

圆弧状沉积谷地在平面 SH 波入射下的动力响应

张郁山

(中国地震灾害防御中心, 北京 100029)

摘 要: 针对圆弧状沉积谷地对平面 SH 波的二维散射问题, 曾有学者提出一种闭合形式的解析解, 将波的散射问题转化为一无穷维代数方程组求解, 但较高的入射波频率会导致该方程组的系数矩阵病态, 从而限制了该解析解适用的频带范围。沿用这种闭合式的解析解的求解思路, 并通过选择坐标系避免了线性方程组的求解, 散射波函数的待定系数具有明确的解析表达式, 因此在一个非常宽的频带范围内给出了该散射问题的解析解, 并探讨了入射波与谷地特性对地面运动的影响。

关键词: 平面 SH 波; 谷地; 散射; 解析解; 场地效应

中图分类号: TU435

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2010)01-0001-06

作者简介: 张郁山(1974-), 男, 河北唐山人, 副研究员, 从事地震工程学研究。E-mail: hyszhang@163.com。

Dynamic response of arc-layered alluvial valley under incidence of plane SH waves

ZHANG Yu-shan

(China Earthquake Disaster Prevention Center, Beijing 100029, China)

Abstract: For the two-dimensional scattering problem of plane SH waves in alluvial valley with a circular-arc section, some researchers proposed a type of closed-form analytical solution, which reduced the scattering problem into the solution of an infinite-dimensional algebraic equation system. The high incident frequency will cause the system coefficient matrix to be ill-conditioned, which limits the usable frequency band of the analytical solution. Here, the method of this solution is followed, however, in the solving procedure, the solution of linear equation system is avoided by selecting coordinate system, with the undetermined coefficients of scattering wave functions possessing definite analytical expressions. As a result, the analytical solution to this scattering problem is presented in a very broad frequency band, and the influence of the properties of the incident wave as well as the valley on the ground motion is discussed.

Key words: plane SH wave; valley; scattering; analytical solution; site effect

0 前 言

规则的沉积谷地在平面 SH 波入射下动力响应的解析解的研究是一个经典的工程波动理论课题, 该问题的研究对于揭示该类场地的波动效应具有理论与实际意义。

Trifunac^[1]最先利用波函数的 Fourier-Bessel 级数展开法求解了半圆形沉积谷地对 SH 波的散射。之后, Wong 等^[2]利用波函数的 Mathieu 级数展开求解了半椭圆形谷地对 SH 波的散射。由于相对半圆形和半椭圆形, 具有不同深宽比的浅圆弧形能更好地模拟实际谷地的边界, 因此针对浅圆弧形谷地对 SH 波的散射问题, Todorovska 等^[3]提出了近似的解析解, 利用一半径非常大的圆弧近似模拟水平地表, 将散射波函数展开成 Fourier-Bessel 级数的形式, 引入边界条件后, 波函数中的待定系数通过求解线性方程组确定; 该方法

在 P 波^[4-5]、SV 波^[6-7]和 Rayleigh 波^[8]的散射问题上也得到了应用。针对同样的问题, Yuan 等^[9]提出了闭合形式(closed-form)的级数解, 避免了上述大圆弧假定的引入。该解析解首先构造满足地表零应力边界条件的散射波级数表达式; 然后利用外域型 Graf 加法公式并引入谷地圆弧边界的连续条件, 将 SH 波散射问题简化为一无穷维代数方程组的求解问题。

针对上述浅圆弧形沉积谷地对 SH 波的散射问题, 现有解析解^[3,9]均需求解线性方程组以确定散射波函数的待定系数。由于入射波频率的增大将会导致方程组系数矩阵的病态, 从而限制了上述解析解适用的

基金项目: 国家自然科学基金项目(50608066); 国家科技支撑计划项目(2006BAC13B02); 地震科学联合基金项目(A07045)

