

# 下负荷面剑桥模型在 ABAQUS 中的开发实现

黄 雨, 周子舟

(1. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

**摘 要:** 利用大型有限元软件 ABAQUS 所提供的 UMAT 用户材料子程序接口, 针对下负荷面剑桥模型开发了子程序, 对超固结土的三轴排水与不排水试验进行了数值模拟, 将结果与解析解进行了比较; 对同样条件下不同 OCR 超固结土的三轴排水与不排水试验进行了模拟。结果表明: 所开发的子程序具有良好的稳定性和较高的计算精度, 能够反映超固结土的应力应变特性 (如应变软化), 得到比较合理的数值分析结果。

**关键词:** 下负荷面剑桥模型; 应变软化; 用户材料子程序; 三轴压缩试验

**中图分类号:** TU43 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2010)01-0115-05

**作者简介:** 黄 雨(1973-), 男, 江苏南京人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事工程地质与岩土工程的教学和研究工作。E-mail: [yhuang@tongji.edu.cn](mailto:yhuang@tongji.edu.cn)。

## Numerical implementation for subloading Cam-clay model in ABAQUS

HUANG Yu, ZHOU Zi-zhou

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** The user subroutine UMAT for user-defined material behaviors in commercial FEM code ABAQUS is utilized for subloading Cam-clay model. The drained and undrained triaxial shear tests on heavily overconsolidated soil are simulated using ABAQUS with the proposed UMAT code. The results are compared with the analytical solutions. The drained and undrained triaxial shear tests on overconsolidated soil with different OCRs are also simulated. It has been proved that the calculated results are valid and can reflect the strain softening behaviors of overconsolidated soil.

**Key words:** subloading Cam-clay model; strain softening; user material subroutine; triaxial compression test

## 0 前 言

ABAQUS 由美国 HKS 公司研制开发, 是目前世界上普遍公认的最先进的大型通用非线性有限元力学分析软件。对于岩土这种存在高度非线性的材料, ABAQUS 求解器的优势不言而喻。近年来, 数值计算在我国岩土问题研究和工程实践中的重要性与日俱增, ABAQUS 在这一领域的应用也得到迅速推广。但是, 与其他通用有限元软件一样, ABAQUS 自带的岩土本构模型比较有限, 仅有 Mohr-Coulomb 模型、Drucker-Prager 模型、修正剑桥模型等少数几种。其中 M-C 模型和 D-P 模型基于经典弹塑性理论, 而基于临界状态土力学的修正剑桥模型也仅能对单调加载下的正常固结黏土做出较为精确的描述。这显然已经不能满足当前土力学发展的要求和工程研究的需要。

为了弥补上述不足, ABAQUS 在其丰富的子程序扩展平台中提供了允许用户自定义所需材料的力学行为的用户材料子程序 UMAT(User-Defined Material Behavior)。它可将用户自行编写的本构关系嵌入主程

序中进行有限元分析。这一强大便捷的功能极大地拓展了程序在岩土应用方面的应用价值。一些学者已应用 UMAT 开发了自己需要的特殊本构关系<sup>[1-6]</sup>。本文笔者利用 ABAQUS 提供的 UMAT 子程序, 完成了下负荷面剑桥模型(subloading Cam-Clay model)接口的开发工作。下负荷面剑桥模型是基于下负荷面概念, 在剑桥模型基础上推导出来的。它能够合理描述黏土卸载再加载的特性, 从而反映超固结黏土的应力应变特性, 弥补了 ABAQUS 自带本构模型的不足。将 ABAQUS 模拟结果与模型解析解进行了对比。

计算结果表明, 模型算例的求解效率和精度令人满意, 有望成为强大的解决大型复杂土工问题的非线性数值分析工具。

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(40802070); 上海市科学技术委员会资助项目(08201201400); 上海市重点学科建设项目(B308)

