

非饱和土本构关系及变形计算

殷宗泽¹, 周建², 赵仲辉¹, 袁俊平¹, 张坤勇¹

(1. 河海大学岩土工程研究所, 江苏 南京 210098; 2. 浙江大学岩土工程研究所, 浙江 杭州 310027)

摘要:总结了非饱和土本构模型当前研究的新进展, 包括弹性模型、巴塞罗那模型的各种改进, 其它形式包含吸力的应力变量模型、膨胀土弹塑性模型、损伤力学模型、热力学模型、浸水变形计算模型等。同时总结了这些模型用于有限元计算时所解决的问题, 包括吸力的确定、矩阵的形成等。

关键词: 非饱和土; 本构关系; 有限元计算

中图分类号: TU44

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2006)02-0137-10

作者简介: 殷宗泽(1937-), 男, 江苏海安人, 教授, 博士生导师, 主要从事土体本构关系、土工数值分析等方面的研究工作。

Constitutive relations and deformation calculation for unsaturated soils

YIN Zong-ze¹, ZHOU Jian², CHIU C F¹, YUAN Jun-ping¹, ZHANG Kun-yong¹

(1. Geotechnical Research Institute of Hohai University, Nanjing 210098, China; 2. Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: The state of the art in the constitutive relations for unsaturated soils was summarized, including elastic models, Barcelona elastic-plastic model and its various modified forms, models using suction as stress variables, elastic-plastic models for expansive soils, damage models, thermo-mechanical models and models for wetting induced deformation. The problems related to the implementation of these models in the finite element analysis were also presented, including determination of suction and matrix formulation.

Key words: unsaturated soils; constitutive relations; finite element analysis

0 引言

饱和土的变形主要受应力影响, 其本构关系是指应力-应变关系。非饱和土的变形除了受应力影响外, 还与土体中水分含量有关, 非饱和土的本构关系是指应力、水分与应变的关系。土体中水分的变化对变形的影响包含两层意思。

(1) 由水分变化直接引起的变形。如水分蒸发导致土体变干, 体积收缩; 相反, 土体吸水后膨胀, 引起体积增加(有些土吸水后收缩, 如湿陷性黄土)。

(2) 水分的变化引起土体强度的变化和硬软的差异, 从而影响变形。即使软粘土晒干后也会很硬, 施加相同荷载所产生的变形就会减小。因此非饱和土的本构模型要能反映应力和水分变化对变形的影响, 且关于水分的影响又要能反映这两方面的变形性状。

非饱和土应变可认为由两部分组成, 即

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon_\sigma\} + \{\Delta\varepsilon_s\} \quad (1)$$

式中 $\{\Delta\varepsilon_\sigma\}$ 和 $\{\Delta\varepsilon_s\}$ 分别为应力和水分引起的应变。

$$\{\Delta\varepsilon_\sigma\} = [C_\sigma] \{\Delta\sigma\} \quad (2)$$

$$\{\Delta\varepsilon_s\} = [C_s] \{\Delta s\} \quad (3)$$

$[C_\sigma]$ 是通常的应力应变柔度矩阵, 但它随水分而变化。用变量吸力 s 反映土中水分, $[C_\sigma]$ 应随吸力 s 变化。 $[C_s]$ 表示吸力与应变关系的柔度矩阵, 它应随应力变化。由应力引起的变形与由吸力引起的变形之间存在耦合关系。非饱和土本构模型就是要提出 $[C_\sigma]$ 和 $[C_s]$ 矩阵的确定方法, 包括所含参数的确定方法。

1 饱和度和吸力

在本构模型中用什么物理量反映水分变化对变形的影响, 有两种选择: ①饱和度或含水率; ②吸力。分别讨论如下。

1.1 饱和度(或含水率)

浸水变形是土体由初始饱和状态($S_r = S_{r0}$)到饱和状态($S_r = 100\%$)的变形量。可通过浸水前后压缩系数或弹性模量与泊松比的不同来反映。它又与应力状态有关, 目前大多通过试验建立浸水变形随应力状态变化的经验公式, 应用时根据实际应力状态用经验

公式计算,如一维问题中黄土的湿陷系数,膨胀土的有压膨胀率等都可用这样的计算方法。而二、三维的土坝浸水变形要复杂得多,需要确定浸水变形的各应变分量。

用饱和度(或含水率)的变化计算变形是非饱和土本构模型的一种形式,但目前主要限于两个特定的饱和度之间的浸水变形,要将饱和度(或含水率)作为连续变量加入到非饱和土本构模型中,难度有两点。

(1) 试验时只能控制试样的初始饱和度,三轴试样包在橡皮膜中,试验中无法测出加荷变形过程中饱和度的变化,又无法控制饱和度为常量,因此难以建立相应的经验公式。

(2) 对二、三维问题,计算饱和度变化引起的各应变分量没有恰当的理论,须作近似处理的补充假定,这些假定理论上不严密。

用饱和度(或含水率)作为本构模型中的变量工程师们更容易接受,实际应用也很方便,比用吸力或其它变量更易于推广,作为一种近似计算也值得深入研究和进一步发展。

1.2 吸力

吸力是一种应力,与荷载一样可以直接引起变形,吸力与应变的关系也是一种应力应变关系。将吸力作为物理量引入本构模型可以利用弹性模型或弹塑性模型中的现成假定,如加载与卸载时变形的差异、应变增量的方向等,不需要补充其他假定,因此更直接、更严格。这类本构模型能反映水分(表现为吸力)连续变化引起的变形。

吸力为变量的另一个重要优点是试验过程中可以任意控制吸力的变化,并通过量测水压和气压,掌握吸力在加荷过程中的变化。如控制吸力不变,对三轴仪试样而言,只要保持试样下部陶土板处水压力和顶部通入的气压不变即可。

应用吸力为一变量是非饱和土本构模型的主要发展方向。但应用时要知道土体中吸力的变化情况,因此须先作非饱和土的渗流计算或固结计算,或者将吸力、应力和应变的计算一起纳入固结计算中,这样计算比较麻烦。

一般地说,非饱和土的应力变形问题用吸力,或饱和度变化计算都可以,但也要根据实际情况具体分析。如土石坝坝壳料初次蓄水变形就不能使用含吸力变量的本构模型,因为堆石料孔隙大、吸力很低,这时只能用浸水变形方法计算。

2 非饱和土应力-吸力-应变关系

2.1 弹性模型

土的力学性状取决于土中的应力状态,描述非饱

和土的应力状态一般采用两个独立应力状态变量。最常采用的应力状态变量为净法向应力($\sigma^* = \sigma - u_a$)和吸力($s = u_a - u_w$), σ 为总法向应力, u_a 为孔隙气压力, u_w 为孔隙水压力,本文描述的本构模型大部份基于上述两个应力状态变量。