收稿日期: 2008-11-04

频带范围。

本文沿用 Yuan 等^[9]的求解思路,但是在求解过程中,通过选择不同的求解极坐标系,避免了线性方程组的求解,散射波函数的待定系数具有明确的解析表达式。利用该方法,本文在一个非常宽的频带范围内给出了所研究问题的解,探讨了级数解的收敛性,并分析了入射波与谷地的特性对地面运动的影响。

1 理论公式的推导

谷地的模型如图 1 所示。谷地沉积介质的剪切波速和密度为 b_v , r_v , 半空间介质的剪切波速和密度为 b_s , r_s , 所有介质假定为均匀、线弹性、各向同性。

谷地的边界为一圆弧,其圆心在 o_1 点,半径为 b ; 谷地地表中心点为 o_2 , 谷地半宽为 a , 深度为 h , 圆心 o_1 与地表之间的垂直距离为 d 。入射 SH 波的幅值为 1, 圆频率为 ω , 入射角为 γ , 其位移在坐标系 x_2 - o_2 - z_2 中为

$$v^i = \exp[-i\omega(t - \frac{x_2}{c_x} + \frac{z_2}{c_z})] \quad (1)$$

式中, $c_x = \frac{b_s}{\sin \gamma}$, $c_z = \frac{b_s}{\cos \gamma}$ 分别为 x 方向和 z 方向上的相速度。

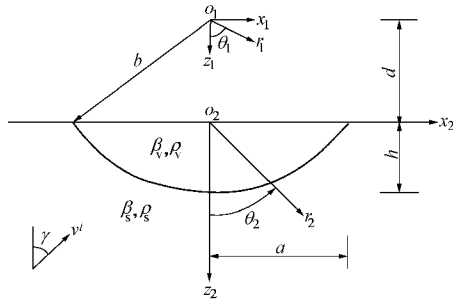


图 1 沉积谷地的模型

Fig. 1 Model of alluvial valley

在极坐标系 r_1 - o_1 - θ_1 与 r_2 - o_2 - θ_2 下, 所有散射波的位移 v 满足:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2)$$

其中, b 为介质的波速。

在坐标系 r_2 - o_2 - θ_2 下, 地表零应力边界条件可表示为

$$t_{q_2 y_2} |_{q_2 = \pm \pi/2} = 0; \quad (3)$$

在坐标系 r_1 - o_1 - θ_1 下, 圆弧边界处的连续条件可表示为

$$\left. \begin{aligned} v^v |_{r_1=b} &= v^s |_{r_1=b}, \\ t_{r_1 y_1} |_{r_1=b} &= t_{r_1 y_1} |_{r_1=b}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中, 字母 v 与 s 分别表示谷地沉积介质与半空间介质, τ 表示出平面剪应力,

$$\left. \begin{aligned} t_{q_2 y_2} &= \frac{m}{r} \frac{\partial v}{\partial q}, \\ t_{r_2 y_2} &= m \frac{\partial v}{\partial r}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中, μ 为介质的剪切模量, $\mu = rb^2$ 。

在 Yuan 等^[9]提出的解析解中, 首先在极坐标系 r_2 - o_2 - θ_2 下构造了如下谷地沉积介质与半空间介质中散射波的 Fourier-Bessel 级数展开式 (考虑稳态情况, 略去时间因子 $\exp(-i\omega t)$, 以下同):

$$v^v = \sum_{n=0}^{\infty} [J_{2n}(k_v r_2) A_{2,2n}^v \cos 2n q_2 + J_{2n+1}(k_v r_2) B_{2,2n+1}^v \sin(2n+1) q_2], \quad (6)$$

$$v^s = \sum_{n=0}^{\infty} [H_{2n}^{(1)}(k_s r_2) A_{2,2n}^s \cos 2n q_2 + H_{2n+1}^{(1)}(k_s r_2) B_{2,2n+1}^s \sin(2n+1) q_2], \quad (7)$$

