

# 古典杨森散体压力理论的拓展及采矿工程中的应用

陈喜山

(青岛理工大学, 山东 青岛 266520)

**摘要:** 在古典杨森垂直状态假设的基础上, 导出了具有一定倾斜角度状态下的散体压力的新模型, 拓展了古典杨森理论的描述范围, 使其成为了新模型中倾角为 90° 的特例。同时, 结合采矿工程薄矿脉开采的实际, 提出了应用模拟实验对新模型进行修正的新方法, 通过对新模型的实验修正得出了一个可以用于采矿工程中描述薄矿脉开采底部压力的半理论半经验公式。该研究成果无论是对古典杨森理论的发展和采矿工程的应用均具有实际意义。

**关键词:** 散体压力; 基本假设; 采矿工程; 模拟实验

中图分类号: TD801 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2010)02-0315-05

**作者简介:** 陈喜山(1956-), 男, 齐齐哈尔人, 硕士, 教授, 长期从事矿山安全方面的研究工作。E-mail: chenxishan@qtech.edu.cn。

## Extension of classical Janssen loose mass pressure theory and its application in mining engineering

CHEN Xi-shan

(Qingdao Technological University, Qingdao 266520, China)

**Abstract:** Based on the assumption of the classical Janssen bulk solid pressure theory in vertical silos, a new theoretical equation of the pressure on silos or similar silos with dip angle is derived, which develops the using range of the classical Janssen theory and makes it a particular case of the new equation in 90° dip angle. At the same time, considering the practice of mining narrow vein in mining engineering, a new method of correcting the new equation is advanced by the simulation tests. By means of the correction on the new equation, a semi-theoretical and semi-empirical bottom pressure equation is obtained and used for mining narrow vein. The research results are of great significance to both the development of classical Janssen bulk solid pressure theory and the application of mining engineering.

**Key words:** bulk solid pressure; basic assumption; mining engineering; simulation test

## 0 前 言

从工程实践可知, 散体力学中的古典杨森压力理论由于其形式简便计算方便, 被广泛地应用于料仓的周壁和仓底的压力分析之中, 同时也广泛地应用于类似料仓的场合, 例如建筑工程中的基坑、矿山工程中充满矿石(或废石)等充填体的溜矿井、采空区等<sup>[1]</sup>。

古典杨森理论的垂直压力分布的表达式为<sup>[2-4]</sup>:

$$P_z = \frac{gS}{fKp} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{fKp}{S}z\right) \right] \quad (1)$$

式中  $P_z$  为料仓或类料仓底部所受的平均垂直压力 (Pa);  $g$  为充填散体的重度 ( $N/m^3$ );  $S$  为料仓或类料仓的水平断面积 ( $m^2$ );  $f$  为充填散体与侧壁的摩擦系数,  $f = \tan j$ ,  $j$  为充填散体与侧壁的摩擦角;  $p$  为料仓或类料仓的水平断面的周长 ( $m$ );  $z$  为充填散体的垂深,  $m$ ;  $K$  为充填散体的侧压力系数,

$K = \frac{1 - \sin q}{1 + \sin q}$ 。  $K$  值也称为 Renkine 系数<sup>[5]</sup>, 是在散体极限平衡状态下得出的<sup>[6]</sup>, 它反映散粒体的垂直压力和水平压力之间的关系。 $q$  值为散粒体之间的内摩擦角度。

古典杨森理论是在边壁垂直的料仓或类似料仓情况下, 假设垂直方向上散体重度不变, 垂直压力沿水平断面均匀分布以及散体内任意一点的水平压力与垂直压力成比例的三点假设下得出的。该理论基本上反映了散体的垂直压力随其深度和仓体或类仓体几何尺寸的变化规律。在该理论的实际应用中, 经常会遇到具有一定倾角的情况, 往往也用古典杨森理论进行描述。由于古典杨森理论只考虑了侧壁垂直的情况, 没有考虑到倾斜情况, 所以继续沿用该理论显然已不能

