

关于“岩体动力失稳的折迭突变模型”的讨论

潘 岳

(青岛理工大学土木工程学院, 山东 青岛 266520)

中图分类号: TU45 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2010)01-0158-03

作者简介: 潘 岳(1947-), 男, 教授, 从事岩体系统动力失稳方面的研究工作。E-mail: panyue@qtech.edu.cn。

Discussion on “Fold catastrophe model of rock dynamic destabilization”

PAN Yue

(College of Civil Engineering, Qingdao Technological University, Qingdao 266520, China)

《岩土工程学报》2009 年第 4 期刊登了题为“岩体动力失稳的折迭突变模型”^[1]的文章, 以下称之为原文。原文多方引用笔者的研究成果, 但在引用和表述中存在若干问题。为不使读者误解, 笔者特将问题提出, 并与原文作者商榷。

(1) “岩体动力失稳问题的一般方程”的提法有误

笔者在文献[2]中由能量守恒原理导得试验机-岩样系统作准静态形变时的功、能增量平衡关系式。将系统外力 P 、试验机形变 u_n 与岩样受力 $F(u)$ 代入该关系式, 再除以岩样微形变 $du(>0)$, 得到作单轴压缩试验机-岩样系统(一维问题)作准静态形变时的平衡方程:

$$F(u) \frac{F'(u)}{k_m} + F(u) - J = 0 \quad (A)$$

式中, J 为能量输入率。

假定岩样的承载力-形变关系符合 Weibull 分布 $F(u) = l u \exp[-(u/u_0)]$, 将其代入式(A)并在 $F(u)$ 曲线拐点 u_1 处展开, 根据突变理论的不确定性规则略去对系统稳定性无影响的高次项, 发现方程式(A)对应突变理论中折迭突变模型的平衡方程, 按突变理论方法对岩样在试验机上压缩爆裂和渐进破裂特性进行了全面研究。折迭突变模型平衡曲面如图1所示。

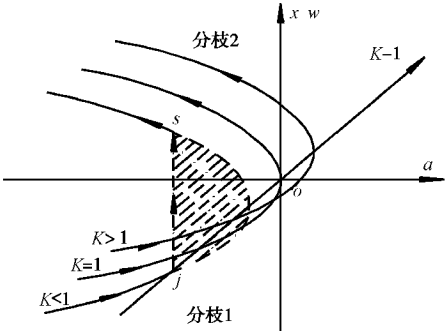


图 1 折迭突变模型平衡曲面^[2]

Fig. 1 Equilibrium surface of fold catastrophe model

原文按照文献[2~4]的思路和推导关系, 将岩样的荷载-

形变关系表达式 $F(u)$ 代入准静态形变平衡方程式(A), 写出折迭突变的准静态形变平衡方程:

$$\left[\frac{u - u_1}{u_1} + \frac{(1-K)[F'(u_1)]^2}{u_1 F(u_1) F''(u_1)} \right]^2 - \frac{(1-K)^2 [F'(u_1)]^4}{u_1^2 [F(u_1)]^2 [F''(u_1)]^2} - 2 \frac{(1-K)F'(u_1)}{u_1^2 F''(u_1)} - 2 \frac{J k_m}{u_1^2 F(u_1) F''(u_1)} = 0 \quad (1)$$

式中, u_1 为 $F(u)$ 曲线软化段拐点, $K = k_m / a m = k_m / |F'(u_1)|$ 为围岩刚度 k_m 与 $|F'(u_1)|$ 的比值, $a = l \exp[-(1+m)/m]$, l 为岩体初始刚度。原文在摘要和结论称式(1)“给出了岩体动力失稳问题的一般方程”。

式(A)是受单轴压缩即一维情况下岩体失稳前兆阶段的准静态形变平衡方程。实际上自然界、矿井及地下岩土工程中发生的岩体系统动力失稳现象不只限于一维失稳问题, 它们有的是二维问题, 有的甚至是三维问题。例如地(或矿)震问题, 图2给出走滑式断层地(矿)震的一个断面。宽 $2l$ 的断层外围是处于弹性状态的围岩, 在断层左右分别截取长 L 的部分。

