



非饱和土的理论土—水特征曲线

Theoretical soil—water characteristic curve for unsaturated soils

栾茂田^{1, 2, 3}, 李顺群^{2, 4}, 杨庆^{1, 2},

(1. 大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024; 2. 大连理工大学 土木水利学院, 辽宁 大连 116024;
3. 中国科学院武汉岩土力学研究所, 湖北 武汉 430071; 4. 宁工学院 土木建筑系, 辽宁 锦州 121001)

摘要: 基于热力学理论建立了规则等直径圆球土颗粒之间的弯液面方程, 运用迭代法对这一高度非线性方程组进行了求解, 进而确定了理论意义上的基质吸力。文中考虑了基质吸力的作用面积, 提出了等效基质吸力和广义土—水特征曲线的概念。分析表明, 饱和度为 0 时等效基质吸力为 0, 随着饱和度的增大, 等效基质吸力逐渐增大, 并在某一饱和度处达到最大, 此时土体的强度最高。针对等直径土颗粒松散排列方式进行了具体计算与讨论。计算表明, 与基质吸力相比, 等效基质吸力随饱和度的变化并不十分显著, 而无论基质吸力还是等效基质吸力均随颗粒空间排列间隙的增大而迅速减小, 由此所得到的两种土—水特征曲线强烈地依赖于接触角的变化。

关键词: 非饱和土; 等效基质吸力; 表面张力; 接触角; 数值迭代法

中图分类号: TU 431 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2005)06-0611-05

作者简介: 栾茂田(1962-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事海洋土力学理论与实验技术、岩土力学基本理论与数值分析、非线性动力学与岩土工程等方面的科研和教学工作。

LUAN Mao-tian^{1, 2, 3}, LI Shun-qun^{2, 4}, YANG Qing^{1, 2}

(1. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 2. School of Civil and Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 3. Institute of Rock and Soil Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China; 4. Department of Civil Engineering, Liaoning Institute of Technology, Jinzhou 121001, China)

Abstract: Based on thermodynamics, nonlinear formulas were established and numerically programmed with an iterative approach for defining equation of meniscus between two regular ball-type soil particles with equal diameter. Therefore the matric suction could be determined accordingly. Considering effective action area of matric suction on granular media, the concepts of equivalent matric suction and generalized soil—water characteristic curve were presented. It was shown that equivalent matric suction depended on saturation and it started from zero for zero saturation and would gain its peak value for a certain saturation where the soil would mobilize its maximum strength and then weakened. The computations and discussions were made for the loosest assembling pattern of soil particles with equal diameter. It was demonstrated that both matric suction and equivalent matric suction would rapidly reduce with the increase of spacing of particles and the soil—water characteristic curves respectively based on both concepts were highly associated with the variation of contact angle of particles.

Key words: unsaturated soil; equivalent matric suction; surface tension; contact angle; numerical iterative approach

0 引言

一般认为非饱和土是固体颗粒、孔隙水和孔隙气所组成的三相系, 同时事实上液—气界面的性质既不同于液体也不同于气体, 目前有人作为独立的第四相考虑。孔隙的存在使得土中力系含有总应力作用和基质吸力, 并且基质吸力的变化对土的变形与强度特性具有决定性作用^[1, 2]。但是不难注意到, 随着土趋近完全变干, 虽然基质吸力增大, 但对体积变化和抗剪强度的作用降低^[3]。目前对此尚未给出合理的解释。非饱和土的工程特性紧密地依赖于基质吸力, 而基质吸力又与土中的含水率密切相关。因此, 确定非饱和土

的变形与强度特性中的一个关键问题是确定其土—水特征曲线, 由此可以确定土的渗透函数、抗剪强度等有关参数。关于土—水特征曲线, 尽管已经提出了多种表达式^[4-6], 这些数学模式一般是针对某种特定工程土在某个吸力范围内通过试验拟合直接得到的, 无法从理论上反映土—水特征曲线的本质和基质吸力的作用机理。本文拟从热力学角度基于理想微观模型对于基质吸力进行理论分析。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50179006); 教育部跨世纪优秀人才培养计划基金资助项目(教技函[1999]2号); 辽宁省教育厅科学研究计划资助项目(2004F105)