反映出所受压力随倾角的变化规律。针对这一问题国内外学者做了一定的工作，如前苏联的学者索科洛夫斯基等将仓体分为陡仓和坦仓对侧壁的压力进行了研究<sup>[5, 7]</sup>，分析研究过程较为复杂。随着进一步拓宽这一理论的应用领域，有必要对其进行探讨，拓展其应用范围，得出更加简便的理论分析式。

## 1 古典杨森散体压力理论的拓展

### 1.1 新模型的建立及求解

沿用上述古典杨森理论的3点假设：①垂直方向上散体重度不变；②垂直压力沿水平断面均匀分布；③散体内任意一点的水平压力与垂直压力成比例。

所建立起处于倾斜状态下（倾角为 $\alpha$ ）的力学分析模型如图1所示。

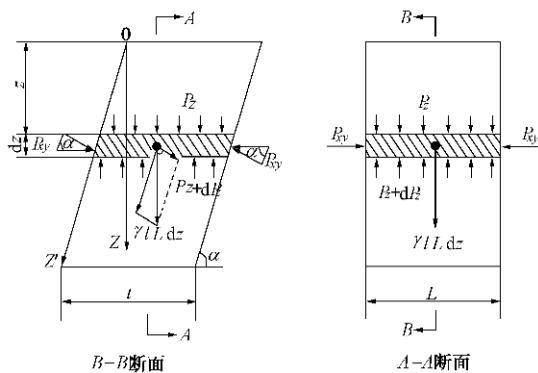


图1 力学分析模型

Fig. 1 Mechanical model

从图1模型料仓中取一水平的散体的微元片体进行受力分析。经分析可知，该微元片体共受到如下诸力的作用：

(1) 微元片体上表面将受到上部散粒体向下的压力 $P_z$ ，下表面将受到下部散体向上的压力 $P_z + dP_z$ 。

(2) 微元片体将受本身的重力 $gLl dz$ ，其中 $g$ 为散体的重度。

(3) 微元片体将受到两侧垂直仓壁上的摩擦力 $2P_{xy}fdz$ 和前后倾斜仓壁上的摩擦力 $2P_{xy}\sin\alpha \frac{dz}{\sin\alpha}fL$ ，其中 $f$ 为散体与仓壁之间的摩擦阻力系数， $f = \tan j$ ， $j$ 为散体与仓壁的摩擦角。

(4) 微元片体将受到本身的重力向下盘倾斜壁面的正压力 $gLl dz \cos\alpha$ 所形成的摩擦力 $gLl dz \cos\alpha f$ 。

将上述微元片体所受的诸力沿倾斜 $z'$ 方向投影，列出微元片体极限平衡状态的静力学平衡方程：

$$\sum F_{z'} = 2P_{xy} \sin\alpha \frac{dz}{\sin\alpha} fL + 2P_{xy} dz fL + (P_z + dP_z) \sin\alpha L - P_z \sin\alpha L - gLl dz \sin\alpha + gLl dz \cos\alpha f = 0. \quad (2)$$

根据古典杨森理论的第③条假设，即垂直压力与

水平压力成比例， $P_{xy} = KP_z$  ( $K = \frac{1-\sin q}{1+\sin q}$  称为侧压力系数， $q$ 为散体的内摩擦角)。将其代入平衡方程中整理得到：

$$\left[ g \left( \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} f - 1 \right) + 2KP_z \left( \frac{1}{l} + \frac{1}{L} \right) \frac{f}{\sin\alpha} \right] dz = -dP_z, \quad (3)$$

令 $F = g \left( \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} f - 1 \right)$ ， $Y = -2K \left( \frac{1}{l} + \frac{1}{L} \right) \frac{f}{\sin\alpha}$ ，式(3)变换为

$$\frac{dz}{dP_z} = -\frac{1}{F - Y P_z}. \quad (4)$$

解此微分方程可得

$$-\frac{1}{Y} \ln(F + Y P_z) = Z + C, \quad (5)$$

代入边界条件，当 $Z = 0$ 时， $P_z = 0$ ，求出积分常数 $C$ ，再同 $F$ 和 $Y$ 一起代回式(5)中得到最终的解：

$$P_z = \frac{g \left( 1 - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} f \right) \sin\alpha}{2K \left( \frac{1}{l} + \frac{1}{L} \right) f} \left\{ 1 - \exp \left[ -2K \left( \frac{1}{l} + \frac{1}{L} \right) \frac{f}{\sin\alpha} z \right] \right\}. \quad (6)$$