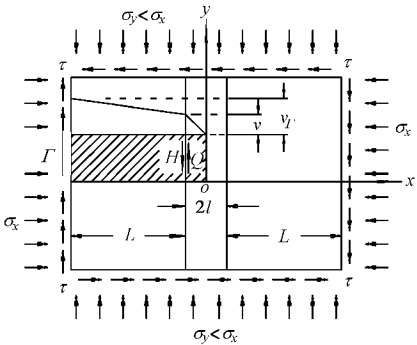


图 2 走滑式断层矿震的简化模型

Fig. 2 Simplified model of strike-slip fault rockburst

图 2 中的围岩-断层系统作用有变化的切应力

讨论稿收稿日期: 2009-10-22

答复稿收稿日期: 2009-12-01

$t = t_{xy} = t_{yx}$ 与正应力 s_x, s_y 。通常情况下 $s_x \neq s_y$, 因此围岩、断层在发生剪切变形的同时还存在压缩和拉伸变形。变化的切应力与正应力通常并不相关, 所以走滑式断层地(矿)震问题是两维失稳问题。由于沿垂直于图 2 xoy 平面的 z 轴方向分布的 t 与 s_x, s_y 一般并不是常数。所以严格说来断层地(矿)震是三维失稳问题。还有正断层地(或矿)震和逆冲断层地(或矿)震, 它们不能简化为两维失稳问题; 对于启程剧动式滑坡, 滑移层一般并不是一个平面, 沿下滑方向滑移层岩石受力并不均匀, 沿下滑方向滑移层岩石作不均匀压剪形变, 较为严格的分析, 是不能将一般启程剧动式滑坡作为一维失稳问题处理。其他岩体系统两维失稳例子不多赘述。

一般方程是能够描述一般情况下岩体运动的方程。式(1)是由式(A)导得的用于描述一维情况下岩体动力失稳的方程, 不能用于处理两维和三维岩体失稳问题。原文称式(1)“给出了岩体动力失稳问题的一般方程”的提法有误。

(2) 式(2)~(5)与式(9)中的问题

原文据式(1)给出图1中分枝1和分枝2的表达式:

$$x_1 = \frac{u - u_1}{u_1} + \frac{(1-K)[F'(u_1)]^2}{u_1 F(u_1) F'''(u_1)} = -\sqrt{2 \frac{(1-K)F'(u_1)}{u_1^2 F'''(u_1)} - \frac{(1-K)^2 [F'(u_1)]^4}{u_1^2 [F(u_1)]^2 [F'''(u_1)]^2} - \frac{2Jk_m}{u_1^2 F(u_1) F'''(u_1)}}; \quad (2)$$

$$x_2 = \frac{u - u_1}{u_1} + \frac{(1-K)[F'(u_1)]^2}{u_1 F(u_1) F'''(u_1)} = \sqrt{2 \frac{(1-K)F'(u_1)}{u_1^2 F'''(u_1)} - \frac{(1-K)^2 [F'(u_1)]^4}{u_1^2 [F(u_1)]^2 [F'''(u_1)]^2} - \frac{2Jk_m}{u_1^2 F(u_1) F'''(u_1)}}; \quad (3)$$

状态变量 x 的跳跃幅值:

$$\Delta x = 2\sqrt{-\frac{(1-K)^2 [F'(u_1)]^4}{u_1^2 [F(u_1)]^2 [F'''(u_1)]^2} + 2 \frac{(1-K)F'(u_1)}{u_1^2 F'''(u_1)}}; \quad (4)$$

以及跳跃时的位移:

$$\frac{u_j - u_s}{u_1} = -\frac{(1-K)[F'(u_1)]^2}{u_1 F(u_1) F'''(u_1)} - \sqrt{-\frac{(1-K)^2 [F'(u_1)]^4}{u_1^2 [F(u_1)]^2 [F'''(u_1)]^2} + 2 \frac{(1-K)F'(u_1)}{u_1^2 F'''(u_1)}}。 \quad (5)$$