**收稿日期:** 2008-11-06

## 1 下负荷面剑桥模型

### 1.1 下负荷面的概念

在经典土力学弹塑性理论(包括剑桥模型)中,卸载及再加载过程中的土的应力应变关系被假定为弹性,但实际上这一过程中也会产生塑性应变。此外,正常固结黏土一旦进入卸载后再加载时就处于超固结状态了,即在超固结状态下也会产生塑性应变。

Hashiguchi 等<sup>[7-8]</sup>提出下负荷面的概念以解决屈服面内应力状态无法造成塑性应变的问题。它有如下两个基本特征:①连续平滑的弹塑性应力应变关系,图 1 显示下负荷面模型中在再加载过程依然产生了塑性应变;②下负荷面是经过当前应力点并和正常屈服面几何相似的面,如图 2 所示。在下负荷面概念的描述下,即使土体应力状态处于正常屈服面内,在进行加载时仍会产生塑性应变,能较好地反映曼辛效应(滞回特性)、棘轮效应(塑性应变的积累性)等材料的主要循环加载特性。

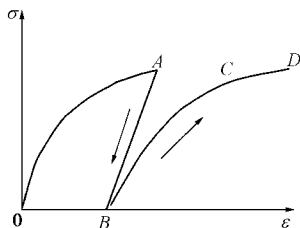


图 1 下负荷面模型的卸载再加载过程中的应力-应变关系  
Fig. 1 Stress-strain relationship in subloading model under unloading and reloading

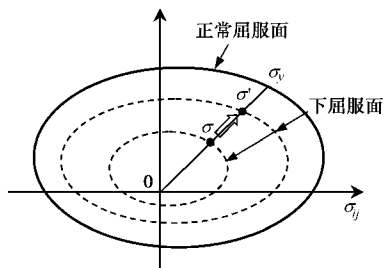


图 2 应力空间中的下负荷面

Fig. 2 Subloading surface in stress space

### 1.2 下负荷面剑桥模型的意义及表达式

Asaoka 等<sup>[9]</sup>在剑桥模型基础上建立了下负荷面剑桥模型并进行了验证,后来,张锋等<sup>[10]</sup>借用 Nakai 等<sup>[11]</sup>提出的土的密度的概念,在传统剑桥模型的基础上,加入了一个反映土体超固结比的状态变量  $r$ , 结合下负荷面的概念,推导了一个超固结重塑黏土的下负荷面剑桥模型。

依据下负荷面的物理意义,下负荷面剑桥模型的屈服面方程(亦即下负荷面方程),流动法则(采用联

合流动法则)及协调方程如下:

$$f = \ln \frac{s_m}{s_{m0}} + \frac{\sqrt{3}}{M^*} \frac{\sqrt{J_2}}{s_m} - \frac{1}{C_p} (e_v^p - \frac{r}{1+e_0}) = 0, \quad (1)$$

$$de_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial s_{ij}}, \quad (2)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} ds_{ij} - \frac{1}{C_p} (de_v^p - \frac{dr}{1+e_0}) = 0. \quad (3)$$

式中  $(s_m, \sqrt{J_2})$  为一般应力空间不变量,  $s_m = \frac{I_1}{3}$ ,

$\sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}}$ ;  $s_{m0}$  为初始平均有效应力;  $M^*$  为临界状态下剪切应力比;  $C_p = (1-k)/(1+e_0)$ ,  $l$  和  $k$  分别为压缩指数和膨胀指数;  $e_0$  为参考应力下孔隙比;  $\Lambda$  为非负塑性乘子;  $r$  为相对于剑桥模型新增的与 OCR 有关的状态变量,定义为  $r = (1-k) \ln \frac{p_{N1e}}{p_{N1}}$ , 其

中  $p_{N1e} = p_0 \exp \frac{e_v^p}{C_p}$ ,  $p_{N1} = s_m \exp \left( \frac{\sqrt{3}}{M^*} \frac{\sqrt{J_2}}{s_m} \right)$ ,  $p_0$  为参

