2$ ； $c = 1.56 \text{ MPa}$ ， $\varphi = 36^\circ$ 。各参数的离差系数及相关系数如表 1。由式 (11) ~ (14) 给出的计算结果如表 2。经过循环计算筛选出潜滑面的对应参数为： $y_1 = 20 \text{ m}$ ， $x_2 = 8.674 \text{ m}$ ， $x_0 = 8.681 \text{ m}$ ， $t_1 = 2.26$ ， $t_2 = 1.01$ ，相应的边坡体可靠度为 78.17%。

表 1 参数变异系数及相关系数

Table 1 Variant and correlative coefficients of parameters				
参数名称	容重 γ	单轴强度 σ_c	粘聚力 c	摩擦角 φ
变异系数	0.05	0.27	0.25	0.1
相关系数	—	—	0.3	

表 2 潜滑面参数计算结果

Table 2 Calculated results of parameters of potential slide surfaces

$y(m)$	$x(m)$	t	$y(m)$	$x(m)$	t
0	8.6735(x_2)	1.0100(t_2)	11	1.6975	4.8176
1	8.5361	1.0725	12	1.7600	4.3283
2	8.3176	1.1350	13	1.8225	3.8255
3	8.0461	1.1975	14	1.8850	3.3103
4	7.7335	1.2600	15	1.9475	2.7834
5	7.3873	1.3255	16	2.0100	2.2458
6	7.0216	1.3850	17	2.0725	1.6980
7	6.6131	1.4475	18	2.1350	1.1407
8	6.1917	1.5100	19	2.1975	0.5764
9	5.7508	1.5725	20	2.2600(t_1)	0.0000(x_1)
10	5.2922	1.3500			

9 结 语

本文所建议的极限平衡分析计算陡峭边坡随机 - 模糊可靠性的方法，包括了参数准备至可靠度计算的全过程，比较系统和完整，同时具有确定的数学表达形式，计算工作也比较简便，因而具有较好的实用性，便于应用。由于文中所建议的方法同时考虑了岩体力学特性的随机不确定性和模糊不确定性，反映了岩体的客观本质，并实现了模（糊事件） - 精（确概率）结合，从而又满足了对工程稳定性定量评价的需要，因而该方法优于传统的随机可靠度方法。

参考文献：

[1] 熊文林,李胡生.岩石样本力学参数值的随机 - 模糊处理方法[J]. 岩土工程学报, 1992,14(6):101 - 108. (XIONG Wen-lin, LI Hu-sheng. A random-fuzzy method for treating the experimental data of mechanical parameters of rock samples[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1992, 14(6):101 - 108.)

[2] 李胡生,熊文林.岩石力学参数概率分布的随机 - 模糊估计方

法[J]. 固体力学学报,1993,14(4):347 - 351. (LI Hu-sheng, XIONG Wen-lin. A random-fuzzy method for estimating the probability distribution of rock mechanical parameters[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 1993, 14(4):347 - 351.)

[3] AFROUZ A. Stability analysis of steep rock slopes[J]. Can Geotech J, 1989,26(4):31 - 45.

[4] UCAR R. Determination of shear failure envelope in rock mass[J]. Geotech Engineering, ASCE, 1986,113(3):232 - 241.

[5] 李胡生.岩土工程随机 - 模糊可靠度的概念和方法[J]. 岩土力学,1993,14(2):25 - 34. (LI Hu-sheng.The concept and calculating method of the random-fuzzy reliability theory for geotechnical engineering[J]. Chinese Journal of Rock and Soil Mechanics,1993,14(2):25 - 34.)

[6] HOEK E. Empirical strength criteria for mass[J]. Geotech, Engineering, ASCE, 1989,106(GT-9):524 - 531.

[7] 李胡生,熊文林. 岩体力学参数的工程模糊处理[J]. 水利学报,1994,17(1):76 - 85. (LI Hu-sheng, XIONG Wen-lin. Engineering fuzzy treatment of mechanical parameters of rock mass[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1994, 17(1):76 - 85.)

[8] 徐卫亚,蒋中明. 岩土样本力学参数的模糊统计特征研究[J]. 岩土力学, 2004, 25(3): 342 - 346. (XU Wei-ya, JIANG Zhong-ming. Research on fuzzy statistical values of samples of rock and soil[J]. Chinese Journal of Rock and Soil Mechanics, 2004, 25(3):342 - 346)

[9] 章杨松,罗国煜,等. 随机 - 模糊处理方法在岩石力学指标统计及岩组划分中的应用[J]. 工程地质学报,2001,9(2):182 - 187.(ZHANG Yang-song, LUO Guo-yu, et al. Application of the random-fuzzy method to progressing of experimental data of mechanical parameters of rock samples and dividing them into groups of rock mass[J].Chinese Journal of Engineering Geology,2001,9(2):182 - 187.)

[10] 黄志全,王思敬,等. 宝泉抽水蓄能电站岩体抗剪参数的选取[J]. 工程地质学报,1998,6(2):145 - 149. (HUANG Zhi-quan, WANG Si-jing, et al. Selection of shear parameters of rock mass for Baoquan pumping-storage power station[J]. Chinese Journal of Engineering Geology, 1998,6(2):145 - 149.).

[11] 王 鹏,李安贵,蔡美峰,杨 同. 基于随机 - 模糊理论的岩石抗剪强度参数的确定[J]. 岩石力学与工程学报,2005,24(4):547 - 552.(WANG Peng, LI An-gui, CAI Mei-feng, YANG Tong. Random-fuzzy monovariant linear regression method for determining the shear strength parameters of rock[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering,2005,24(4):547 - 552.)