式(6)即为在古典杨森压力理论3点假设下导出的倾斜料仓或类似于倾斜料仓情况下的垂直平均压力的分布式。

### 1.2 解的分析

由图1设 $S = lL$  (料仓的水平面积)， $p = 2(l+L)$

(某水平面上仓壁的周长)， $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$  代入式(6)中整理，可得

$$P_z = \frac{gS}{fKp} \sin\alpha \left( 1 - \frac{f}{\tan\alpha} \right) \left[ 1 - \exp \left( -\frac{fKp}{S \sin\alpha} z \right) \right]. \quad (7)$$

可以看出，式(7)中不仅包括了古典杨森散体压力理论式中的全部物理量，同时也包括了与倾角 $\alpha$ 的变化关系。

(1) 考查 $\alpha \rightarrow 90^\circ$ 的情况可知，此时式(7)中的 $\sin\alpha \rightarrow 1$ ， $\tan\alpha \rightarrow \infty$ ， $(1 - \frac{f}{\tan\alpha}) \rightarrow 1$ ，式(7)回到古典杨森散体压力理论式，即式(1)的形式。这一结果说明古典杨森散体压力理论是式(7)当 $\alpha \rightarrow 90^\circ$ 的特例。换句话说，式(7)是古典杨森散体压力理论的拓展。

(2) 考查 $z \rightarrow \infty$ 的情况可知，此时式(7)中的 $\left[ 1 - \exp \left( -\frac{fKp}{S \sin\alpha} z \right) \right] \rightarrow 1$ 。由 $f = \tan j$ ，式(7)变为

$$P_z = \frac{gS}{Kp} \frac{\sin\alpha}{\tan j} \left( 1 - \frac{\tan j}{\tan\alpha} \right). \quad (8)$$

式(8)说明，当散体本身的性质( $g, q$ )、散体与仓壁的摩擦角 $j$ 、仓体的倾角等几何尺寸确定后，

散体的垂直深度深到一定值时, 对仓底的压力将不再增加或增加很小。这一点通过试验实测以及前人的工作得以充分证明<sup>[1, 4]</sup>。

(3) 考查  $a \rightarrow j$  的情况可知, 此时对仓底的压力趋于 0。这一点说明, 当仓体的倾角等于散体与仓壁的摩擦角时, 仓底所受的压力最小。事实上, 由于散体的流动性作用是不可能等于 0 的。出现 0 现象的原因主要是由于古典杨森理论的刚性微元片体的假设与实际散体情况不相附所导致的。因此, 在实际应用中必须根据具体的情况通过试验对偏差加以修正。

对前述得到的解析解分析可知, 式(7)基本上正确反映了倾斜状态下的料仓中散体垂直压力随其本身的性质、料仓几何尺寸和倾角的变化趋势, 对于类似问题的研究具有实际意义。

## 2 古典杨森散粒体压力拓展式在采矿工程中的应用

### 2.1 有关问题的提出

对于金属矿山来说, 由于欲开采矿体多以一定的倾角赋存于地下, 有时厚度也较薄。对于这类矿体一般需采用特定的采矿方法将其采出。为了控制地压, 保证开采作业的安全, 矿体采完形成的空区需采用井下废石或预留矿石进行充填。为了不影响采矿场下部的行人运输, 经常在开采矿石之前于即将形成采矿场的底部和人行运输巷道之间预留矿柱(称为矿石底柱), 或人工浇筑钢筋混凝土隔板, 或用圆木(称为人工底柱)搭建隔层, 挡住采矿场中的充填废石或预留的矿石(留矿法)。如图 2 所示。