式中, $J_n(x)$ 表示第一类 Bessel 函数, $H_n^{(1)}(x)$ 表示第一类 Hankel 函数, 将上述波函数分别代入式 (2)、(3)、(5) 中, 可以看出它们自动满足波动方程 (2) 和零应力边界条件 (3)。

为进行坐标变换, Yuan 等^[9]推导出如下外域型 Graf 加法公式:

$$C_n(r_1) \begin{Bmatrix} \cos n q_1 \\ \sin n q_1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} [J_{m-n}(d) \pm (-1)^n J_{m+n}(d)],$$

$$C_m(r_2) \begin{Bmatrix} \cos m q_2 \\ \sin m q_2 \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

式中, C 表示第一类 Bessel 函数或第一类 Hankel 函数。

利用式 (8) 可以得到波函数 v^v 和 v^s 在坐标系 r_1 - o_1 - θ_1 下的表达式:

$$v^v = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_v r_1) (A_{1,m}^v \cos m q_1 + B_{1,m}^v \sin m q_1), \quad (9)$$

$$v^s = \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(1)}(k_s r_1) (A_{1,m}^s \cos m q_1 + B_{1,m}^s \sin m q_1), \quad (10)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} A_{1,m}^v \\ B_{1,m}^v \end{Bmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} P_{m,2n}^+(k_v d) A_{2,2n}^v \\ P_{m,2n+1}^-(k_v d) B_{2,2n+1}^v \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} A_{1,m}^s \\ B_{1,m}^s \end{Bmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} P_{m,2n}^+(k_s d) A_{2,2n}^s \\ P_{m,2n+1}^-(k_s d) B_{2,2n+1}^s \end{Bmatrix}, \\ P_{m,n}^{\pm}(x) &= \frac{\varepsilon_m}{2} [J_{m-n}(x) \pm (-1)^n J_{m+n}(x)]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

在 Yuan 等^[9]的求解过程中, 将式 (6)、(7) 中的系数 $A_{2,2n}^v \sim B_{2,2n+1}^s$ 作为基本未知量, 通过求解线性方程组最终在极坐标系 r_2 - o_2 - θ_2 下确定整个散射波场。

本文则是将式 (9)、(10) 中的系数 $A_{1,m}^v \sim B_{1,m}^s$ 作为基本未知量, 在极坐标系 r_1 - o_1 - θ_1 下确定散射波场。首先确定自由场位移函数, 即谷地沉积不存在的情况下弹性半空间在 SH 波入射下的位移场, 包括式 (1)

给出的入射波场和反射波场。反射波场为

$$v^r = \exp[-i\omega(t + \frac{x_2}{c_x} + \frac{z_2}{c_z})]。 \quad (12)$$

自由场位移可表示为

$$v^{i+r} = v^i + v^r。 \quad (13)$$

借助展开公式^[10]

$$\exp(\pm ikr \cos q) = \sum_{m=0}^{\infty} e_m (\pm i)^m J_m(kr) \cos mq, \quad (14)$$

以及坐标系 $x_2-o_2-z_2$ 与 $r_1-o_1-\theta_1$ 之间的转换关系:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= r_1 \sin q_1, \\ z_2 &= r_1 \cos q_1 - d_0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

自由场位移在极坐标系 $r_1-o_1-\theta_1$ 下可表示为

$$v^{i+r} = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_s r_1) (A_{0,m} \cos mq_1 + B_{0,m} \sin mq_1), \quad (16)$$

式中,

$$\begin{cases} A_{0,m} \\ B_{0,m} \end{cases} = e_m i^m [\pm(-1)^m e^{ik_s d \cos g} + e^{-ik_s d \cos g}] \begin{cases} \cos mg \\ \sin mg \end{cases}。 \quad (17)$$