原文假定岩样的荷载-形变关系 $F(u)$ 符合 Weibull 分布:

$$F(u) = I u \exp[-(u/u_0)^m], \quad (6)$$

将式(6)代入式(2)~(4)后得到:

$$x_1 = \frac{u - u_1}{u_1} + \frac{m(1-K)}{(1+m)^2} = -\sqrt{\frac{m^2(1-K)^2}{(1+m)^4} + \frac{2F(u_1)(1-K) + 2KJ}{F(u_1)(1+m)^2}}, \quad (7)$$

$$x_2 = \frac{u - u_1}{u_1} + \frac{m(1-K)}{(1+m)^2} = \sqrt{\frac{m^2(1-K)^2}{(1+m)^4} + \frac{2F(u_1)(1-K) + 2KJ}{F(u_1)(1+m)^2}}, \quad (8)$$

$$\Delta u = 2\sqrt{\frac{m^2(1-K)^2}{(1+m)^4} + \frac{2(1-K)}{(1+m)^2}}, \quad (9)$$

并称: 当 $m=1$ 时, 由其式(7)、(8)得结果与文献[2]完全一致。

a) 式(2)~(4)根号中的正负号有误

文献[3]中研究矿井断层冲击地压时, 在 $s_x = s_y = \text{常量}$ 、断层只发生剪切变形(一维问题)的条件下, 假定断层的荷载-形变关系为

$$Q(v) = I v \exp[-(v/v_0)^m], \quad (B)$$

文献[3]算出 $Q(v)$ 曲线软化段拐点 v_t 处的各阶导数值如下:

$$\left. \begin{aligned} Q(v_t) &= a v_t, \\ Q'(v_t) &= -a m, \\ Q''(v_t) &= 0, \\ Q'''(v_t) &= \frac{a}{v_t^2} m(1+m)^2, \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

式中, $a = I \exp[-(1+m)/m]$ 。

用 $F(u)$ 或是 $Q(v)$ 来表述问题是无所谓的。将式(C)中各阶导数值代入式(2)~(4), 并按 $K = k_m/a m = k_m/[F'(u_1)]$ 进行整理, 便容易发现式(2)~(4)根号内每一项中正号者改为负号, 而负号者改为正号, 才能得到式(7)~(9)的右端。例如式(C)代入式(2)、(3)根号内第二项得

$$\begin{aligned} -\frac{(1-K)^2 [F'(u_1)]^4}{u_1^2 [F(u_1)]^2 [F'''(u_1)]^2} &= -\frac{(1-K)^2 [a m]^4}{u_1^2 [a u_1]^2 [a m(1+m)^2/u_1^2]^2} \\ &= -\frac{(1-K)^2 m^2}{(1+m)^4}, \end{aligned} \quad (10)$$

比式(7)、(8)中对应的第一项多了一个与负号, 等等。

顺便指出, 文献[3]在 2001 年就用 $Q(v)$, v_t 得到式(7)~(9)的结果。文献[4]在 2005 年用符号 $F(u)$, u_t 给出式(8)、(9)。

b) 式(5)不是跳跃时的位移值

式(5)不是跳跃时的位移值。跳跃时的位移值应为

$$u_j = u_1 - \left[\frac{(1-K)[F'(u_1)]^2}{u_1 F(u_1) F'''(u_1)} + \sqrt{\frac{(1-K)^2 [F'(u_1)]^4}{u_1^2 [F(u_1)]^2 [F'''(u_1)]^2} - 2 \frac{(1-K)F'(u_1)}{u_1^2 F'''(u_1)}} \right] u_1, \quad (D)$$

式(D)根号中的正负号已对式(5)作了更正。

c) 原文式(9)左端 Δu 的量纲[是长度量纲[L], 但右端均无量纲, 等式两端的量纲不同, 表明式(9)不完整。

(3) 在引用中出现的其他失误

a) 其一是原文 554 页右栏, 作者将 $F(u)$ 代入式(A), 并将 $F(u)$ 在其软化段拐点 u_1 处展开整理后得

$$\begin{aligned} &\left(\frac{u - u_1}{u_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{u - u_1}{u_1} \right) \frac{(1-K)[F'(u_1)]^2}{u_1 F(u_1) F'''(u_1)} + \\ &2 \frac{(1-K)[F'(u_1)]^2}{u_1^2 F'''(u_1)} - \frac{2Jk_m}{u_1^2 F(u_1) F'''(u_1)} + O(u - u_1)^3, \end{aligned} \quad (11)$$