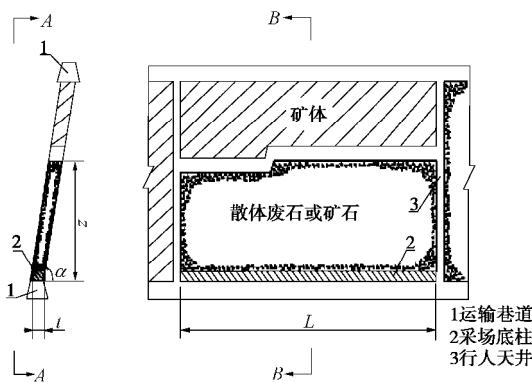


图 2 采矿场示意图

Fig. 2 Mine stope

因此, 随着不断的向上分层回采矿石, 整个采矿场便形成了一个充满废石(或矿石)的类似于一个扁平形状的倾斜料仓。

从图 2 中可知, 无论是矿石底柱还是人工底柱都必将承受着来自于采矿场内充填的散粒体废石或散粒

体矿石的压力。采矿场底柱上所受的压力及其规律一直没有令人满意的解释, 使之在工程设计中具有较大的盲目性。

### 2.2 解析式的简化

为了将式(3)应用于图 2 所示采矿场底柱受压分析, 为底柱设计提供可靠的计算结果, 根据采矿场的特点对式(3)进行如下简化。

首先, 将式(3)变为如下形式:

$$P_z = \frac{g(1 - \frac{\tan j}{\tan a})l \sin a}{2K(1 + \frac{l}{L}) \tan j} \left\{ 1 - \exp \left[ -2K(1 + \frac{l}{L}) \frac{\tan j}{l \sin a} z \right] \right\}。 \quad (9)$$

由于金属矿山在薄矿脉开采过程中, 采矿场的长度  $L$  很长, 而采矿场的宽度(或矿体厚度)  $l$  却很窄, 即  $l/L \ll 1$ , 对上式的计算结果影响甚小, 工程上完全可以忽略不计, 因此式(9)可以变为

$$P_z = \frac{gl \sin a}{2K \tan j} \left( 1 - \frac{\tan j}{\sin a} \right) \left[ 1 - \exp \left( -2K \frac{\tan j}{l \sin a} z \right) \right]。 \quad (10)$$

尽管式(10)已基本反映了散体物料对底部的压力规律, 但是, 还不足以直接应用于采矿工程的实际, 主要是由于理论模型建立过程中古典杨森理论的假设不一定完全符合所研究问题的实际情况, 在量值上势必要有一定的偏差。因此, 有必要针对具体情况对理论式进行模拟试验修正, 使其更能反映具体条件下的实际情况。

模拟实验采用的物料为尺度粒度为 20~50 mm, 内摩擦角为 33°, 重度约为 1600×9.8 N/m³ 的碎石。模型结构尺寸为长×宽×高=2000 mm×250 mm×2500 mm。经测定模型壁面与碎石的摩擦角约为 40°。

### 2.3 理论平均压力计算式的修正及压力分布

对理论公式的修正必须是无量纲的模拟实验修正才具有普遍意义。模拟实验前将式(10)中的  $z/l$  定义为高宽比, 即指采场充填散体的垂直埋深与采场长度的比, 成为一个无量纲的变量。经处理后分别对当  $a \rightarrow 90^\circ$ ,  $z/l \rightarrow \infty$  时的最大压力值  $P_{zm} = gl \sin a / 2K \tan j$ 、倾角项  $1 - \tan j / \tan a$  以及高宽比  $z/l$  分别设定修正系数  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 。式(5)将变为

$$P_z = AP_{zm} \left( 1 - \frac{\tan j}{\tan a} \right)^B \left[ 1 - \exp \left( -2K \frac{\tan j}{\sin a} C \frac{z}{l} \right) \right]。 \quad (11)$$