收稿日期: 2004-07-28

1 表面张力、润湿和接触角

气体分子间的作用力很小,不能维持一个自由表面;固体分子间的作用力很大,使得表面的分子与内部分子的受力虽然不同,但不会产生显著的表面力学现象。对于液体,表面分子的受力状态不同于内部分子的受力状态,在液体内部相互作用力表现为压力,在液体表面,存在着一种与液面相切而与边界线相垂直的促使液面收缩的力,称之为表面张力。单位长度截线上的表面张力称为表面张力系数 σ ,用于表达液体的表面特性。影响表面张力系数的因素包含液体成分、温度、相邻物质的化学性质及杂质等。当水与空气为界、温度为 18° 时,水的表面张力系数 $\sigma = 73 \times 10^{-3} \text{ N/m}^{[7]}$ 。

水在玻璃上向四周漫流的现象称为润湿;而水在石蜡上聚成近似球形的现象称为不润湿。润湿发生的条件取决于液体分子与固体分子间的相互作用力(附着力)与液体分子间的相互作用力(内聚力)的相对大小。不同液体对不同固体的润湿程度不同,润湿程度可以用液体表面和固体表面切线通过液体内部所成的夹角即接触角 δ 表示,如图1所示。

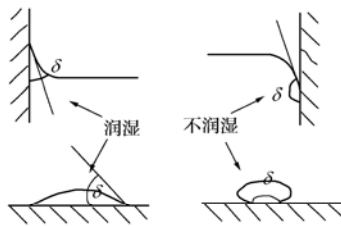


图1 润湿与接触角

Fig. 1 Wetting capability and contact angle

2 土-水特征曲线的影响因素

2.1 土的矿物成分

土的矿物成分包括土颗粒和可溶盐的矿物成分。亲水性较强的矿物所组成的土的吸力较大,相应地残余含水率较大,曲线的斜率较平缓。

2.2 孔隙结构

孔隙结构包括孔隙大小、级配和组成结构等。孔隙结构形式影响土水作用面积和收缩膜的形状,收缩膜的形状决定着吸力的大小。土体的孔隙小,进气值高,持水性强,相应地土-水特征曲线平缓。

2.3 土粒的力学性质

土体在外力作用下所表现出的压缩及相应的其它变形,将改变土的孔隙结构,进而影响收缩膜形状和土的持水能力,从而改变土-水特征曲线形状。

2.4 液体的性质

液体的表面张力取决于液体的性质,从而不仅弯液面的形状及液面内外压力差依赖于液体,而且液体和固体之间的接触角与液体性质密切相关。

2.5 孔隙气

表面张力和接触角不仅依赖于固体和液体的物理化学性质,而且依赖于孔隙气的成分和压力。对于非饱和土,孔隙气或与大气直接相通,或为水所封闭。

3 基质吸力与饱和度之间的理论关系

下面从理论上分析球形颗粒间弯液面所应满足的几何条件。设两球半径均为 R ,两者之间的间隙为 $2a$,相互位置关系如图2所示,当两球之间的水量较小(环状水)时,忽略其重力作用。这里借用热力学中所采用的一般假定,即假设弯液面的形状为圆弧。在 xoy 平面内,液面是半径为 r 的一段圆弧,点 P 为液面与土颗粒的交点, b 为液面底端的高度,定义为饱和半径, $2(R+a)$ 为球心之间的距离, δ 为水与土颗粒的接触角。则弯液面方程为

$$x^2 + (y - b - r)^2 = r^2 \quad (1)$$

在点 P 处弯液面的切线斜率应与接触角相协调,于是

$$y' = -\frac{x}{y - b - r} = (\tan \frac{\pi}{2} - \delta - \arcsin(\frac{y}{R})) \quad (2)$$

同时注意到点 P 位于圆形颗粒的表面,于是

$$(x - R - a)^2 + y^2 = R^2 \quad (3)$$

对于点 P ,联立几何条件(1)、(2)和(3),从理论上可以确定弯液面的方程。注意到该联立方程组是高度非线性的,无法直接得到其解析解。因此考虑采用迭代法进行数值求解。这里采用下列不动点迭代格式,

$$x = \sqrt{2y(b+r) - y^2 - 2br - b^2} \quad (4a)$$

$$y = \sqrt{R^2 - (x - a - R)^2} \quad (4b)$$

$$r = x \cot(\frac{\pi}{2} - \delta - \arcsin(\frac{y}{R})) - b + y \quad (4c)$$

由此可以确定弯液面的几何方程。

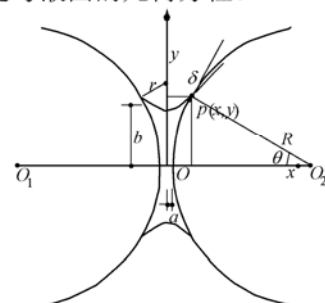


图2 球形颗粒与弯液面的几何关系

Fig. 2 Geometry of ball-type particles and meniscus

面考虑弯液面上的受力条件。弯曲液面内液面附近的液体压强与液面外的压强存在压强差 $\Delta p = p_B - p_A$ 形成弯曲液面下的附加压强,是由液体的表面张力产生的。将使液面上下两点 A 、 B 之间产生一个压强