式 (14)、(17) 中, 当 $m=0$ 时, $e_m=1$; 当 $m \neq 0$ 时, $e_m=2$ 。

综上, 半空间中的波包括式 (10) 给出的散射波和式 (16) 给出的自由场, 即 $v^s + v^{i+r}$, 而谷地内的波则包括式 (9) 给出的散射波, 即 v^v 。为了确定式 (9)、与式 (10) 中散射波函数的待定系数, 需要引入连续条件。将上述波函数代入连续条件式 (4) 可得:

$$\begin{aligned} \frac{H_m^{(1)}(k_s b)}{J_m(k_v b)} \begin{Bmatrix} A_{1,m}^s \\ B_{1,m}^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} A_{1,m}^v \\ B_{1,m}^v \end{Bmatrix} &= -\frac{J_m(k_s b)}{J_m(k_v b)} \begin{Bmatrix} A_{0,m} \\ B_{0,m} \end{Bmatrix}, \quad (18) \\ \frac{m k_s}{m k_v} \frac{H_m^{(1)}(k_s b)}{J_m'(k_v b)} \begin{Bmatrix} A_{1,m}^s \\ B_{1,m}^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} A_{1,m}^v \\ B_{1,m}^v \end{Bmatrix} &= -\frac{m k_s}{m k_v} \frac{J_m'(k_s b)}{J_m'(k_v b)} \begin{Bmatrix} A_{0,m} \\ B_{0,m} \end{Bmatrix}。 \quad (19) \end{aligned}$$

联立上述方程可确定待定系数 $A_{1,m}^s$ 和 $B_{1,m}^s$:

$$\begin{Bmatrix} A_{1,m}^s \\ B_{1,m}^s \end{Bmatrix} = -\frac{\frac{m k_s}{m k_v} \frac{J_m'(k_s b)}{J_m'(k_v b)} - \frac{J_m(k_s b)}{J_m(k_v b)}}{\frac{m k_s}{m k_v} \frac{H_m^{(1)}(k_s b)}{J_m'(k_v b)} - \frac{H_m^{(1)}(k_s b)}{J_m(k_v b)}} \begin{Bmatrix} A_{0,m} \\ B_{0,m} \end{Bmatrix}。 \quad (20)$$

系数 $A_{0,m}$ 和 $B_{0,m}$ 由式 (17) 确定。系数 $A_{1,m}^s$ 和 $B_{1,m}^s$ 确定后, 利用式 (18) 或式 (19) 即可确定系数 $A_{1,m}^v$ 和 $B_{1,m}^v$ 。因此在极坐标系 $r_1-o_1-\theta_1$ 下, 所有散射波的待定系数均已确定, 从而整个位移场即可在该坐标系下获得, 整个求解过程无需对无穷维线性方程组进行截断并求解, 极大地简化了求解过程, 从而也避免了求解线性方程组所遇到的数值计算问题。

2 结果分析

确定了散射波函数的待定系数之后, 可根据式 (9)、(10)、(16) 确定整个位移场。这时需要对上述

3 式中的无穷级数进行截断, 级数的收敛可按 Cauchy 准则判断: 首先计算自有限项 N 截断所得的结果; 然后计算自 $N+1$ 项截断所得的结果, 如果二者之间的误差满足给定的精度要求, 则所得结果即为最终解。

在计算地面点的位移幅值时, 以谷地中心点 o_2 为基准, 向左右各取 M 个离散空间点 (计算范围 $[-2a, 2a]$), 连同 o_2 点共计 $2M+1$ 个点。计算相邻截断项数之间的误差时, 先计算截断项数为 N 时与截断项数为 $N+1$ 时不同地表点之间位移差值的模, 即 $e_k(N) = |v_{N+1,k} - v_{N,k}|$ ($k=1, 2, \dots, 2M+1$), 然后求出这 $2M+1$ 个值的均方根

$$e(N) = \left[\frac{1}{2M+1} \left(\sum_{k=1}^{2M+1} e_k^2(N) \right) \right]^{1/2}, \quad (21)$$