#### (1) 断面最大平均压力值的修正

分析可知, 当采矿场倾角为 90° 时, 模型实验时在采矿场模型中选一有代表性的压力最大断面, 对在该断面上的平均压力随高宽比(令  $x = z/l$ )变化的试验数据回归, 得出采场垂直时底板所受的平均压力随高宽比变化的回归方程:

$$P'_z = 19.3 e^{-\frac{0.98}{x}}。 \quad (12)$$

当倾角为  $90^\circ$  时, 令  $x=z/l \rightarrow \infty$ , 便得到该断面的极限最大的实际均布压力值  $P'_z=19.3$  (kPa)。再由式(6)取  $a=90^\circ$ ,  $z/l \rightarrow \infty$ , 得出理论均布压力的最大值  $P_{zm}=gl \sin a / 2K \tan j$ 。

将模拟实验的散体物料参数和模型采场的尺寸  $f=33^\circ$ ,  $q=40^\circ$ ,  $l=0.25$  m,  $g=1600 \times 9.8$  N/m<sup>2</sup>。代入上式中, 计算的  $P_{zm}=13.917$  kPa。可见理论计算值小于模拟实验值, 两者之间的修正系数应为

$$A=P'_z/P_{zm}=19.3/13.917=1.386 \approx 1.39$$

### (2) 高宽比的修正

由式(11)令  $a \rightarrow 90^\circ$  经整理可得到:

$$1-P_z/AP_{zm}=\exp(-2K \tan j C z/l), \quad (13)$$

等号两边取对数, 令  $X=z/l$ ,  $Y=\ln(1-P_z/AP_{zm})$ ,  $D=-2K \tan j C$ 。得到直线方程:

$$Y=DX \quad (14)$$

将模型实验中的高宽比、最大压力值和随不同的高宽比变化的垂直平均压力值分别代入得到  $Y$  关于  $X$  的散点图, 如图 3 所示。

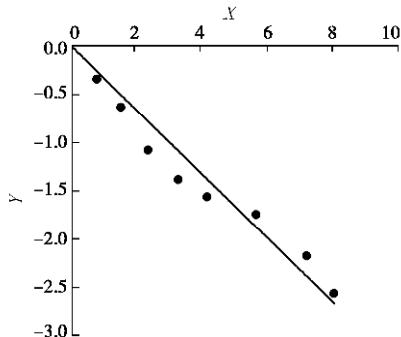


图 3 散点图

Fig. 3 Scatter diagram

选择形如式(14)的直线方程对图上的散点回归, 得出直线方程  $Y=-0.332X$ 。与式(14)比较可知  $D=-0.332=-2K \tan j C$ , 把模拟实验散体物料的参数  $j=33^\circ$ ,  $q=40^\circ$  代入, 即可求出  $C \approx 1.18$ 。

### (3) 倾角项的修正

由式(11)可知, 当高宽比  $z/l \rightarrow \infty$  时, 有:

$$\frac{P_z}{AP_{zm}}=\left(1-\frac{\tan j}{\tan a}\right)^B, \quad (15)$$

等号两端取对数, 令  $Y=\ln(\frac{P_z}{AP_{zm}})$ ,  $X=\ln(1-\frac{\tan j}{\tan a})$ ,

得到:

$$Y=BX \quad (16)$$

在模拟实验中, 调整模型采场的倾角为  $60^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $90^\circ$ , 可得到各个倾角下垂直平均压力随高宽比变化的四幅散点图。由形如  $P_z=a e^{-\frac{b}{x}}$  (其中  $x=z/l$ ) 的方程, 对 4 幅散点图的散点进行回归, 分别得出回归方程。再令高宽比  $x=z/l \rightarrow \infty$ , 得到在 4 个不

同倾角下的最大垂直平均压力数值分别为:  $a=60^\circ$ ,  $P_{60^\circ m}=8.82$  kPa;  $a=70^\circ$ ,  $P_{70^\circ m}=17.64$  kPa;  $a=80^\circ$ ,  $P_{80^\circ m}=16.76$  kPa;  $a=90^\circ$ ,  $P_{90^\circ m}=19.30$  kPa。

令  $AP_{zm}=P_{90^\circ}=19.30$ ,  $j=33^\circ$ , 和上述 4 组数据分别代入  $X, Y$  式中, 得到如图 4 所示的散点图。