突变 Δp , 如图 3 所示。这个压强差的相反数即为非饱和土力学中所定义的基质吸力 $s = -\Delta p$ 。

根据热力学原理, 液面内外的压强差为

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (5)$$

式中 R_1 和 R_2 是任意一对相互垂直的平面在液面上所截取曲线的曲率半径, 如图 4 所示。根据微分几何学, 这两条曲线的曲率之和总是不变的。这就是热力学中著名的 Laplace 公式。当确定了颗粒之间弯液面的曲率半径 r 和高度 b 后, 考虑到弯液面一个方向上的曲率中心在液面外侧, 而另一正交方向上的曲率中心在弯液面内侧, 于是 $R_1 = r$, $R_2 = -b$, 将其代入 Laplace 关系式 (5) 就可确定基质吸力。

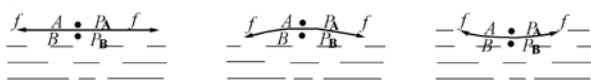


图 3 表面张力的作用

Fig. 3 Mechanical effect of surface tension

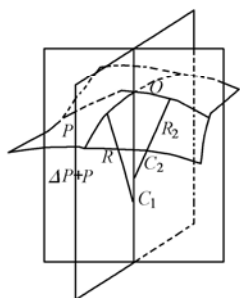


图 4 弯液面下的附加压强

Fig. 4 Additional pressure of liquid below meniscus

另外根据式 (4) 得出液面的形状以后, 可根据几何关系求出单片液体的体积 V_{11} 及其所润湿的土颗粒表面积 A_{11} 。由于液体夹在两个球体之间且外侧是圆弧旋转而成, 所以求解起来相当复杂。根据由此所确定的液体体积, 进而可确定此时的饱和度。从而可以得到基质吸力与饱和度之间的关系即土-水特征曲线。

4 等效基质吸力与饱和度之间的关系

用上述方法所得到的理论上的基质吸力与目前广泛采用的基质吸力定义是一致的, 即基质吸力是孔隙气压力与孔隙水压力之差。然而目前人们对基质吸力的认识存在一定的片面性, 缺乏对基质吸力的微观机理和本质的深入分析。

图 5 表示最松散堆积状态时大小相等球体所形成的颗粒集合体及从中所选取的典型 7 颗粒组合体, 图 6 表示相应状态下颗粒体、孔隙水与孔隙气的组成。在球坐标下, 对于中心处的球形颗粒, 考虑到各面上水的基质吸力均指向球心, 作用面积水润湿颗粒的面积, 显然此时的基质吸力仍然是一个球应力张量。但是当颗粒不是球形或孔隙水不对称时, 土粒表面受到

的基质吸力将是不平衡的。这时基质吸力将引起土颗粒变形或位移。

由图 5、6 可见, 在基质吸力随饱和度升高而减小的同时, 其作用面积却在不断增大。基质吸力虽然在较小饱和度状态下有较大值, 但是其作用面积很小, 故对土的整体综合作用效应不大; 随着饱和度的增加, 基质吸力不断减小, 但是其作用面积却不断增大, 因此综合效应仍在增加; 当饱和度增加到某一值时, 这种综合效应达到最大, 随后这种综合效应逐渐减小。为了定量表示这种关系, 认为必须同时考虑基质吸力及其作用面积, 因此这里引进等效基质吸力概念。