将 e 作为与截断项数 N 对应的误差值, 可以做出误差图。

与文献[3, 9]一致, 本文依然采用如下无量纲参数描述入射波的频率:

$$h = \frac{2a}{l_s} = \frac{w a}{\pi c_s}, \quad (22)$$

式中, l_s 表示入射波波长。因此参数 η 表示谷地宽度与入射波波长之比, 其值越大, 入射波波长越小, 频率越高。文献[3, 9]中, η 的最大值取至 2.0。

首先分析本文所给出级数解的收敛性, 考虑表 1 中的 5 个算例。在计算过程中, 当与截断项数 N 对应的误差 $e < 10^{-6}$, 即认为级数收敛。图 2 给出了表 1 中 5 个算例的误差图。对级数解的收敛项数影响较大的是入射波的频率 η , 其值越大, 级数收敛所需项数 N_c 越多, 在其他计算参数相同的条件下, $\eta=2.0$ 时, $N_c=26$ (算例 1), 而当 $\eta=20.0$ 时, $N_c=157$ (算例 2)。从中也可看出, 即使 η 的值取至 20.0, 本文的级数解依然能够收敛, 在这种情况下, 入射波的波长仅为谷地宽度的 1/20。此外, 对级数收敛有影响的另一个参数是谷地的深度-半宽比 (h/a), 其值越小, 即谷地越浅, 级数收敛所需项数越多, 这一点从表 1 和图 2 中算例 1 与算例 4 之间的比较可以看出。

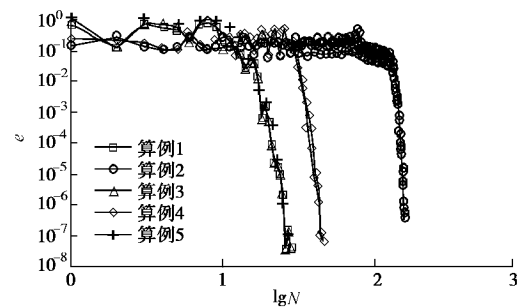


图 2 级数解随截断项数的收敛性

Fig. 2 Convergence of series solution with the truncation number of terms

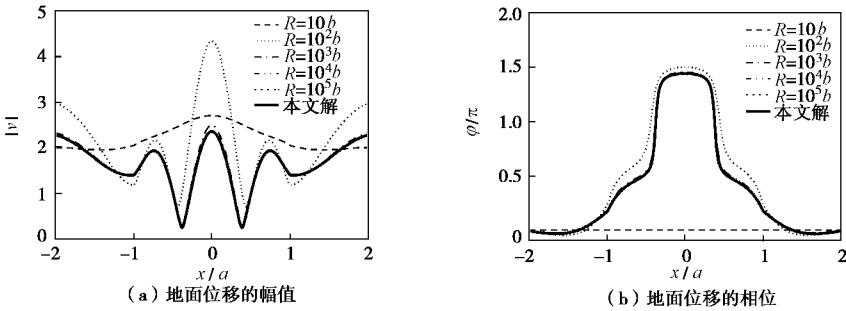


图 3 本文所得解与近似解析解之间的比较

Fig. 3 Comparison between the solution in this article and the approximate analytical solution

表 1 分析级数收敛性所用算例的计算参数

Table 1 Calculation parameters for numerical examples analyzing convergence of series

算例	频率 η	入射角 $\gamma/(^{\circ})$	波速比 $\beta_v : \beta_s$	密度比 $\rho_v : \rho_s$	谷地深度 - 半宽比 $h : a$	收敛项数 N_c
1	2.0	45	300 : 500	2.0 : 2.2	1 : 2	26
2	20.0	45	300 : 500	2.0 : 2.2	1 : 2	157
3	2.0	45	150 : 500	1.8 : 2.2	1 : 2	26
4	2.0	45	300 : 500	2.0 : 2.2	0.25 : 2	44
5	2.0	0	300 : 500	2.0 : 2.2	1 : 2	26

表 2 计算地面位移分布所用算例的计算参数

Table 2 Calculation parameters for numerical examples for computation of ground-motion displacement distribution