考应力;  $dr = -(1+e_0) \frac{ar^2}{s_m} \Lambda$ ,  $a$  为一材料参数,决定  $r$  的发展速度,即超固结比的变化速率。

下负荷面剑桥模型能够较为精确地描述超固结,特别是重超固结黏土的力学特性,如体积剪胀,应变软化等。下负荷面概念的引入,使模型具备了描述循环荷载下土体应力应变特性的能力。因此,下负荷面剑桥模型有能力利用形式简单,物理意义明确的表达式,是一个很有应用价值和发展前途的岩土本构模型。

## 2 应力更新算法的实现

### 2.1 隐式积分算法

常用的积分算法分为显式积分算法和隐式积分算法。显式 Euler 积分算法会使解答从屈服面漂移,导致不精确的结果。本文进行应力更新计算时采用的积分算法基于完全隐式向后 Euler 图形返回算法。这种方法强化了本构关系积分在时间步结束时的一致性,即  $f_{n+1} = 0$ , 被证明是强健和精确的。针对本模型的应力更新过程,由于当前应力状态始终处于下负荷面上,故无需判断材料是否达到屈服。积分算法主要思路:

(1) 首先计算塑性乘子  $L$ , 判断其正负号,根据模型加载准则判断加卸载状态,若为正则  $|de_{ij}^p| > 0$ , 处于加载状态;否则  $|de_{ij}^p| = 0$ , 处于卸载状态。

(2) 根据加卸载状态选择计算应力增量的方法:若为卸载状态则根据弹性矩阵计算应力增量;若为加载状态则  $n \sim (n+1)$  步时按如下方式计算:

$$d\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{C} : \left[ I d\mathbf{e}_{n+1} - L \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{s}_{n+1}} \right], \quad (4)$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_n + d\mathbf{s}_{n+1}, \quad (5)$$

$$d\mathbf{e}_{n+1}^p = L \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{s}_{n+1}}, \quad (6)$$

$$\mathbf{e}_{n+1}^p = \mathbf{e}_n^p + d\mathbf{e}_{n+1}^p, \quad (7)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} d\mathbf{s} - \frac{1}{C_p} (d\mathbf{e}_v^p - \frac{d\mathbf{r}}{1+e_0}) = 0, \quad (8)$$

式 (4) ~ (8) 为加载状态下的应力更新式。进行积分迭代时采用 Newton-Raphson 方法联立求解上述非线性方程组 (4) ~ (8), 从而求得  $\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^k$ ,  $\mathbf{e}_{n+1}^p = (\mathbf{e}_{n+1}^p)^k$ , 并据此更新一致性弹塑性模量矩阵  $\mathbf{C}_{n+1}^{ep}$ , 即雅克比矩阵。回到步骤 (1) 进行下一步长  $(n+1) \sim (n+2)$  的计算。

(3) 根据更新后得到的应力计算新的雅克比矩阵, 作为应力增量对应变增量的变化率输入给主程序。

## 2.2 子程序实现

在程序求解过程中, 每一个增量加载步开始时, ABAQUS 主程序都会在单元积分点上调用 UMAT, 传入当前状态的应力、应变、用户自定义状态变量等做为已知量, 同时也传入主程序计算得出的应变增量; UMAT 需要依此求解应力增量, 更新应力及其它相关的变量, 并向主程序提供更新后的雅克比矩阵, 即应力增量对应变增量的变化率<sup>[12]</sup>。雅克比矩阵将同单元应变矩阵运算形成单元刚度矩阵, 进而获得总体刚度矩阵; 主程序结合当前荷载增量求解位移增量并进行平衡校核; 如果不满足指定的误差, ABAQUS 将进行迭代 (默认采用 Newton-Raphson 迭代方法) 直到认为收敛, 然后进行下一增量步的求解。