Fredlund, Morgenstern^[1]及 Fredlund^[2]提出以下弹性关系:

$$d\varepsilon_1 = \frac{d\sigma_1^*}{E} - \frac{v d\sigma_2^*}{E} - \frac{v d\sigma_3^*}{E} + \frac{ds}{H} \quad (4)$$

$$d\theta_w = \frac{dp}{K_w} + \frac{ds}{H_w} \quad (5)$$

式中, θ_w 为体积含水量, p 为平均净应力,弹性参数 E 、 v 、 H 、 K_w 和 H_w 都是应力的函数。

Lloret 等^[3]提出:

$$d\varepsilon_v = \frac{dp}{K} + \frac{ds}{F} \quad (6)$$

$$d\varepsilon_s = \frac{dq}{3G} \quad (7)$$

其中模量 K 和 F 均是应力的函数,可以通过下式孔隙比 e 状态面方程求得:

$$e = a + b \log \sigma^* + c \log s + d \log \sigma^* \log s \quad (8)$$

式(8)定义为一个弯曲面,可以反映非饱和土的湿陷性或湿胀性。式(7)中的剪切模量 G 可用下面双曲线模型表达:

$$G = [G_0 + ms][1 - \frac{Rq}{q_f}]^2 \quad (9)$$

式中 G_0 、 m 和 R 为土体常数。破坏时的偏应力 q_f 用 Fredlund 等(1978)^[4]提出的非饱和土抗剪强度表达式计算:

$$\tau = c' + \sigma^* \tan \phi' + s \tan \phi^b \quad (10)$$

Lloret 等人同时提出饱和度 S_r 状态面方程:

$$S_r = a' + [c' + d' \cdot \sigma^*] Th[b's] \quad (11)$$

杨代泉^[5]提出下列非线性模型:

$$\{\Delta \varepsilon\} = [C] \{\Delta \bar{\sigma}\} + c_d \sigma_s \{M\} + c_b \Delta s \{M\} + c_s \Delta s \{\bar{s}_d\} / \sigma_s \quad (12)$$

式中 $[C]$ 为弹性柔度矩阵; c_d 为剪(胀)系数; c_b 为湿陷(胀)系数; c_s 为湿剪系数; $\{\bar{s}_d\}$ 为偏应力分量; Δs 是吸力增量; σ_s 为广义切应力; $\Delta \bar{\sigma}$ 为净应力增量; $[C] \{\Delta \bar{\sigma}\}$ 为由净应力增量引起的应变,满足广义虎克定律; $c_d \sigma_s \{M\}$ 为由广义剪应力引起的应变; $c_b \Delta s \{M\}$ 为由吸力变化引起的应变; $c_s \Delta s \{\bar{s}_d\} / \sigma_s$ 表示增湿引起的剪切变化。要用流动法则算出各分量。

陈正汉等^[6]提出的非线性模型可看作是饱和土邓肯-张模型在非饱和土中的推广。主应变和体积分量的增量形式分别与式(4)、(5)相近,但弹性参数 E 、 H 、 K_w 和 H_w 采用不同的应力或吸力的函数。

2.2 巴塞罗那 (Barcelona) 弹塑性模型

Alonso 等^[7]提出了一种弹塑性模型, 后来被人们广泛应用, 即为著名的 Barcelona 模型。Alonso 等提出弹性体积应变增量 $d\varepsilon_v^e$ 和弹性剪切应变增量 $d\varepsilon_s^e$ 分别为

$$d\varepsilon_v^e = \frac{\kappa dp}{v p} + \frac{\kappa_s}{v s + p_{\text{atm}}} ds, \quad (13)$$

$$d\varepsilon_s^e = \frac{1}{3G} dq, \quad (14)$$

式中, $v = 1 + e$, p_{atm} 为大气压力, κ , κ_s 和 G 为弹性参数。

Barcelona 基本模型采用一个三维($p:q:s$)的屈服面。在各向等压状态下(即 $p:s$ 平面)此屈服面由两条屈服曲线组成: LC (Loading Collapse) 线和 SI (Suction Increase) 线, 如图 1 所示。

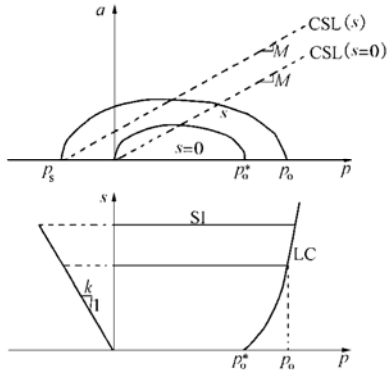


图 1 巴塞罗那模型屈服面

Fig. 1 Yield surfaces of Barcelona model

LC 曲线的屈服方程为

$$\frac{p_0}{p^c} = \left(\frac{p_0^*}{p^c} \right)^{\frac{\lambda(0)-\kappa}{\lambda(s)-\kappa}}, \quad (15)$$

式中, $\lambda(0)$ 与 $\lambda(s)$ 分别为饱和与非饱和状态下土的正常压缩线($v:\ln p$)的斜率, p_0^* 与 p_0 分别为饱和与非饱和状态下土体前期固结应力, 参数 p^c 和各向等屈服应力 p_0 随吸力 s 而变化。

$\lambda(s)$ 随吸力 s 而变化, 如图 2 所示, 可用下式表达

$$\lambda(s) = \lambda(0)[(1-r)\exp(-\beta s) + r], \quad (16)$$

式中, β 为反映土刚度随 s 增长的参数, $r = \lambda(\infty)/\lambda(0)$, 是小于 1.0 的参数。吸力越大, 非饱和土的正常压缩线越平缓或土的刚度越大。

模型假定荷载的变化不影响先期最大吸力(吸力屈服值) s_0 , 对应于 $p:s$ 面为一条水平线, 称作 SI (Suction Increase) 线, 相应的屈服方程为

$$s = s_0. \quad (17)$$

在 $p:q$ 平面上, 采用了剑桥模型的剪切屈服面:

$$f = q^2 - M^2(p + p_s)(p_0 - p) = 0 \quad (18)$$

是椭圆型的。其中 $p_s = ks$, k 是小于 1.0 的系数。屈服

方程反映了吸力对加载变形的影响。吸力增大加载屈服面扩大, 有些状态对饱和土可能处在塑性变形区, 对非饱和土则处于弹性变形区, 变形小了。这反映了水分减少土体变硬的特性。屈服方程(15)、(17)与(18)结合就形成在 $p:q:s$ 三维空间的非饱和土屈服面。