算例	入射角 $\gamma/(^{\circ})$	波速比 $\beta_v : \beta_s$	密度比 $\rho_v : \rho_s$	谷地深度 - 半宽比 $h : a$
6	0	300 : 500	2.0 : 2.2	1 : 2
7	45	300 : 500	2.0 : 2.2	1 : 2
8	0	300 : 500	2.0 : 2.2	0.5 : 2
9	0	150 : 500	1.8 : 2.2	1 : 2

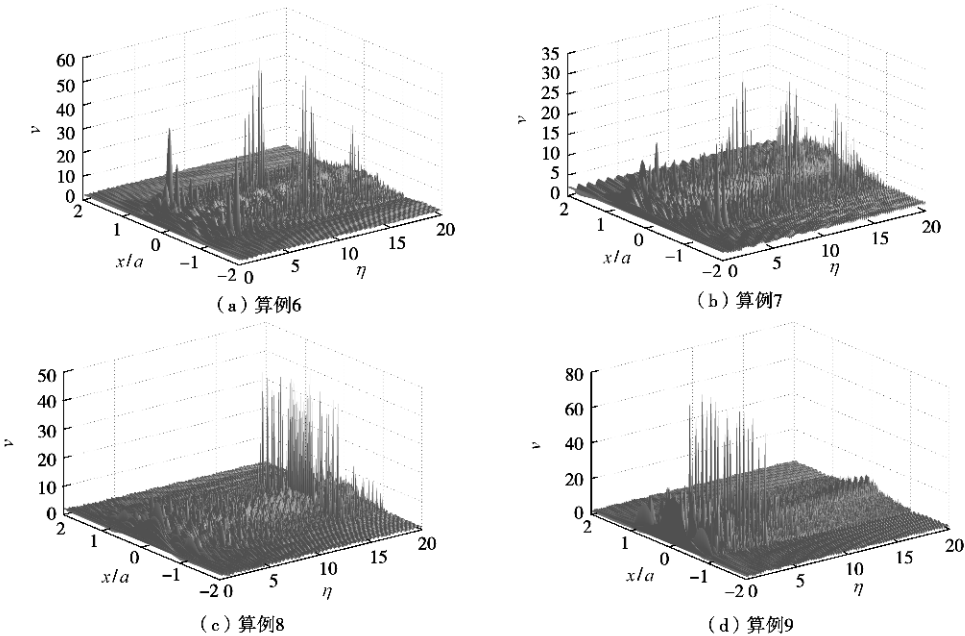


图 4 地面位移幅值分布图

Fig. 4 Distribution of ground displacement amplitude

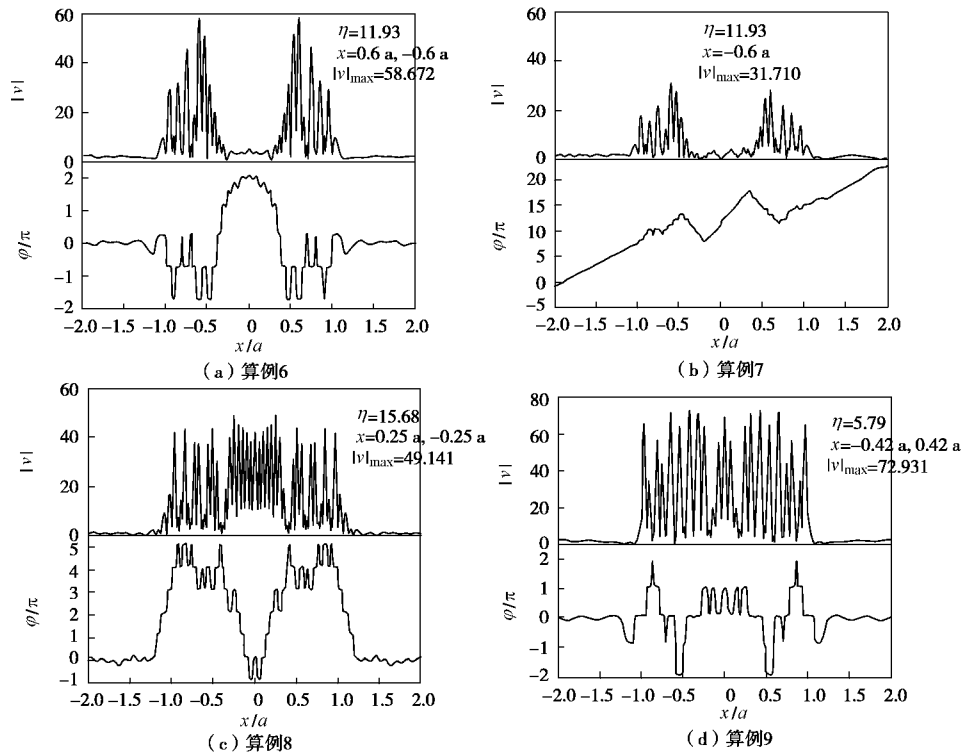


图 5 不同算例的卓越频率对应的地表位移幅值与相位

Fig. 5 Amplitude and phase of ground displacement corresponding to predominant frequency of each numerical example

通过算例 1, 3, 5 之间的比较可以发现, 谷地力学性质的变化以及入射波的入射角度对级数的收敛项数无影响。

图 3 给出了本文所得到的结果与 Todorovska 等^[3]所给出的近似解析解之间的比较。其中 $\eta = 1.0$, 入射角 $g = 0^\circ$, 介质的波速比为 $300 : 500$, 密度比为 $2.0 : 2.2$, 谷地深度 h 与半宽 a 之间的比值为 $1 : 2$ 。图中 R 为该近似解中用于模拟水平地表的大圆弧的半径。从中可以看出, 当 R 的值增大到 $10^5 b$ (b 为谷地圆弧边界的半径, 如图 1 所示) 时, 该近似解与本文所得解一致。