因此, UMAT 子程序的运算任务就是在主程序传入的已知量的基础上, 通过前述迭代运算, 得到更新后的应力增量与应力增量对应变增量的变化率, 即雅克比矩阵, 并将其传递给主程序, 以完成下一运算步的计算。对于下负面剑桥模型, 经过推导, 可以得出模型的应力增量与应变增量的关系式为

$$d\mathbf{s}_{ij} = \left[ E_{ijkl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{pq}} E_{mnkl} E_{ijpq}}{1+e_0 \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{mn}} + \frac{a\mathbf{r}^2}{s_m} \right) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{mn}} E_{mnpq} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{pq}}} \right] d\mathbf{e}_{kl}, \quad (9)$$

式中,  $d\mathbf{s}_{ij}$  是应力增量,  $d\mathbf{e}_{kl}$  是应变增量,  $f$  是塑性势函数,  $E$  是弹性模量。

根据式 (9) 即可完成应力更新的计算, 并得出相应的雅克比矩阵。具体编程思路见图 3。

另外, 编写 UMAT 时有以下 3 点需要注意:

ABAQUS 主程序传递应力  $\sigma(r)$ 、总应变  $\varepsilon(r)$ 、时间增量  $\Delta t$ 、总应变增量 DSTRAN  
从 STATEV 中获取自定义状态变量值

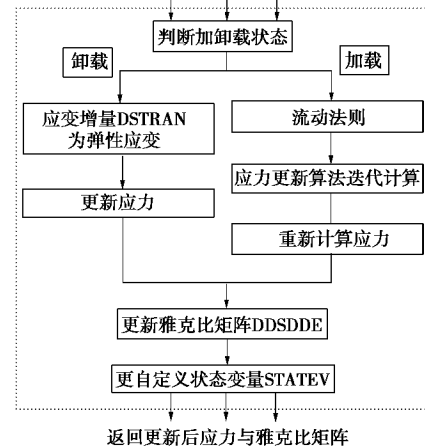


图 3 UMAT 子程序编程思路框图

Fig. 3 Programming concept of UMAT subroutines

(1) ABAQUS 采用弹塑性理论的应力符号约定, 程序中应力和应变的符号与土力学的约定相反。因此,

平均应力状态变量表达式变为  $s_m = -\frac{I_1}{3}$ 。

(2) ABAQUS 中, 应力张量和应变张量采用的是  $1 \times 6$  的数组存储的, 顺序分别为 11, 22, 33, 12, 13, 23; 应变数组的 4, 5, 6 分量是剪应变, ABAQUS 中采用工程应变, 屈服函数求导可直接对分量求导数。

(3) 若初始条件设置不合适, ABAQUS 第一次计算中传递给 UMAT 的应变 STRAN 和应变增量 DSTRAN 的值可能为 0, 此时 UMAT 中的应力也可能为 0, 会引起除 0 的情况。

## 3 数值验证

为了验证上述积分算法的精度与稳定性, 本文对超固结土的三轴排水与不排水压缩试验进行了数值模拟, 并将计算结果与文献[10]提供的本模型三轴应力状态下单元试验的解析解进行了对比。在模拟过程中, 按照试验过程, 保持侧向围压不变, 通过控制轴向应变逐渐施加轴向压力。模型参数:  $v=0$ ,  $\lambda=0.095504$ ,  $\kappa=0.008836$ ,  $e_0=0.88$ ,  $M^*=1.3636$ ,  $a=500$ ,  $p_0=98$  kPa,  $OCR=16$ 。有限元分析采用直径  $D=1$  m, 高度  $H=1$  m 的三轴试样, 划分为 4 个 8 节点轴对称四边形减缩积分单元。中心线上约束  $x$  向 (径向) 自由度, 底面约束  $z$  向 (轴向) 自由度。计算开始时施加三向等压固结应力, 建立初始的自平衡应力状态; 然后在试样顶部按照位移控制施加竖向荷载, 直至试样轴向应变达到 20%。数值计算结果与解析解计算结果对比情况见图 4。