原文称, 式(11)中 $(u - u_1)^2/u_1^2$ 的系数不为零, 在突变理论中它对应的是 2 参数平衡方程, ……。

突变理论中 2 参数模型只有一个, 是尖点突变模型, 尖点突变平衡方程的正则形式为 $x^3 + ax + b = 0$ 。实际上原文是将式(11)归结为折迭突变模型进行讨论, 折迭突变模型是单参数突变模型, 其平衡方程的正则形式为 $x^2 + a = 0$ 。正确表述应当为: 由于式(11)中 $(u - u_1)^2/u_1^2$ 的系数不为零, 根据突变

理论中的确定性规则,可略去 $O(u-u_1)^3$ 部分,用式(11)中 $(u-u_1)^2/u_1^2$ 及其以下部分来讨论系统的稳定性。

b) 其二是原文555页右栏最后两行和556页左栏上方两行述及:当II体有位移增量 du 时,两体系统动力失稳的临界条件可展开表示为

$$F(u)\frac{F'(u)}{k_m} + F(u) - J = 0, \quad (12)$$

这说明两体系统失稳的临界条件 $J=0$ 中,隐含了岩体失稳的Cook刚度准则,即

$$F'(u) + k_m = 0, \quad (13)$$

但是实际上,从式(12)中怎么也看不出来还隐含着Cook刚度准则式(13)。

c) 其三是原文556页左栏第6~11行述及,“在图4的c点与1点间及1点之后必存在 j 点和 s 点,在 j 点和 s 点上满足

$$\begin{cases} F'(u_j) + k_m = 0, \\ F'(u_s) + k_m = 0, \end{cases} \quad (14)$$

即在 j 点和 s 点上满足 $J(u_j)=0$, $J(u_s)=0$,系统处于临界状态。”

文献[2~4]中已阐明, j 点是岩体系统失稳起始点或围岩弹性能大量瞬间释放的起始点,因此可以说在 j 点,系统处于临界状态; s 点是跳跃终止点或围岩弹性能大量瞬间释放终止点。尽管 $J(u_s)=0$,也绝不能说“在 s 点,系统处于临界状态”。

参考文献:

[1] 张黎明,王在泉,张晓娟,等.岩体动力失稳的折迭突变模

型[J].岩土工程学报,2009,31(4):552-557.(ZHANG Li-ming, WANG Zai-quan, ZHANG Xiao-juan, et al. Fold catastrophe model of rock dynamic destabilization[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, 31(4): 552-557. (in Chinese))

[2] 潘岳.岩石破坏过程的折迭突变模型[J].岩土工程学报,1999,21(3):299-303.(PAN Yue. Fold catastrophe model of dynamic damaging in rock[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1999, 21(3): 299-303. (in Chinese))

[3] 潘岳,刘英,顾善发.矿井断层冲击地压的折迭突变模型[J].岩石力学与工程学报,2001,20(1):43-48.(PAN Yue, LIU Ying, GU Shan-fa. Fold catastrophe model of Mining fault rock burst[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2001, 20(1): 43-48. (in Chinese))

[4] 潘岳,张勇.岩体失稳前兆阶段准静态形变平衡方程和加载参数能量输入率[J].岩石力学与工程学报,2005,24(22):4080-4087.(PAN Yue, ZHANG Yong. Quasi-static equilibrium equation and load parameter-energy importing rate in premonitory phase of rock destabilization[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(22): 4080-4087. (in Chinese))

对“岩体动力失稳的折迭突变模型”讨论的答复

张黎明,王在泉

(青岛理工大学理学院,山东 青岛 266033)

中图分类号: TU45

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2010)01-0160-03

作者简介: 张黎明(1977-),男,山东威海人,讲师,从事地下工程稳定性方面研究。E-mail: dryad_274@163.com。

Reply to the discussion on “Fold catastrophe model of rock dynamic destabilization”

ZHANG Li-ming, WANG Zai-quan

(College of Science, Qingdao Technological University, Qingdao 266033, China)

首先非常感谢潘岳老师对笔者发表于《岩土工程学报》2009年第4期的“岩体动力失稳的折迭突变模型”一文的深入讨论,并对编辑部同志的辛勤工作表示诚挚的谢意!