图 4 给出了表 2 所示 4 个算例对应的地面位移幅值分布, 其中频率 η 的值自 0.01 取至 20.0, 间隔为 0.01。如图 4 (a)、(b) 所示, 当 SH 波垂直入射时, 地面位移以 o_2 点为中心呈对称分布; 当 SH 波斜入射时, 地面位移分布不对称, 在大部分频段内, 迎波面 (即谷地左侧, $x_2 < 0$) 位移幅值略高于背波面 (即谷地右侧, $x_2 > 0$)。在这两种情况下, 谷地卓越频率 (即地表位移幅值最大值所对应的入射波频率) 不变, 均在 $\eta = 11.0$ 附近的频段内。与图 4 (a) 相比, 在其他计算参数相同的情况下, 当谷地变浅 ($h : a = 0.5 : 2$) 时, 其卓越频率增加, 位于 $\eta = 15.0$ 附近的频段, 如图 4 (c) 所示; 同样, 与图 4 (a) 相比, 在其他计算参数相同的情况下, 当谷地内沉积介质变软时, 其卓越频率降低, 位于 $\eta = 5.0$ 附近的频段, 如图 4 (d) 所示。

上述 4 个算例的卓越频率所对应的地面位移的幅值与相位曲线如图 5 所示, 图中给出了卓越频率的值、位移幅值的最大值所在位置以及相应的位移幅值。可以看出, 当入射波的频率与谷地卓越频率相等时, 谷地地表的位移达到了一个非常高的水平, 在这 4 种情况下, 谷地卓越频率分别为 11.93, 11.93, 15.68, 5.79, 地面位移幅值最大值分别达到了 58.672, 31.710, 49.141, 72.931, 远远超出了文献[3, 9]中给出的结果, 它们均给出了 $\eta \leq 2.0$ 的结果, 而上述 4 个算例谷地的卓越频率均大于 2.0。此外从图 5 中还可看出, 当地表位移幅值曲线出现极小值点时, 其相位曲线发生突变, 这样的地表点类似于驻波的波节点, 因此当入射波频率较高时, 谷地附近散射波之间复杂的干涉效应导致地面运动表现出了驻波的特征。