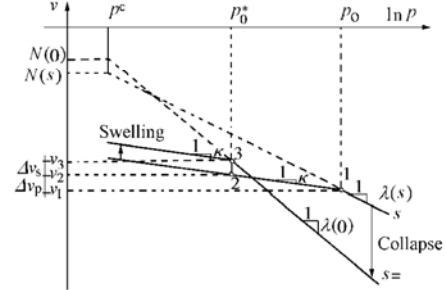


图 2 非饱和土正常压缩线

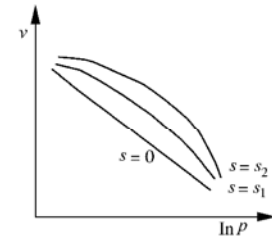
Fig. 2 Normal compression curve for unsaturated soils

屈服面由两个硬化参数 p_0^* 和 s_0 控制。关于流动法则, 为了反映在 K_0 状态下没有侧向变形 Alonso 等人建议采用不相关联的流动法则。

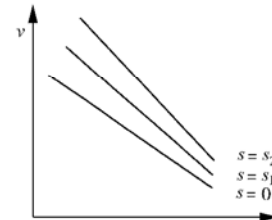
2.3 巴塞罗那模型的改进

(1) 压缩线的修正

有些学者认为 $v:\ln p$ 正常压缩曲线的斜率 $\lambda(s)$ 随吸力增加而降低不能反映浸水坍塌变形随 p 增大而降低的特性。Josa 等^[8]对正常压缩线进行了修改, 见图 3 (a)。Wheeler 等^[9]对压实高岭的试验, Machado^[10]对巴西麻粒岩残积土的试验均表明, 正常压缩线的斜率 $\lambda(s)$ 随吸力增加而增加, 如图 3(b)所示。式(16)的参数 r 可大于 1.0。



(a) Josa, et al



(b) Wheeler & Sivakumar

图 3 不同吸力下压缩线形状

Fig. 3 Variation of compression curve with suction

(2) LC 屈服面形状

Wheeler (1995) 等建议 LC 屈服面方程为

$$(\lambda(s) - \kappa) \ln\left(\frac{p_0}{p_{\text{atm}}}\right) = (\lambda(0) - \kappa) \ln\left(\frac{p_0^*}{p_{\text{atm}}}\right) + N(s) - N(0) + \kappa_s \ln\left(\frac{s + p_{\text{atm}}}{p_{\text{atm}}}\right), \quad (19)$$

从试验中确定 $N(s)$ 与 $\lambda(s)$ 比确定式(15)的 p_c 容易些。

Balmaceda^[11]认为 LC 屈服面与 $\lambda(s)$ 无关, 用下式代替式(15)反映屈服面的变化:

$$p_0 = (p_0^* - p^c) + p^c[(1-m)e^{-\alpha_b s} + m], \quad (20)$$

$$m = 1 + \frac{\zeta_y - 1}{\zeta_x - p_c} (p_0^* - p^c) e^{(\zeta_x - p_0^*)/(\zeta_x - p_c)}. \quad (21)$$

式中 α_b 为 p_0 达到最大值的速率; ζ_x 对应于最大湿陷体积的 p_0^* 值, ζ_y 是最大的湿陷体积。可由等压浸水试验得到。

Bonelli 等^[12]提出模型中 LC 屈服面是在 $p:s$ 平面上参考应力 p_g 处的一条垂直线, 然后随土体屈服慢慢倾斜。同样可以得到 $v:\ln p$ 平面中一条压缩直线, 斜率随吸力增加单调减小。压缩回弹线的斜率也随吸力增加而降低。模型采用相关联流动法则和 Mohr-coulomb 屈服准则, 椭圆屈服面的椭圆比随 Lode 角变化, 但不随吸力而变化。

黄海、陈正汉^[13]将两条屈服线 LC 和 SI 组合成单一屈服面, 并给出数学表达式为

$$p_0 = p_0^* + ms + n[e^{\eta/p_{\text{atm}}} - 1], \quad (22)$$

单一屈服面难以分别反映应力和吸力对变形的影响。

(3) 剪切屈服面形状

Maâtouk 等^[14]对湿陷性非饱和淤泥质粘土进行了不同吸力下等向和不等向压缩, 然后再进行排水剪切试验, 得到屈服面的形状与修正剑桥模型有所不同, 是由于土体的各向异性。屈服面的大小随吸力增加而扩大, 但屈服强度增长速率远大于屈服应力。

Chiu & Ng^[15]修改 Barcelona 基本模型在 $p:q$ 平面上的剪切屈服面为双屈服面, 屈服方程以下列两式表达:

$$f_s = q - \eta_y \left[p + \frac{\mu(s)}{M(s)} \right] = 0, \quad (23)$$

$$f_c = p - p_0 = 0. \quad (24)$$

式中 η_y 为应力比的屈服值; $M(s)$ 与 $\mu(s)$ 分别为临界物态线在 $p:q$ 平面上的斜度与截取值。关于流动法则, Chiu 等采用不相关联的流动法则, 建议土的剪胀性随土的状态(应力、密度与吸力)而改变。Chiu & Ng (2003) 用上述改良模型来模拟不变剪应力和不变平均净应力条件下的浸湿试验(即边坡土单元在降雨条件下的应力路径)。数值模拟的结果显示改良模型比 Barcelona 基本模型更能反映在浸湿试验中剪应变的突然增加。

2.4 采用其它应力变量的模型

Karube^[16]建议用偏应力 q 、平均净应力 p 和吸力的函数 $f_1(s)$ 作为应力变量, 对原剑桥模型的屈服面进行修正, 即

$$q = Mp \ln\left(\frac{p_0}{p}\right) + Mf_1(s)\left(1 - \frac{p}{p_0}\right), \quad (25)$$

式中, 球应力 $p_0 = p_0^* + bf_1(s)$, 破坏时的偏应力为 $q = M(p + f_1(s))$ 。函数 $f_1(s)$ 通过控制吸力的剪切试验反分析得到。Kato 等^[17]将 Karube 建议的应力变量 p 、 q 和 $f_1(s)$ 运用到“广义空间移动面”(Extended Spatially Mobilized Plane)弹塑性模型中。Sun 等^[18, 19]分别提出了对 $f_1(s)$ 的不同表达式。