笔者在进一步查阅了相关文献^[1-14]基础上就相关问题进行说明,以回答潘岳老师提出的若干问题。

笔者试图解释岩爆等灾害的突发性时,发现突变理论能较

好的解释这种突跳现象,并查阅了相关的突变理论文献。笔者认为,国内采用突变理论研究岩爆等动力灾害的模型主要有:尖点突变模型和折迭突变模型两种。尖点突变模型国内应用较多,典型的文章如文献[12,13],折迭突变模型典型的文章如文献[1~11]。仔细研究这些文章可以发现:其思路都是先写出相关的势函数,然后求出平衡曲面和失稳临界点,最后讨论系

统在平衡曲面的突跳问题。采用这个思路,变换不同的研究对象(或者本构关系),已有学者发表了很过关于突变理论的文章。由此笔者想到,在突变模型中采用更为一般的函数形式,推导其通用的方程,就可以省掉推导复杂的方程过程。这也是本文的初衷。

文章的思路,是笔者综合了国内关于尖点突变和折迭突变相关的文章后而总结的,由于潘岳老师是国内较少采用折迭突变模型研究岩体动力失稳问题的学者之一,因此文章引用了潘岳老师的文章。这些文章在参考文献中都已经列出,但是文章中并没有标注完全。在此向潘岳老师表示歉意,今后一定会注意这方面的问题。

(1) 问题1: 岩体动力失稳问题的一般方程

众所周知,地下工程中发生的岩体系统动力失稳现象不只限于一维失稳问题,更多的是二维和三维问题,笔者将此类问题简化为一维问题,只是将研究对象进行了简化。对于一个较新的理论,研究问题都是先从简单的开始,然后逐步深入。关于岩体系统动力失稳问题的二维问题和三维问题,由于要考虑围压效应,其能量方程较为复杂,目前还正在研究中。如果要下一个更为准确的定义,潘岳老师讨论中的论述更为严谨,笔者文章中式(1)应改为“一维条件下的岩体动力失稳问题一般方程”。

另外,本构方程都是在某些假定基础上归纳而来的,都是对某种特定现象的抽象,一般情况下不具有普遍性。鉴于突变理论方程推导的复杂性,笔者文章的初衷在于推广折迭突变模型的一般方程,所以没有带入具体的本构方程,而是用一个函数代替。对于具体问题,只要将函数变成具体本构方程即可,省去了推导繁琐方程的过程。笔者认为,这种形式更有利于便于理解突变理论的内涵。

潘岳老师发表的多篇突变理论的文章,均假设岩体强度服从 Weibull 分布,实际上,Weibull 分布只是一种统计规律而已。Hudson J A 和 Harrison J P 早在 1997 年就指出^[15]: Weibull 分布理论只是一个统计理论,它并不包含任何具体的破坏机理,接受这个理论的前提是它能够符合实际岩体破坏过程的实验曲线。限于篇幅,笔者原文没有对其展开过多的讨论。现以笔者对灰岩试样进行的加、卸荷实验为例进行说明加、卸荷条件下岩体本构关系明显不同,如图1所示。卸荷破坏岩样轴向应变在达到峰值应变前没有明显的应变强化阶段,只是曲线斜率变缓,即应变增加速度加快,在此阶段环向应变和体积应变曲线都出现左拐(增加速度较快),岩样出现明显的侧向扩容,体积膨胀,并且在峰值应变时迅速向膨胀方向发展。随后岩样发生破裂,破坏时发生大幅度的应力降。显然,采用 Weibull 分布假设的本构方程不能够正确描述其本构关系。而采用一个函数代替,更具有普遍意义。