图 4~7 给出了下负面剑桥模型解析解和其 UMAT 非线性有限元模拟结果。从轴向应变与主应力

差、轴向应变与剪应力比的比较来看,数值模拟结果与解析解有很好的-致性,证明本文所采用的积分算法是正确的,成功实现了所选模型的开发。

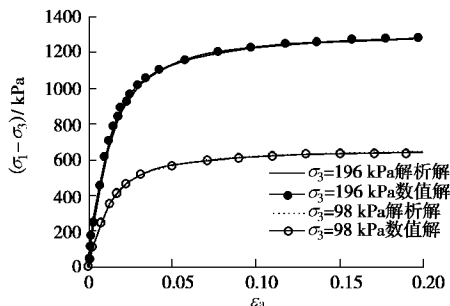


图 4 三轴不排水剪切试验中围压分别为 196, 98 kPa 时解析解与数值解的 $(\sigma_1-\sigma_3)-\varepsilon_a$ 对比曲线

Fig. 4 Relationship between  $(\sigma_1-\sigma_3)$  and  $\varepsilon_a$  for analytical and numerical solutions in undrained triaxial shear tests under confining pressure=196, 98 kPa

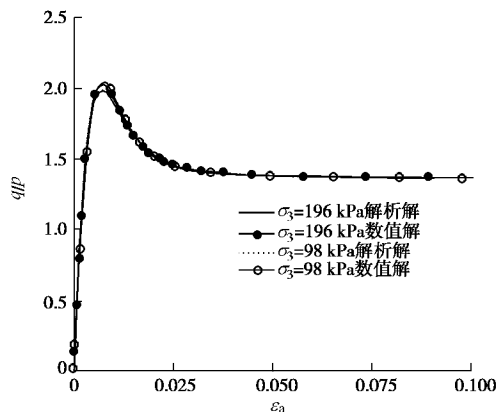


图 5 三轴不排水剪切试验中围压分别为 196, 98 kPa 时解析解与数值解的 $q/p-\varepsilon_a$ 对比曲线

Fig. 5 Relationship between  $q/p$  and  $\varepsilon_a$  for analytical and numerical solutions in undrained triaxial shear tests under confining pressure=196, 98 kPa

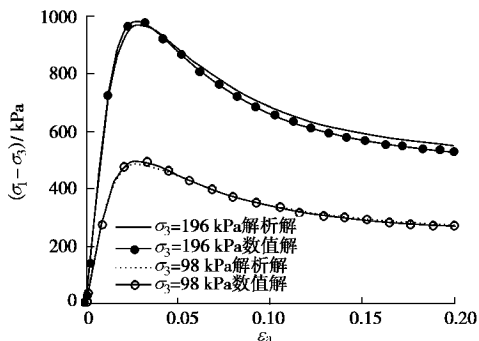


图 6 三轴排水剪切试验中围压分别为 196, 98 kPa 时解析解与数值解的 $(\sigma_1-\sigma_3)-\varepsilon_a$ 对比曲线

Fig. 6 Relationship between  $(\sigma_1-\sigma_3)$  and  $\varepsilon_a$  for analytical and numerical solutions in drained triaxial shear tests under confining pressure=196, 98 kPa

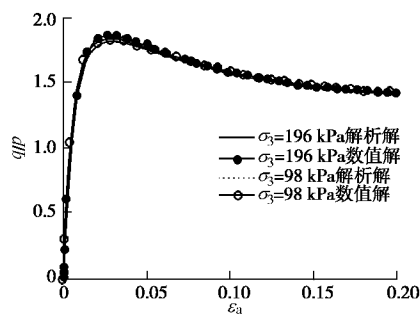


图 7 三轴排水剪切试验中围压分别为 196, 98 kPa 时解析解与数值解的 $q/p-\varepsilon_a$ 对比曲线

Fig. 7 Relationship between  $q/p$  and  $\varepsilon_a$  for analytical and numerical solutions in drained triaxial shear tests under confining pressure=196, 98 kPa