Karube^[20]和 Kato^[21]采用改进的净应力 σ^{**} 和弯液面应力 p_m 为应力变量对原剑桥模型的屈服面进行修正:

$$\sigma^{**} = \sigma - u_a + \frac{S_{rb}}{1 - S_{ro}}(u_a - u_w), \quad (26)$$

$$p_m = \frac{S_{rm}}{1 - S_{ro}}(u_a - u_w), \quad (27)$$

式中, $\frac{S_{rb}}{1 - S_{ro}}$ 和 $\frac{S_{rm}}{1 - S_{ro}}$ 为对非弯液面水和弯液面水的权重因数, 饱和度参数 S_{rb} 、 S_{rm} 和 S_{ro} 可依 Karube 等人提议的方法从土水特征曲线找出。

Wheeler^[22]建议用 $\bar{\sigma}$ 和 $\bar{s}$ 为应力变量

$$\bar{\sigma} = \sigma - [S_r u_w + (1 - S_r) u_a], \quad (28)$$

$$\bar{s} = n(u_a - u_w), \quad (29)$$

式中, n 为孔隙率。Wheeler 等人在 $\bar{\sigma}$ 和 $\bar{s}$ 基础上建立一个考虑土水特征曲线滞后作用, 用于各向等压状态下的本构模型。

2.5 膨胀土弹塑性模型

根据膨胀土的微观结构, Gens & Alonso^[23]认为与吸力变化对应存在两个屈服面, 除了 SI 面以外, 还有 SD 面(Suction Decrease), 在 $s:p$ 面内都呈 45°角, 如图 4 所示。

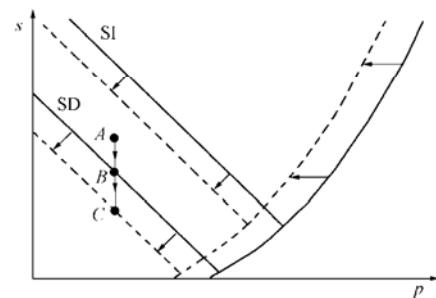


图 4 膨胀土弹塑性模型

Fig. 4 Elasto-plastic model for expansive soils

土体吸水, 吸力下降, 土体膨胀, SD 面就是吸

力下降时的屈服, 可区别这种膨胀变形是塑性还是弹性。当应力路径达到 SD 屈服面时, $p+s$ 的减少将导致不可恢复的宏观结构塑性膨胀, 同时还将带动 LC 屈服面向内运动 (宏观结构软化)。SD 和 SI 屈服面的运动是相互耦合的, 当 SD 屈服面由于 $p+s$ 的减少而向下运动时, 将拽动 SI 屈服面也向下运动。因此该模型可以描述干-湿循环中土体连续的塑性应变 (Alonso^[24], Vilar^[25]), 也可描述几个循环后达到一个稳定的滞回环。在 Gens & Alonso 和 Alonso 等^[26]的研究基础上, Sánchez^[27]提出了一个双重结构的弹塑性模型。Lloret^[28]用高吸力下压实膨润土的干湿试验验证了模型。

卢再华等^[29]在 Gens & Alonso(1992)模型基础上, 引入抛物线剪切屈服面。前三个屈服面与 Gens 等的建议相同, 为考虑土的剪缩特性, 引入抛物线剪切屈服面, 即

$$f_4 = \frac{aq}{G} \sqrt{\frac{q}{M_2(p+p_r)-q}} - \varepsilon_s^p = 0 \quad (30)$$

2.6 损伤力学模型

沈珠江^[30]提出非饱和土的损伤力学本构模型。模型假定原状土为线弹性体, 完全损伤后的土为扰动土, 用饱和土的非线性本构模型和弹塑性模型。土的变形过程是由原状土向扰动土转化的过程。此过程中任一时刻的应力应变关系为

$$\{\sigma\} = (1-\omega)[D]_i \{\varepsilon\} + \omega[D]_s \{\varepsilon\} \quad (31)$$

式中, $[D]_i$ 为原状土的刚度矩阵, $[D]_s$ 为扰动土的刚度矩阵, ω 为损伤比, 可用下列经验公式表示

$$\omega = 1 - \exp[-a\varepsilon_1 - \frac{b(w-w_0)}{(w_s-w)}] \quad (32)$$

式中, w_0 和 w_s 分别为原状土和扰动土的含水率。此模型能较好反映应变软化和浸水软化。

沈珠江^[31]还提出适用于黄土的砌石模型 (Masonry model)。砌石模型把土当作弹性体, 其中任意交叉分布了许多裂缝, 当荷载增加到一定值时, 强度最弱的裂缝开始破坏, 土体分为许多小块, 若荷载继续增加, 这些小块就被压碎, 变得越来越小。最后所有土体团块都破坏, 变为分散的土体颗粒。超过临界荷载后的土体特性可以用类似于岩石破坏的机理描述。用弹塑性模型模拟时需要增加一项由于岩石破碎引起的塑性应变, 当采用相关联的流动法则时, 用增量形式表达的土体应力应变关系为

$$\{\Delta\varepsilon\} = [C]\{\Delta\sigma^*\} + A_p \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma^*} \right\} \cdot \Delta f + A_d \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma^*} \right\} \Delta g \quad (33)$$

式中, A_p 和 A_d 分别为由屈服和由损伤引起的塑性系数。

2.7 热力学模型

近年来, 垃圾填埋场及核废料贮藏工程, 以及保护地下水资源免受污染的土障设计, 使得人们日益关注温度对土壤的水力和力学性质的影响并尝试完善多孔介质中热-水力-力学之间的关系。Navarro^[32]、Thomas^[33]和武文华、李锡夔^[34]分别提出非饱和土的热-水力-力学本构模型。

3 浸水变形

浸水变形是工程师们十分感兴趣的非饱和土本构关系计算方法。它直观、简单, 易于理解, 便于应用。因此反映浸水变形的本构模型一直受到人们的关注, 并得到不断发展。近年的发展主要有以下几方面。

3.1 不同饱和度下的浸水变形

计算黄土湿陷量、膨胀土的膨胀量, 都是指从天然含水率浸水到饱和含水率产生的变形, 是两个特定含水率变化所引起的变形。其实, 变形还可能发生于两个任意的其它含水率之间, 因此也要研究这种含水率变化所对应的变形。

张原丁^[35]进行了不同含水率不同压力下的黄土湿陷性试验研究, 并总结出如下关系: ①随着含水率的增加, 湿陷量减小, 且压力大时, 减小得多; ②当压力较小时, 湿陷系数随压力而增加, 超过某一压力后, 湿陷系数随压力而减小; ③当压力较小时, 含水率变化引起的湿陷量变化较小, 一旦超过了某压力, 含水率变化引起的湿陷量较显著; ④湿陷量的峰值随压力而增大。但文中没有给出如何在计算中反映这些规律。