3 结 语

沿用文献[9]的方法, 本文重新求解了一经典的工程波动问题, 在求解过程中通过选择求解极坐标系, 避免了无穷维线性方程组的截断与求解问题, 散射波的 Fourier-Bessel 级数展开式中的待定系数具有明确的解析表达式。

在理论推导之后, 本文首先分析了级数解随截断项数的收敛问题, 研究了影响级数收敛的因素, 并且将该结果与已有的近似解析解进行了比较; 其次利用该级数解, 本文在一个非常宽的频带范围内讨论了入

射波与谷地自身的特性对地面运动的影响,分析了谷地的力学与几何特征对其动力特性的影响。与现有其他结果^[3, 9]相比,本文在一个更宽的频带范围内求解了圆弧状沉积谷地对SH波的散射问题,因此更全面地揭示了该波动问题的物理机制,其分析结果表明,当入射波的频率与谷地的卓越频率相等时,地表位移幅值将达到一个非常高的水平,如此高的幅值在文献[3, 9]所探讨的频带范围内并未出现,而且谷地的卓越频率通常会超出上述文献所分析的频带范围。

参考文献:

- [1] TRIFUNAC M D. Surface motion of a semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1971, **61**(6): 1755 - 1770.
- [2] WONG H L, TRIFUNAC M D. Surface motion of a semi-elliptical alluvial valley for incident plane SH waves[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1974, **64**(5): 1389 - 1403.
- [3] TODOROVSKA M I, LEE V W. Surface motion of shallow circular alluvial valleys for incident plane SH wave-analytical solution[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1991, **10**(4): 192 - 200.
- [4] 梁建文, 严林隽, 李军伟, 等. 圆弧形沉积河谷场地在平面P波入射下的响应[J]. 岩土力学, 2001, **22**(2): 138 - 143. (LIANG Jian-wen, YAN Lin-jun, LI Jun-wei, et al. Response of circular-arc alluvial valleys under incident plane P waves[J]. Rock and Soil Mechanics, 2001, **22**(2): 138 - 143. (in Chinese))
- [5] LI W H, ZHAO C G, SHI P X. Scattering of plane P waves by circular-arc alluvial valleys with saturated soil deposits[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2005, **25**: 997 - 1014.
- [6] 梁建文, 严林隽, 秦东, 等. 圆弧形沉积河谷场地在平面SV波入射下的动力响应[J]. 土木工程学报, 2003, **36**(12): 74 - 82. (LIANG Jian-wen, YAN Lin-jun, QIN Dong, et al. Dynamic response of circular-arc sedimentary valley site under incident plane SV waves[J]. China Civil Engineering Journal, 2003, **36**(12): 74 - 82. (in Chinese))
- [7] 李伟华, 赵成刚. 饱和土沉积谷地对平面SV波的散射问题的解析解[J]. 地球物理学报, 2004, **47**(5): 911 - 919. (LI Wei-hua, ZHAO Cheng-gang. Scattering of plane SV waves by circular-arc alluvial valleys with saturated soil deposits[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2004, **47**(5): 911 - 919. (in Chinese))
- [8] 梁建文, 张秋红, 李方杰. 浅圆沉积谷地对瑞雷波的散射 - 高频解[J]. 地震学报, 2006, **28**(2): 176 - 182. (LIANG Jian-wen, ZHANG Qiu-hong, LI Fang-jie. Scattering of rayleigh waves by a shallow circular alluvial valley: high-frequency solution[J]. ACTA Seimologica Sinica, 2006, **28**(2): 176 - 182. (in Chinese))
- [9] YUAN X M, LIAO Z P. Scattering of plane SH waves by a cylindrical alluvial valley of circular-arc cross-section[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1995, **24**: 1303 - 1313.
- [10] ABRAMOWITZ M, STEGUN I A. Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs, and mathematical tables[M]. New York: Dover Publication, 1972.