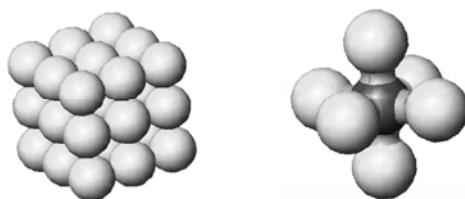


图 5 颗粒的最松散堆积方式

Fig. 5 The loosest arrangement of regular ball particles

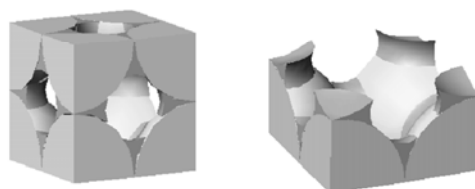


图 6 单元体内球形颗粒、孔隙水以及孔隙气之间的关系

Fig. 6 Volumetric relationship of ball particles, pore water and air in an element under consideration

等效基质吸力定义为基质吸力在整个土颗粒总表面上的平均吸力, 即

$$s_e = \frac{s A_e}{A}, \quad (6)$$

式中 s_e 为等效基质吸力; s 为基质吸力; $A_e = 6A_{11}$ 为基质吸力有效作用面积; A 为土颗粒总表面积。

上述分析表明: 传统意义上的土-水特征曲线由于只考虑了基质吸力的大小而没有考虑具有同样重要意义的作用面积, 因此在概念上似欠不足。因此需要采用等效基质吸力同时考虑基质吸力及其有效作用面积的组合效应, 这里将等效基质吸力与饱和度之间的相互关系称为广义土-水特征曲线。

5 算例分析与讨论

土颗粒的堆积方式多种多样, 这里为简化问题并不失一般性, 仍以图 5 所示的 7 颗粒结构为例说明上述土-水特征曲线的具体确定方法。假设土颗粒半径为 $R = 1 \text{ mm}$, 相应地颗粒体积与表面积分别为 4.19 mm^3 和 12.57 mm^2 ; 参见图 2, 考虑 $2a = 0 \text{ mm}$ 和 $2a = 0.2 \text{ mm}$ 等两种颗粒间隙情况, 考察如图 6 所示的单元体。对于 $2a = 0 \text{ mm}$ 情况, 整个单元体的体积为 8

mm^3 , 其中孔隙的体积为 3.81 mm^3 , 孔隙比为 0.91; 对于 $2a = 0.2 \text{ mm}$ 的情况, 整个单元体体积为 10.65 mm^3 , 其中孔隙的体积为 6.46 mm^3 , 孔隙比为 1.54。水的表面张力系数取为 $\sigma = 73 \times 10^{-3} \text{ N/m}$ 。当土颗粒与水之间的接触角 δ 分别为 0° 、 5° 和 10° 时, 对于不同的 b 值可以计算得到液面半径 r 、单片水体积 V_{11} 、总水体积 $V_{1t} = 3V_{11}$ 、单片水作用面积 A_{11} 、水总作用面积 $A_e = 6A_{11}$ 、饱和度 S_r 、基质吸力 s 、等效基质吸力 s_e 。对于本算例中的各种情况, 饱和度均较低, 颗粒周围六片孔隙水彼此孤立不连通, 而孔隙气是连通的 (当孔隙水连通时, 孔隙水体积及饱和度的计算将更为复杂)。相应的土—水特征曲线和广义土—水特征曲线分别如图 7 和图 8 所示。上述计算结果是针对半径为 1 mm 的球形颗粒情况得到的。实际上粘土和粉土的颗粒大小远远小于这个数值, 当假设颗粒半径为 $1 \mu\text{m}$ 时, 将图 7 与图 8 中的基质吸力和等效基质吸力的单位由 Pa 改为 kPa, 而具体数值和曲线形状保持不变。在半对数坐标系中相应的土—水特征曲线和广义土—水特征曲线分别示于图 9 和图 10。

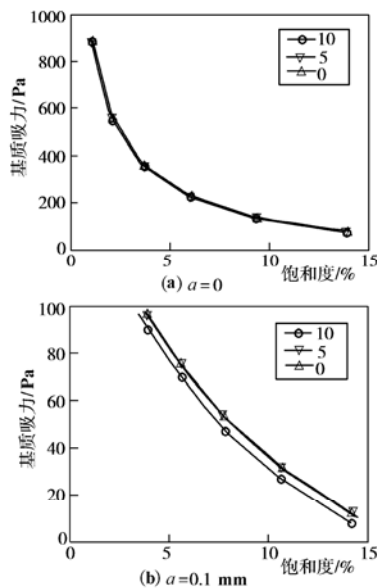


图 7 本文方法所得到的理论土—水特征曲线

Fig. 7 Theoretical soil—water characteristic curve obtained by the proposed method