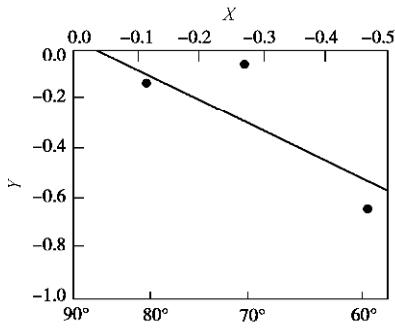


图 4 散点图

Fig. 4 Scatter diagram

然后, 选择形如式(16)的直线方程对图 4 中的散点回归得出直线方程  $Y=1.164X$ 。将其再与式(16)比较, 可得到  $B \approx 1.16$ 。应当指出, 上述 3 个系数  $A$ ,  $B$ ,  $C$  的修正均在无量纲条件下的直线修正, 所得到的修正系数具有普遍意义。通过上述 3 个方面的修正, 采矿场中充填废石(或矿石)对底柱(包括矿石底柱和人工底柱)的均布压力公式应为

$$P_z=1.39 \frac{gl \sin a}{2K \tan j} \left(1-\frac{\tan j}{\tan a}\right)^{1.16} \cdot [1-\exp(-2K \frac{\tan j}{\sin a} 1.18 \frac{z}{l})], \quad (17)$$

鉴于采矿工艺和矿体赋存条件的限制, 该公式的应用范围应为  $55^\circ \leq a \leq 90^\circ$ ;  $l \leq 3$  m。

### (4) 断面压力分布及最大压力值

以上得到的杨森古典散体压力的拓展式和经修正后用于计算采矿场充填物料压力的公式均为平均压力计算式。在模拟实验测定和实际采场测定表明, 散体对于采矿场底柱(无论矿石底柱还是人工底柱)压力沿水平宽度上均近似于抛物线形分布。而在采矿场底柱设计中(特别是人工底柱设计中), 从安全的角度出发, 应以横断面上类似于抛物线形压力分布情况作为依据, 计算采矿场底柱的受力, 确定底柱的结构参数。

由抛物线分布可知存在着一个最大压力点。根据抛物线的性质, 采矿场水平宽度上散体对底柱的最大压力值应为均布压力值的  $3/2$  倍。因此, 即可得出底柱所受最大压力值的计算式为

$$P_{z \max}=\frac{3}{2}P_z=\frac{3}{2}AP_{zm} \left(1-\frac{\tan j}{\tan a}\right)^B \cdot [1-\exp(-2K \frac{\tan j}{\sin a} C \frac{z}{l})], \quad (18)$$

此式的应用范围仍为  $55^\circ \leq a \leq 90^\circ$ ,  $l \leq 3\text{m}$ 。

### 3 杨森拓展式实际检验

图5,6中的实测曲线分别给出了黄金矿山薄矿脉开采过程中实测的采矿场底柱均布压力和最大压力随采矿场高宽比增加的变化规律。

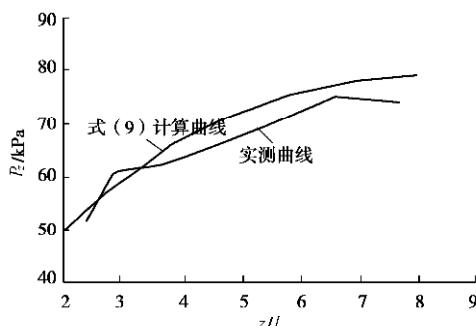


图5 均布压力随高宽比的变化

Fig. 5 Variation of average pressure with height-width ratio

经实测采矿场中散体物料(充填废石)的重度为  $g = 18500 \text{ N/m}^3$ , 内摩擦角为  $j = 40^\circ$ , 与岩壁的摩擦角为  $q = 37^\circ$ , 测定断面矿脉(采矿场)的倾角为  $a = 69.7^\circ$ , 采场水平宽度为  $l = 1.6\text{m}$ 。