孙长龙等^[36]提出了膨胀土考虑不同初始饱和度的膨胀量计算方法:

$$s = \psi \sum \delta_{pi} \beta h_i \quad (34)$$

式中, β 是反映各土层饱和度不同因而膨胀势不同的参数, δ_{pi} 是膨胀率, ψ 是综合影响系数。

陈忠伟^[37]将含水率直接引入膨胀土膨胀量计算,

$$s = \sum c_{spi} \Delta w h_i \quad (35)$$

式中, Δw 表示含水率变化, c_{spi} 为参数。

包承纲^[38]提出湿陷系数与干密度和含水率成线性关系:

$$\delta = a_1 + b_1 \rho_d + c_1 w \quad (36)$$

孙建中、刘健民^[39]等进行了黄土在各种初始含水率下应力应变关系的试验, 从中整理出湿陷系数随荷载和含水率变化的规律, 并提出二元二次抛物线函数来计算不同荷载和含水率下的湿陷系数。

3.2 三维湿化变形

刘祖德、王园^[40]等进行了膨胀土浸水变形的三轴

仪试验研究,测得体积应变和偏应变随应力状态和含水率而变的规律,并分成9种情况来分别描述变形的特征,给出了描述曲线形状的表达式,但没有给出有应力和含水率计算湿化应变的方法。李翠华等^[41]、钱建辉等^[42]的膨胀土三轴仪浸水变形试验,也得出一些定性的规律。

土石坝蓄水引起的变形应作为二、三维问题通过有限元计算分析,因此三维湿化变形计算在土石坝工程中开展较早。Nobari & Duncan^[43]首先用三轴仪试验研究了这种湿化变形,并提出了适用于有限元计算的方法。该方法假定某一应力状态下的浸水变形等于浸水前后这一应力状态所对应的应变之差,利用浸水前后的三轴仪试验应力应变曲线推求。该法使用的是应力全量与应变全量间的关系,难以与增量型本构模型匹配。此外轴对称三轴仪试验的应变与相同应力下平面应变问题中的应变是有差异的。

殷宗泽等^[44]提出了改进的方法,假定计算前的应力状态是若干应力增量按比例累加达到的。由每一个应力增量可以算出相应的干态和饱和状态的应变增量,再叠加起来,它们的差就是湿化应变。两种状态的应变增量,用同一本构模型,但由两种不同状态下试验所确定的模型参数计算。这种计算方法可以直接得到各应变分量,也避免了由主应变求应变分量所作的假定。

李广信^[45]用大小不同的试样进行堆石料三轴仪浸水变形试验,发现浸水变形还有显著的尺寸效应。此外由试验可以得到湿化变形所对应的体积模量和剪切模量。

三维问题浸水变形计算存在3个难点:①土体是在一定应力状态下浸水的,因此变形量与应力状态,即应力分量的全量有关。应力没有分级,不须要考虑应力增量。而土体的本构模型都是增量型的,要利用现有本构模型须作某种假定;②试验只能量测主应力方向的湿化应变,要转换成 $x-y$ 坐标系内的应变分量要么通过本构模型,要么作某种假定;③利用干湿两组试验曲线计算湿化应变与某种应力状态下浸水所得应变有出入,是否可以修正,如何修正也值得研究。现有计算方法都是迁就了某一方面而简化了另外的方面,有顾此失彼之嫌。但又确无可以兼顾各方的有效办法。因此,浸水变形的研究还值得深入。

3.3 浸水变形过程中的微观变化

蒲毅彬等^[46]用 x 光分层扫描(CT)试验技术研究黄土浸水所引起的微观变化。通过加荷前后、浸水前后扫描图像的对比分析,揭示了加荷和浸水过程中微观变化的一些特征。对于认识这种土浸水变形机理,

及变形的宏观计算,都是有意义的。

4 非饱和土应力变形计算

4.1 吸力的确定

应用非饱和土本构模型计算土体的应力和变形,一个重要问题是确定吸力。吸力是变量之一,不管用有效应力原理还是双应力变量方法,都须知道吸力。吸力的确定有3种方法:实测、渗流计算、固结计算。

4.1.1 实测

有些工程在施工或使用过程中埋设了吸力观测装置,即可依据吸力观测结果计算施工和使用期的应力变形。

4.1.2 渗流计算

用非饱和土渗流理论计算孔隙水压力的分布场及其随时间的变化。由于孔隙中的气压消散较快,不会长时间维持较高的值,因此可假定气压为0,吸力就等于孔隙水压力的负值。在作渗流计算时不考虑土的变形,不考虑孔压与变形的耦合。这是一种近似确定吸力的方法,比较简单,也较实用。非饱和土渗流计算方法, Fredlund & Rahardjo (1997)^[47]已清楚地介绍了有关理论,它与饱和土渗流计算的不同主要有以下3点。

(1) 渗透系数不是常量

由于孔隙中气的存在,堵住了水流动的通道,减小了过水断面,使水渗透系数降低。孔隙中气占的体积愈大,渗透性愈低。因此,渗透系数与饱和度有关,与吸力有关,它随时间变化,不可忽略。

(2) 计算对象包括水上水下整个土体

饱和土的渗流计算只对水下部分进行,非饱和土可以计算整个土体,计算水下部分时只须令吸力为0,饱和度为100%,渗透系数不变。这样非饱和土的渗流方程也就成了饱和土的渗流方程。因此可以用统一的计算方法,统一的计算程序。

(3) 浸润线自动形成

对于饱和土的渗流计算,水压为0的浸润线是其边界之一,因此求解过程中,要随时寻找浸润线的位置;而非饱和土渗流计算中,由非饱和区(水压为负)过度到饱和区(水压为正),对应水压为0处即为浸润线位置,因此浸润线在计算过程中自然形成。

4.1.3 固结计算

固结计算将渗流和变形耦合在一起,同时求得吸力和位移,比较复杂。三维非饱和土固结理论就更复杂了,陈正汉^[48]和杨代泉分别从不同的角度建立了非饱和土三维固结方程。

非饱和土固结涉及的因素很多,因此联立求解的

方程数多, 方程中所含的变量也多。应该说, 不管有多少方程, 有多少变量, 用数值方法都是能够求解的。问题是, 有些变量的初始条件, 边界条件难以确定, 有些变量之间的关系很复杂。花很大精力进行复杂的计算得到的结果未必令人满意。非饱和土固结计算目前在工程问题中应用很少, 关键就是太复杂, 简化是非饱和土固结理论走向实用的必经之路。