从上述计算结果可以发现: ①等效基质吸力在数值上要比基质吸力小得多, 而且当饱和度较低时, 由于基质吸力作用面积较小, 因而两者的差别较大; ②两种土—水特征曲线对接触角的依赖程度不同。随着接触角的增大, 基质吸力缓慢减小, 而等效基质吸力的变化幅度较大; ③无论是基质吸力还是等效基质吸力均随颗粒间隙的增大而迅速降低, 因此表明基质吸力与等效基质吸力强烈地依赖于土体的密度和颗粒级配; ④随着饱和度的增大, 基质吸力一致减小, 而对于等效基质吸力, 当饱和度较低时, 由于基质吸力作用范围较小, 而等效基质吸力并不大。随着基质吸力

作用面积的增大, 等效基质吸力逐渐达到其最大值, 之后开始下降; ⑤与基质吸力相比, 等效基质吸力对于饱和度的依赖性并不特别显著。随着饱和度的增大, 等效基质吸力近似线性地减小; ⑥由图 9 与图 10 可见, 在半对数坐标系中, 基质吸力与饱和度之间的关系近似地可以看作线性关系。这与陈正汉等所得到的试验结果^[8,9]是一致的。

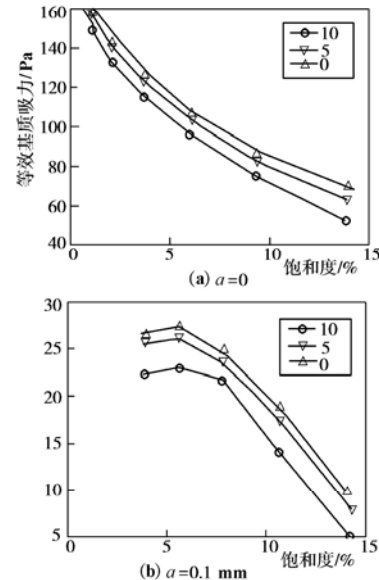


图 8 本文方法所得到的广义土—水特征曲线

Fig. 8 Generalized theoretical soil—water characteristic curve obtained by the proposed method

按照基质吸力的常规定义, 当饱和度为 0 时基质吸力最大, 此时土的抗剪强度应达到其最大值。然而事实上, 土体在其最优含水率附近时抗剪强度最大。但是若同时考虑基质吸力的大小及其作用面积的综合效应而按照等效基质吸力考虑时, 在最优含水率附近等效基质吸力达到其最大值, 此时所发挥的抗剪强度最大。另外, 饱和土的抗拉强度一般认为来源于土的粘结力, 而对于非饱和土, 抗拉强度是由粘结力和基质吸力共同提供的。对于砂土, 当不考虑粘结力时, 其抗拉强度全部来自于基质吸力。Kimz 曾经针对低含水率情况下 ($w < 4\%$) 通过实验探讨了抗拉强度与含水率之间的关系^[10]。所得到的试验结果如图 11 所示。图中 data 1 是针对去除粒径小于 0.075 mm 细小颗粒后渥太华石英砂所得到的试验结果; data 2 是针对在加入 2% 重量的细粉后渥太华石英砂所得到的试验结果。由此可见, 在低含水率情况下, 抗拉强度随含水率之间的增大而逐渐增大。由于饱和度与含水率之间的关系是线性的, 由此可以推断饱和度与抗拉强度之间也呈现为相似的关系。Kimz 根据试验结果给出了低含水率情况下抗拉强度与含水率之间的回归关系, 但未能在理论上给予合理的解释。本文基于等效基质吸力所提出的理论广义土—水特性曲线能够较合理地解释上述试验结果。

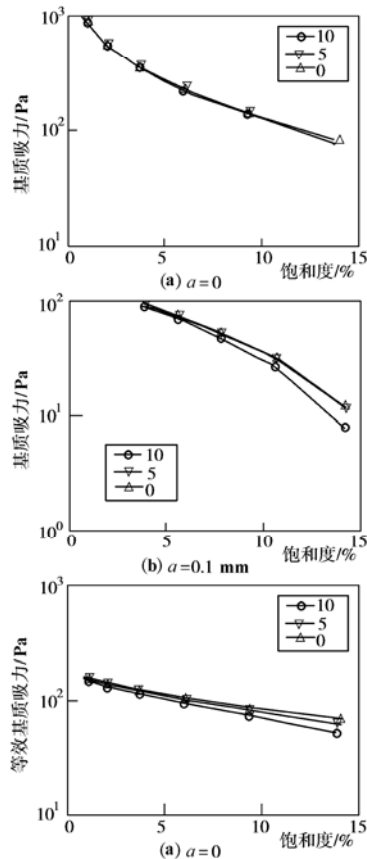


图9 本文方法所得到的理论土-水特征曲线(半对数坐标)