比较图 4 和图 7, 可以发现超固结土在三轴不排水剪切试验中表现出应变硬化, 而在三轴排水剪切试验中表现出应变软化。超固结重塑黏土的一个非常重要的特征就是应变软化与体积膨胀是紧密联系的。因为应变硬化参量使用的是塑性体积应变, 当塑性体积应变增量为正(即体积压缩时), 屈服面向外扩张, 发生应变硬化, 但若塑性体积应变增量为负时(即体积膨胀时), 屈服面向里退缩, 发生应变软化。

另外, 笔者还用同样的方法模拟了围压为 196 kPa 时超固结土 OCR 分别取 16, 8, 4, 2 的三轴排水与不排水压缩试验, 结果见图 8。

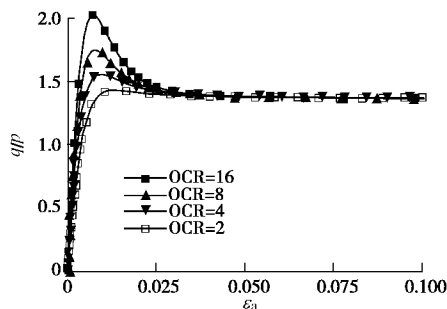


图 8 三轴不排水剪切试验中不同 OCR 的 $q/p-\varepsilon_a$ 对比曲线

Fig. 8 Relationship between  $q/p$  and  $\varepsilon_a$  in undrained triaxial shear tests under different OCRs

从图 8, 9 的模拟结果中可以清晰地看出超固结土的应变软化特性, 并且可以观察到这种特性随着 OCR 的上升趋于明显。这与土工试验中观察到的超固结土变形特性是一致的, 同时也证明了本子程序运算的正确性。

应变软化过程实际上是一种不稳定过程, 而且其应力应变间不成单值函数关系, 所以反映土的应变软化的数学模型一般形式比较复杂, 也难以准确反映这种应力应变特点<sup>[13]</sup>。但形式简单、物理意义明确的下负荷面剑桥模型计算结果清晰地描述出了超固结土的应变软化特性。

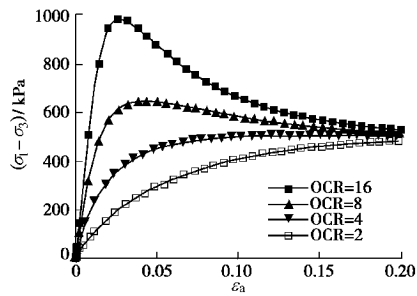


图9 三轴排水剪切试验中不同 OCR 的 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \varepsilon_a$ 对比曲线

Fig. 9 Relationship between  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  and  $\varepsilon_a$  in drained triaxial shear tests under different OCRs

## 4 结 语

下负负面剑桥模型能够利用形式相对简单易懂,物理意义明确的表达式,较为精确地描述超固结,特别是重超固结黏土的力学特性,如体积剪胀,应变软化等。由于引入了下负负面的概念,使得模型具备了描述循环荷载下土体应力应变特性的能力。

通过 ABAQUS 的用户子程序平台实现了对下负负面剑桥模型的二次开发。算例模拟结果显示,所用本构积分算法具有很高的精确度,能够利用本模型反映超固结土的应力应变特性。由于开发工作的难点将集中在本构模型和应力更新积分算法上,用户自行开发有限元软件的难度大大降低,开发周期也大为缩短。

利用 ABAQUS 所提供强大的非线性有限元分析功能及优秀的前后处理界面,结合本文所得到的先进的本构模型 UMAT 子程序,有望完成大型复杂应力状态下的土工数值分析问题,扩大该软件在土工有限元分析中的应用范围,同时,也可为开发其它土工模型提供借鉴与参考。