影响非饱和土固结的变量有十几个: 位移、应力、水压、气压、体积、饱和度、含水率、水渗透系数、气渗透系数、渗流速度、气在水中的溶解度、气体密度、温度等。这些变量要分类, 有些是基本变量, 有些是从属变量, 有些是次要变量。把次要变量略去, 从属变量归结为基本变量, 才能实现简化。

属于次要变量的有气在水中的溶解度、气体密度、气流速度、温度等。这些变量对封闭于仪器中的试样, 对某种特殊的工程, 也许须要考虑, 但一般工程问题可以不予考虑, 因而可以从方程中消去。

所谓从属变量, 是指与基本变量之间有某种固定的关系, 不须通过联立方程组即可确定。如饱和度可通过含水率求得, 应力应变可由位移计算, 渗透系数可用吸力计算等。这些变量都可以不作为独立变量, 不出现在方程组中。

这样, 只有基本变量, 即孔隙水压力、气压力和 3 个位移分量。这些变量相互牵制, 只能联立求解。三维固结问题就归结为解 5 元的联立方程组, 这就简单得多。

即使如此, 涉及气压力的因素较复杂, 而且初始和边界条件难以确定, 固结计算仍然是比较麻烦的。有些学者提出作近似的进一步简化计算方法, Chang & Duncan^[49]提出了只考虑水流动的有限元解法。殷宗泽^[50]提出将水与气看作混合的可压缩的流体的有限元计算方法。沈珠江^[51]假设排气率为常量从而简化固结方程式, 并基于非饱和土有效应力原理提出了相应的本构模型和有限元计算公式。这些方法都还要在应用中不断改进。

4.2 柔度矩阵和刚度矩阵

建立本构模型最终还是要用到有限元计算中, 因此必须形成柔度矩阵 $[C]$ 或刚度矩阵 $[D]$ 。

非饱和土的应力分量有两种表示方法: ①有效应力法, 吸力隐含到有效应力中; ②双应力变量法, 将应力和吸力看成两种独立的应力变量。对二、三维问题, 应力、吸力—应变关系也就有两类表达式。

(1) 有效应力法

$$\{\Delta \varepsilon\} = [C'] \{\Delta \sigma'\} \quad (37)$$

其中有效应力为

$$\{\Delta \sigma'\} = \{\Delta \sigma\} - \{M\} \Delta u_a + \chi \{M\} \Delta s \quad (38)$$

式中 χ 为有效应力系数; $\{M\} = [1 \ 1 \ 0]^T$ (二维问题), $\{M\} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ (三维问题); $[C']$ 为有效应力柔度矩阵, 它随应力状态和吸力大小变化。

(2) 双应力变量法

$$\{\Delta \varepsilon\} = [C_\sigma] \{\Delta \sigma\} - \{M\} \Delta u_a + [C_s] \{M\} \Delta s \quad (39)$$

式中 $[C_\sigma]$ 为应力应变柔度矩阵, $[C_s]$ 为吸力柔度矩阵, 它们都应随应力状态和吸力大小而变化。

柔度矩阵 $[C']$ 和 $[C_\sigma]$ 的确定方法与通常的柔度矩阵确定方法一样, 而吸力柔度矩阵 $[C_s]$ 则难以给出恰当的确定方法, 如果作为一种球应力也按流动法则确定, 那么这是一种什么样的流动法则, 要不要与应力分量掺合在一起, 这种掺合与有效应力法有什么区别? 通常近似假定按弹性力学方法处理, 即①它不引起剪应变; ②引起的各向正应变相等。这样, 以二维问题为例, 它就成为

$$[C_s] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} C_a \quad (40)$$

式中, C_a 为系数。

上面所介绍的模型, 包括巴塞罗那模型, 基本上都是这样处理的。只有杨代泉模型中增加了一项与偏应力成比例的剪应变, 这只是一种近似的处理, 缺乏理论依据和试验依据。应该说, 土体具有球应力引起剪应变的变形特性, 吸力柔度矩阵 $[C_s]$ 的各元素并不相等, 也不为 0。双应力变量方法没有能反映这一点, 不能不说是其重要缺点之一。

用有效应力法, 吸力被看作球应力的一个部分, 吸力变化引起各应变分量, 包括剪应变分量, 通过柔度矩阵 $[C']$, 自然得到了体现。非饱和土柔度矩阵 $[C']$ 不同于饱和土仅在于其元素除了随应力状态变化外, 还要随吸力变化。可见, 在本构模型理论中, 使用有效应力, 还是有优越性的。当然它也有缺点, 吸力和球应力 p 一样通过矩阵 $[C']$ 确定体积应变, 吸水时, 吸力降低, 体积膨胀。这就不能反映黄土的湿陷性, 除非令 χ 为负。对湿陷的模拟采用损伤力学模型是可取的。除了柔度矩阵 $[C']$ 外, 增加一个结构损伤的柔度矩阵, 就可反映湿陷。这种方法可以弥补有效应力法的不足。

有限元计算中直接使用使用的是刚度矩阵, $[D] = [C]^{-1}$, 对有效应力法, 形成刚度矩阵没有问题; 双应力变量法难以建立应力分量和吸力与应变分量之间统一的刚度矩阵。以二维问题为例, 除了 3 个应力分量外, 还有一个吸力, 而应变分量只有 3 个。如果要勉强弄出一个统一的刚度矩阵, 是 3×4 的矩阵, 仍

然无法用于有限元计算。唯一可行方法是将吸力所对应的应变用初应变法加入到计算中,这就增加了有限元计算的复杂性,同时也表明了双应力变量法的缺陷。

5 结 论

非饱和土本构关系可以从两方面着手研究:①建立应力—应变—吸力关系;②建立应力—饱和度—应变关系,即浸水变形。前者是一种较严格的方法,后者是一种近似方法,难以较合理地反映浸水对骨架应力的影响;前者必须与吸力计算或量测相结合,后者较简单直观。两种方法都值得深入研究,都要发展。非饱和土本构模型理论在工程中广泛应用,还需要有一个较长的发展过程。

参考文献:

- [1] FREDLUND D G, MORGENSTERN N R. Constitutive relations for volume change in unsaturated soils[J]. Can Geotech J, 1976, **13**(1):261 - 276.
- [2] FREDLUND D G. Appropriate concepts and technology for unsaturated soils[J]. Can Geotech J, 1979, **16**(2): 121 - 139.
- [3] LLORET A, GENS A, BATLLE F, ALONSO E E. Flow and deformation analysis of partially saturated soils[C]// Proc 9th Eur Conf Soil Mech. Dublin, 1987, **2**: 565 - 568.
- [4] FREDLUND D G, MORGENSTERN N R, WIDGER R A. The shear strength of unsaturated soils[J]. Can Geotech J, 1978, **15**(3): 313 - 321.
- [5] 杨代泉. 非饱和土二维广义固结非线性数值模拟[J]. 岩土工程学报, 1992, **14**:2 - 12. (YANG Dai-quan. Nonlinear numerical model of two-dimensional generalized consolidation of unsaturated soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1992, **14**: 2 - 12.)
- [6] 陈正汉, 周海清, FREDLUND D G. 非饱和土的非线性模型及其应用[J]. 岩土工程学报, 1999, **21**(5): 603 - 608. (CHEN Zheng-han, ZHOU Hai-qing, FREDLUND D C. Nonlinear model for unsaturated soils and its application[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1992, **21**(5): 603 - 608.)
- [7] ALONSO E E, GENS A, JOSA A. A constitutive model for partially saturated soil[J]. Géotechnique, 1990, **40**(3):405 - 430.
- [8] JOSA A, BALMACEDA A, GENS A, ALONSO E E. An elasto-plastic model for partially saturated soils exhibiting a maximum of collapse[C]// Proc 3rd Int Conf Computational Plasticity. Barcelona, 1992, **1**:815 - 826.
- [9] WHEELER S J, SIVAKUMAR V. An elasto-plastic critical state framework for unsaturated soil[J]. Géotechnique, 1995, **45**(1): 35 - 53.
- [10] MACHADO S L. Study of the LC yield surface of a residual soil of grannulito[C]// Proc 3rd Int Conf Unsaturated Soils. 2002, 139 - 143.
- [11] BALMACEDA A. Suelos compactados. unestudio teorico y experimental [D]. Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya.
- [12] BONELLI S, POULAIN D. Unsaturated elasto-plastic model applied to homogeneous earth dam behaviour[C]// Proc 1st Int Conf Unsaturated Soils. Paris, 1995, **1**: 265 - 271.
- [13] 黄 海, 陈正汉, 李 刚. 非饱和土在 $p-s$ 平面上屈服轨迹及土 - 水特征曲线的探讨[J]. 岩土力学, 2000, **21**(4): 316 - 321. (HUANG Yai, CHEN Zheng-han, LI Gang. A study on yield locus of unsaturated soils on $p-s$ plane and soil-water characteristic curve[J]. Rock and Soil Mechanics, 2002, **21**(4): 316 - 321.)
- [14] MAÂTOUK A, LEROUEIL S, LA Rochelle P. Yielding and critical state of a collapsible unsaturated silty soil[J]. Géotechnique, 1995, **45**(3): 465 - 477.
- [15] CHIU C F, NG C W W. A state-dependent elasto-plastic model for saturated and unsaturated soils [J]. Géotechnique, **53**(9): 809 - 829.
- [16] KARUBE D. New concept of effective stress in unsaturated soils and its proving tests[C]// Advanced Triaxial Testing of Soil and Rock. ASTM STP 977, 1988, 539 - 552.
- [17] KATO S, MATSUOKA H, SUN D A. A constitutive model for unsaturated soil based on extended SMP[C]// Proc 1st Int Conf Unsaturated Soils. Paris, 1995, **2**: 739 - 744.
- [18] SUN D A, MATSUOKA H, TAKIWAKI Y. A three-dimensional elasto-plastic model for unsaturated soil behaviour on "Extended SMP"[C]// Proc 2nd Int Conf Unsaturated Soils. Beijing, 1998, **1**: 521 - 526.
- [19] SUN D A, MATSUOKA H, YAO Y P, ICHIHARA W. An elasto-plastic model for unsaturated soil in three-dimensional stresses[J]. Soils and Foundations, 2000, **40**(3): 17 - 28.
- [20] KARUBE D, KATO S, HAMADE K, HONDA M. The relationship between the mechanical behaviour and the state of pore water in unsaturated soil (in Japanese)[J]. JSCE Journal of Geotechnical Engineering, 1995.
- [21] KATO S, KARUBE D, HONDA M, FUJIWARA T. Influence