为了在采场实测时压力传递均匀, 实测时在安装传感器的人工底柱上面先铺上了一层厚度约为1m的模拟实验时用的碎石。

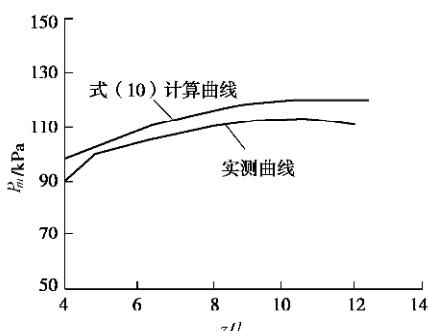


图6 最大压力随高宽比的变化

Fig. 6 Variation of maximum pressure with height-width ratio

将上述实际充填物料(采场充填废石)物理参数分别代入式(17)、(18)中计算结果绘入图5,6之中, 与实测值比较表明式(17)、(18)的计算结果与实测值较为接近, 完全可以应用于工程实际计算。

### 4 结语

本文所导出的古典杨森散体压力理论的拓展式、半理论半经验公式和理论式的修正方法也适用于其它类似的情况。可以根据不同的实际问题按此方法对古典杨森散体压力理论进行模拟实验修正, 得到特定条

件下可以应用于实际情况的半理论半经验计算式。

本文虽然在一定的范围内得到了较为实用的半理论半经验公式(17)、(18), 但是由于基本假设未必完全适合于实际情况, 所以半理论半经验公式还难以得到更广泛应用。故此, 对于古典杨森理论和本文中的拓展式(7)仍然需要开展进一步的研究, 尽量使得基本假设符合实际, 减少经验性的修正系数, 使之理论性更强, 公式更加符合实际规律。

### 参考文献:

- [1] 刘海田, 李卫孝. 适合急倾斜薄矿脉机械化充填采矿法底部结构的探讨[J]. 黄金, 1990, 11(2): 8 - 13. (LIU Hai-tian, LI Wei-xiao, et al. The discussion on the bottom structure suited for the mechanization filled stopes method of high dip narrow weins[J]. Gold, 1990, 11(2): 8 - 13. (in Chinese))
- [2] 王丽艳, 袁新明. 贮料对钢仓壁面静动压力特性的弹塑性分析[J]. 四川建筑科学研究, 2006, 32(3): 23 - 25. (WANG Li-yan, YUAN Xin-ming, et al. The elastic analysis of the bulk solid static pressure on the silo walls[J]. Building Science Research of Sichuan, 2006, 32(3): 23 - 25. (in Chinese))
- [3] 刘贵全, 等. 圆形筒仓贮料压力计算公式的改进分析[J]. 电力学报, 1994, 9(4): 19 - 24. (LIU Gui-quan, et al. The analysis and the improvement on the bulk solid pressure calculate equation in barrel silo[J]. Journal of Electricity Engineering, 1994, 9(4): 19 - 24. (in Chinese))
- [4] Г R 克列因. 散体结构力学[M]. 陈万佳译. 北京: 中国铁道出版社, 1983: 235 - 241. (Bulk solid structural mechanics[M]. CHEN Wan-jia, translator. Beijing: Chinese Railway Publishing House, 1983: 235 - 241. (in Chinese))
- [5] LIEVIN A. Pressur exerted on the walls of silo[J]. Bulk Solid Handling, 1987, 12(3): 98 - 105.
- [6] W 瑞斯涅尔, M V 艾森哈特. 料仓[M]. 罗齐著, 耿光斗, 译. 北京: 中国建筑工业出版社, 1978: 123 - 127. (Stock Bin[M]. GENG Guang-dou, translators. Beijing: China Architecture and Building Press, 1978: 123 - 127. (in Chinese))
- [7] SOKOLOFF B B. 论松散介质的极限平衡[M]. 北京: 科学出版社, 1957: 68 - 88. (SOKOLOFF B B. Discuss on the limiting equilibrium of ravelly medium[M]. LIN Hong-sun, translator. Beijing: Science Press, 1957: 68 - 88. (in Chinese))