Fig. 9 Theoretical soil—water characteristic curve in semi-log coordinates obtained by the proposed method

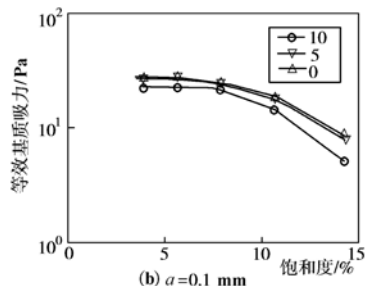


图10 本文方法的广义土-水特征曲线(半对数坐标)

Fig. 10 Theoretical general soil—water characteristic curve in semi-log coordinates obtained by the proposed method

6 结 论

基于热力学理论和几何分析建立了等直径球形颗粒之间的弯液面方程,并通过迭代求解从理论上确定了基质吸力;以此提出了等效基质吸力和广义土-水特征曲线;针对球形颗粒最松散堆积方式的计算表明,采用基于等效基质吸力的广义土-水特性曲线能够同时考虑基质吸力及其有效作用面积的综合效应,更能合理地反映非饱和土的强度特性。由于实际中非饱和土的复杂性,针对等直径颗粒体所得到的上述理论关系不能完全反映实际情况,而且目前关于等效基质吸力和广义土-水特征曲线的测量也还较困难。但是本文的工作为探讨非饱和土的应力状态变量和强度特性

提供了新的思路。如何将这种针对理想情况所建立的理论关系推广于实际非饱和土情况,尚需开展更深入的研究。

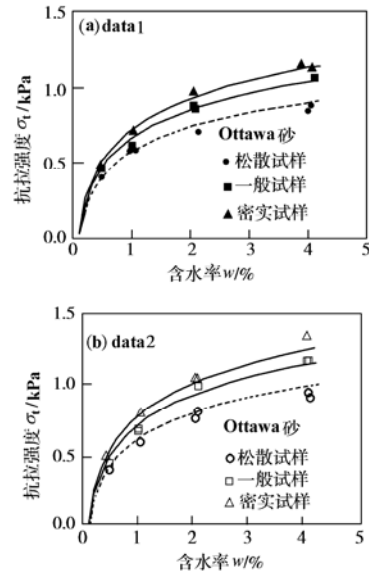


图11 低饱和度时含水率与抗拉强度的关系

Fig.11 Relationship between tensile strength and water content of soil for low saturation obtained from experimental tests

参考文献:

- [1] Fredlund D G. 非饱和土的力学性能与工程应用[J]. 岩土工程学报, 1991, 13(5):24 - 35.
- [2] 陈正汉. 非饱和土的应力状态与应力状态变量[A]. 第七届全国土力学及基础工程学术会议论文集[C], 北京: 中国建筑工业出版社, 1994.186 - 191.
- [3] Fredlund D G. 非饱和土土力学[M]. 陈仲颐, 等译. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997.
- [4] Fredlund D G, Xing A. Equations for the soil—water characteristic curve[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1994, 31:521 - 532.
- [5] Fredlund M D, Wilson G W, Fredlund D G. Prediction of the soil—water characteristic curve from the grain-size distribution curve[A]. Proceeding of the 3rd Symposium on Unsaturated Soil[C]. Brazil, 1997. 13 - 23.
- [6] Clapp R B, Hornberger G M. Empirical equations for some soil hydraulic properties[J]. Water Resources Research, 1978, 14(4):601 - 604.
- [7] 范宏昌.热学[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [8] 陈正汉. 非饱和土的水气运动规律及其工程性质的试验研究[J]. 岩土工程学报, 1993, 15(3): 9 - 20.
- [9] 陈正汉,卢再华,朱元青.非饱和土的理论与实践[J].力学与实践, 2001, 23(5): 8 - 15.
- [10] Kim Tae-Hyung, Hwang Changsoo. Modeling of tensile strength on moist granular earth material at low water content[J]. Engineering Geology, 2003, 69:233 - 244.