(2) 问题2: 式(2)~式(5)与式(9)的问题

讨论稿中式(2)~(5)是笔者采用 $F(u)$ 在 u_1 点的各阶导数进行的推导,笔者翻阅了当时公式推导的草稿,没有发现

正负号错误,此处还有待和潘岳老师进行具体的商讨。

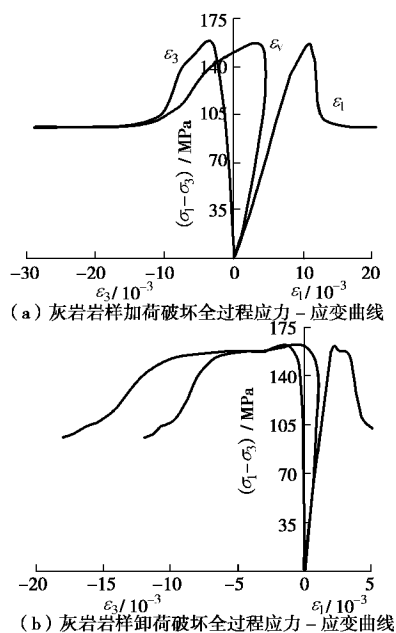


图1 典型灰岩岩样加、卸荷破坏全过程应力-应变曲线

Fig. 1 Complete stress-strain curve of limestone under loading and unloading conditions

式(9)为笔者笔误,丢掉了 u_1 项,正确写法为

$$\Delta u = 2u_1 \sqrt{\frac{m^2(1-K)^2}{(1+m)^4} + \frac{2(1-K)}{(1+m)^2}}. \quad (1)$$

(3) 问题3: 其它问题

讨论稿中问题3的第一个问题,潘岳老师的表达正确,原文的表述有问题,正确表达如潘岳老师讨论稿所述:“由于式(11)中 $(u - u_1)^2 / u_1^2$ 的系数不为零,根据突变理论中的确定性原则,可略去 $O(u - u_1)^3$ 部分,用式(11)中的 $(u - u_1)^2 / u_1^2$ 及其以下部分讨论系统的稳定性。”

讨论稿中问题3的第二个问题,对于原文式(3),原文是说“ $J=0$ 中,隐含了岩体失稳的 Cook 刚度准则”,具体如下:

$$F(u) \frac{F'(u)}{k_m} + F(u) - J = 0, \quad (2)$$

当 $J=0$ 时,式(2)变为

$$F'(u) + k_m = 0, \quad (3)$$

式(3)即为 Cook 刚度准则,此处正确。

讨论稿中问题3的第三个问题,系统跳跃时 s 点是跳跃终止点或围岩弹性能大量瞬间释放终止点,尽管 $J(u_s)=0$,但不能说系统处于临界状态。这一点潘岳老师指正的正确,笔者对此的描述有误,这也说明笔者对突变理论还有待进一步深化理解。

在此,非常感谢潘岳老师对文章提出的意见,使笔者对突变理论有了更进一步的认识,收益颇丰。笔者原文的初衷在于推广折迭突变方程的一般形式,省去推导复杂方程的麻烦,鉴于笔者的年轻,对博大精深的突变理论应用上还存在一些问题,并在论文引用和论文内容上出现了一些错误。在此,笔者

表示歉意,并希望潘岳老师今后能不吝赐教。

参考文献:

- [1] 潘岳. 岩石破坏过程的折迭突变模型[J]. 岩土工程学报, 1999, **21**(3): 299 - 303. (PAN Yue. Fold catastrophe model of damaging in rock[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1999, **21**(3): 299 - 303. (in Chinese))
- [2] 潘岳, 刘英, 顾善发. 矿井断层冲击地压的折迭突变模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2001, **20**(1): 43 - 48. (PAN Yue, LIU Ying, GU Shan-fa. Fold catastrophe model of mining fault rockburst[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2001, **20**(1): 43 - 48. (in Chinese))
- [3] 潘岳, 王志强. 岩体动力失稳的功、能增量 - 突变理论研究方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, **23**(9): 1433 - 1438. (PAN Yue, WANG Zhi-qiang. Rock coal model for studying the rockburst[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, **23**(9): 1433 - 1438. (in Chinese))
- [4] 潘岳, 张孝武. 狭窄煤柱岩爆的突变理论分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, **23**(11): 1797 - 1803. (PAN Yue, ZHANG Xiao-wu. Catastrophe theory analysis on rockburst in narrow coal pillar[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, **23**(11): 1797 - 1803. (in Chinese))
- [5] 潘岳, 王志强, 吴敏应. 岩体动力失稳终止点、能量释放量解析解与图解[J]. 岩土力学, 2006, **27**(11): 1915 - 1921. (PAN Yue, WANG Zhi-qiang, WU Min-ying. Analytic solution and illustration on destabilization end and energy releasing amount of rock dynamic destabilization[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, **27**(11): 1915 - 1921. (in Chinese))
- [6] 潘岳, 张勇, 于广明. 岩体失稳前兆阶段准静态形变平衡方程和加载参数-能量输入率[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, **24**(22): 4080 - 4087. (PAN Yue, ZHANG Yong, YU Guang-ming. Quasi-static deformation equilibrium equation and load parameter in premonitory phase of rock destabilization-energy importing rate[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, **24**(22): 4080 - 4087. (in Chinese))
- [7] 潘岳, 张勇, 于广明. 圆形洞室岩爆机制及其突变理论分析[J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(6): 741 - 749. (PAN Yue, ZHANG Yong, YU Guang-ming. Mechanism and catastrophe theory analysis of circular tunnel rockburst[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2006, **27**(6): 741 - 749. (in Chinese))
- [8] 潘岳, 张勇, 王志强. 煤与瓦斯突出中单个煤壳解体突出的突变理论分析[J]. 岩土力学, 2009, **30**(3): 595 - 602. (PAN Yue, ZHANG Yong, WANG Zhi-qiang. Catastrophe theory analysis of disintegrated outburst of a single coal shell in coal-gas outburst[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, **30**(3): 595 - 602. (in Chinese))
- [9] 王志强, 潘岳. 顶板 - 锚拉支架系统稳定性的突变理论分析[J]. 金属矿山, 2003(9): 1 - 3. (WANG Zhi-qiang, PAN Yue. Analysis of the stability of roof-truss system by catastrophic theory[J]. Metal Mine, 2003(9): 1 - 3. (in Chinese))
- [10] 王志强, 厉志娟, 潘岳. 构件受扭脆坏的折迭突变模型[J]. 青岛建筑工程学院学报, 2004, **25**(2): 15 - 20. (WANG Zhi-qiang, LI Zhi-juan, PAN Yue. Fold catastrophe model of brittle damage's mechanical of torsion member[J]. Journal of Qingdao Institute of Architecture and Engineering, 2004, **25**(2): 15 - 20. (in Chinese))
- [11] 王志强. 突变理论在突发性地质灾害中的应用[D]. 青岛: 青岛建筑工程学院, 2003. (WANG Zhi-qiang. Application of catastrophe theory in vesuvian geological disaster[D]. Qingdao: Qingdao Institute of Architecture and Engineering, 2003. (in Chinese))
- [12] 唐春安, 徐小荷. 岩石破裂过程失稳的尖点突变模型[J]. 岩石力学与工程学报, 1990, **9**(2): 100 - 107. (TANG Chun-an, XU Xiao-he. A cusp catastrophic model of rock unstable failure[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1990, **9**(2): 100 - 107. (in Chinese))
- [13] 潘一山, 章梦涛. 洞室岩爆的尖角型突变模型[J]. 应用数学和力学, 1994, **15**(10): 893 - 900. (PAN Yi-shan, ZHANG Meng-tao. The study of chamber rockburst by the cusp model of catastrophe theory[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1994, **15**(10): 893 - 900. (in Chinese))
- [14] 凌复华. 突变理论及其应用[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1987. (LING Fu-hua. Catastrophe theory and its application[M]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 1987. (in Chinese))
- [15] HUDSON J A, HARRISON J P. Engineering rock mechanics: an introduction to the principles[M]. New York: Elsevier Science Inc, 1997.