- of pore water arrangement on the compression behavior of unsaturated soil (in Japanese)[J]. JSCE Journal of Geotechnical Engineering, 1995.
- [22] WHEELER S J, SHARMAR R S, BUISSON M S R. Coupling of hydraulic hysteresis and stress-strain behaviour in unsaturated soils[J]. Geotechnique, 2003, **53**(1): P41 - 54.
- [23] GENS A, ALONSO E E. A framework for the behaviour of unsaturated expansive clays[J]. Can Geotech J, 1992, **29**: 1013 - 1032.
- [24] ALONSO E E, GENS A, JOSA A, 杨代泉. 非饱和土弹塑性应力应变特性模拟[J]. 岩土工程学报, 1995, **17**(6): 42 - 51. (ALONSO E E, GENS A, JOSA A, YANG D Q. Elasto-plastic modeling for the stress and strain behaviour of unsaturated soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1995, **17**(6): 42 - 51.)
- [25] VILAR O M. Suction controlled oedometer tests on a compacted clay[C]// Proc 1st Int Conf Unsaturated Soils. Paris, 1995, **1**: 201 - 206.
- [26] ALONSO E E, VAUNAT J, GENS A. Modelling the mechanical behaviour of expansive clays[J]. Engng Geol, 1999, **54**: 173 - 183.
- [27] SÁNCHEZ M, GENS A, GIMARAES L N, OLIVELLA S. Generalized plasticity model for THM simulations involving expansive clays[C]// Proc 6th Int Workshop Key Issues on Waste Isolation Research. Paris, 2001, 397 - 415.
- [28] LLORET A, VILLAR M V, SÁNCHEZ M, GENS A, PINTADO X, ALONSO E E. Mechanical behaviour of heavily compacted bentonite under high suction changes[J]. Géotechnique, 2003, **53**(1): 27 - 40.
- [29] 卢再华, 陈正汉, 曹继东. 原状膨胀土的强度变形特性及其本构模型研究[J]. 岩土力学, 2001, **22**(3): 339 - 342. (LU Zai-hua, CHEN Zheng han, CAO Ji-dong. A study on the strength and deformation characteristics and the constitutive model of natural expansive soils[J]. Rock and Soil Mechanics, 2001, **22**(3): 339 - 342.)
- [30] 沈珠江. 土体变形特征的损伤力学模拟[C]// 第5届全国土力学数值分析与解析方法讨论会议论文集. 重庆, 1994: 1 - 8. (SHEN Zhu-jiang. Modeling of soil deformation by damage mechanics[C]// Proc 5th Chinese National Conference on Numerical and Analytical Methods in Geotechnical Engineering, 1994: 1 - 8.)
- [31] SHEN Z J, HU Z Q. Damage function and a masonry model for Loess[C]// Proc 1st Asian Conf Unsaturated Soils. Singapore, 2000, 143 - 146.
- [32] NAVARRO V, ALONSO E E. Modeling swelling soils for disposal barriers[J]. Computers & Geotechnics, 2000, **27**: 19 - 43.
- [33] THOMAS H R, HE Y. Analysis of coupled heat, moisture and air transfer in a deformable unsaturated soil[J]. Géotechnique, 1995, **45**(4): 677 - 689.
- [34] 武文华, 李锡夔. 非饱和土的热-水力-力学本构模型及数值模拟[J]. 岩土工程学报, 2002, **24**(4): 411 - 416. (WU Wen-hua, LI Xi-kui. Constitutive model and numerical simulation of thermo-hydro-mechanical behavior in unsaturated soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, **24**(4): 411 - 416.)
- [35] 张原丁. 论黄土的湿陷敏感性[J]. 岩土工程学报, 1996, **18**(5): 79 - 83. (ZHANG Yuan-ding. Wetting induced collapse of loess[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1996, **18**(5): 79 - 83.)
- [36] 孙长龙, 王保田, 殷宗泽, 等. 宁夏膨胀土地基浸水变形规律试验研究[J]. 河海大学学报, 1997, **25**(2): 82 - 85. (SUN Chang-long, WANG Bao-tin, YIN Zong-ze, et al. Experimental study of in-situ wetting tests on a Ningxia expansive soil[J]. Journal of Hohai University, 1997, **25**(2): 82 - 85.)
- [37] 陈忠伟. 膨胀土的膨胀势系数和地基胀缩变形量的估算[J]. 工程勘察, 1983, **3**: 35 - 41. (CHEN Zhong-wei. Estimation of swelling potential index and ground deformation of expansive soil[J]. Geotechnical Investigation and Surveying, 1983, **3**(1): 35 - 41.)
- [38] 包承纲. 非饱和土的性状及膨胀土边坡稳定问题[J]. 岩土工程学报, 2004, **26**(1): 1 - 15. (BAO Cheng-gang. Behavior of unsaturated soil and stability of expansive soil slope[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, **26**(1): 1 - 15.)
- [39] 孙建中, 刘健民. 黄土的未饱和湿陷、剩余湿陷和多次湿陷[J]. 岩土工程学报, 2000, **22**(3). (SUN Jian-zhong, LIU Jian-min. On unsaturated collapse, remnant collapse and multiple collapse of the loess[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000, **22**(3): 365 - 367.)
- [40] 刘祖德, 王 园. 膨胀土浸水三向变形研究[J]. 武汉水力电力大学学报, 1994, **27**(6): 616 - 621. (LIU Zu-de, WANG Yuan. Study on triaxial deformation of expansive soils soaked in water[J]. Journal of Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering, 1994, **27**(6): 616 - 621.)

- [41] 李翠华, 詹长久, 张 路. 膨胀土湿化变形试验研究[J]. 武汉大学学报, 2001, **34**(5): 101 - 103. (LI Cui-hua, ZAN Chang-jiu, ZHANG Lu. Experimental research on slaking deformation of expansive soils[J]. Journal of Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering, 2001, **34**(5): 101 - 103.)
- [42] 钱建辉, 宋新江. 膨胀土湿化变形特性的试验研究[J]. 安徽水利水电职业技术学院学报, 2003, **3**(1): 5 - 8. (QIAN Jian-hui, SONG Xin-jiang. Test study on wet deformation of expansive soil[J]. Journal of Anhui Technical College of Water Resources and Hydroelectric Power, 2003, **3**(1): 5 - 8.)
- [43] NOBARI E S, DUNCAN J M. Movements in dams due to reservoir filling[J]. Performance of Earth and Earth Supported Structure, 1973, 1.
- [44] 殷宗泽, 赵 航. 土坝浸水变形分析[J]. 岩土工程学报, 1990, **12**(2): 1 - 7. (YIN Zong-ze, ZHAO Hang. Deformation analysis of earth dam during reservoir filling[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1990, **12**(2): 1 - 7.)
- [45] 李广信. 堆石坝的湿化试验和数学模型[J]. 岩土工程学报, 1990, **12**(5): 58 - 64. (LI Guang-xin. Wetting test and numerical modeling of rock fill dam[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1990, **12**(5): 58 - 64.)
- [46] 蒲毅彬, 陈万业, 廖全荣. 陇东黄土湿陷过程的 CT 结构变化研究[J]. 岩土工程学报, 2000, **22**(1): 49 - 54. (PU Yi-bin, CHEN Wan-ye, LIAO Quan-rong. Research on CT structure changing for damping process of loess in longdong [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000, **22**(1): 49 - 54.)
- [47] FREDLUND D G, RAHARDJO H. 非饱和土土力学[M]. 陈仲颐, 等译. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997, 1 - 47. (FREDLUND D G, RAHARDJO H. Unsaturated Soil Mechanics[M]. CHEN Zhong-yi, et al, translators. Beijing: Chinese Construction Industry Publishing House, 1997, 1 - 47.)
- [48] 陈正汉. 非饱和土固结的混合物理论(II) [J]. 应用数学和力学, 1993, **14**(8): 687 - 698. (CHEN Zheng-han. Consolidation theory of unsaturated soil based on the theory of mixture (II)[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1993, **14**(8): 687 - 698.)
- [49] CHANG C S, DUNCAN J M. Consolidation analysis for partly saturated clay by using an elastic-plastic effective stress-strain model[J]. Int J Num & Analyt Meth Geomech. 1983, **7**(1): 39 - 55.
- [50] 殷宗泽. 非饱和土的固结变形[M]// 岩土工程新进展, 国土资源部岩土工程开放研究实验年报(1997-1998). 西安: 西北大学出版社, 2000, 17 - 24. (YIN Zong-ze. Consolidation deformation of unsaturated soils[M]// New Advances in Geotechnical engineering, Annual Research Report in Geotechnical Engineering for the Ministry of Land and Resources(1997-1998). Xi'an: Northwestern University Publishing Co, 2002, 17 - 24.)
- [51] 沈珠江. 非饱和土简化固结理论及其应用[J]. 水利水电工程学报, 2003, **4**(1): 1 - 6. (SHEN Zhu-jiang. Simplified consolidation theory for unsaturated soils and its application [J]. Hydro-Science and Engineering, 2003, **4**(1): 1 - 6.)