**致 谢:** 感谢日本名古屋工业大学张锋教授对于有关本构模型的指导与帮助。

## 参考文献:

[1] 詹云刚, 袁凡凡, 栾茂田. 纯摩擦型岩土介质本构积分算法及其在 ABAQUS 中开发应用[J]. 岩土力学, 2007, **18**(12): 2619 - 2623. (ZHAN Yun-gang, YUAN Fan-fan, LUAN Mao-tian. Integration algorithm of constitutive equation for cohesionless-frictional geomaterial and its application to ABAQUS[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, **18**(12): 2619 - 2623. (in Chinese))

[2] 付凯敏, 黄晓明. 基于 ABAQUS 的修正 Burgers 蠕变模型二次开发[J]. 公路工程. 2008, **33**(3): 132 - 137. (FU Kai-min, HUANG Xiao-ming. The secondary development of modified Burgers creep model BASED on ABAQUS general software[J]. Highway Engineering, 2008, **33**(3): 132 - 137. (in Chinese))

[3] 范庆来, 栾茂田, 杨 庆. 修正剑桥模型的隐式积分算法在 ABAQUS 中的数值实施[J]. 岩土力学. 2008, **29**(1): 269 - 273. (FAN Qing-lai, LUAN Mao-tian, YANG Qing. Numerical implementation of implicit integration algorithm for modified Cam-clay model in ABAQUS[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, **29**(1): 269 - 273. (in Chinese))

[4] 徐远杰, 王观琪, 李 健, 等. 在 ABAQUS 中开发实现 Duncan-Chang 本构模型[J]. 岩土力学, 2004, **25**(7): 1033 - 1036. (XU Yuan-jie, WANG Guan-qi, LI Jian, et al. Development and implementation of Duncan-Chang constitutive model in ABAQUS[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, **25**(7): 1033 - 1036. (in Chinese))

[5] 庄海洋, 陈国兴, 梁艳仙, 等. 土体动非线性黏弹性模型及其 ABAQUS 软件的实现[J]. 岩土力学, 2007, **28**(3): 436 - 442. (ZHUANG Hai-yang, CHEN Guo-xing, LIANG Yan-xian, et al. A developed dynamic viscoelastic constitutive relations of soil and implemented by ABAQUS software[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, **28**(3): 269 - 273. (in Chinese))

[6] 岑威钧, 朱岳明. 基于 ABAQUS 的土石料本构模型二次开发及其应用[J]. 水利水电科技进步, 2005, **25**(6): 78 - 81. (CEN Wei-jun, ZHU Yue-ming. ABAQUS-based secondary development of constitutive model for earth rock-fill materials and its application[J]. Advances in Science and Technology of Water Resources, 2005, **25**(6): 78 - 81. (in Chinese))

[7] HASHIGUCHI K, UENO M. Elastoplastic constitutive laws of granular material[C]// Constitutive Equations of Soils, Tokyo, JSSMFE, 1977.

[8] HASHIGUCHI K. Subloading surface model in unconventional plasticity[J]. International Journal of Solids and Structures, 1989, **25**: 917 - 945.

[9] ASAKA A, NODA T, YAMADA E, et al. An elasto-plastic description of two distinct volume change mechanisms of soils[J]. Soils and Foundations. 2002, **42**(5): 47 - 57.

[10] 张 锋, 叶冠林. 计算土力学[M]. 北京: 人民交通出版社, 2007. (ZHANG Feng, YE Guan-lin. Computational soil mechanics[M]. Beijing: China Communications Press, 2007. (in Chinese))

[11] NAKAI T, HINOKIO M. A simple elastoplastic model for normally and over consolidated soils with unified material parameters[J]. Soils and Foundations. 2004, **44**(2): 53 - 70.

[12] HIBBIT, KARLSON, SORRENSON. ABAQUS user's manual[R]. Rhode Island: Pawtucket R I, 2002.

[13] 李广信. 高等土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004. (LI Guang-xin. Advanced soil mechanics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese))