

基于强度折减的拉格朗日差分方法分析土坡稳定性

Slope stability analysis by Lagrangian difference method based on shear strength reduction

迟世春, 关立军

(大连理工大学 海岸与近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 运用连续介质显式拉格朗日有限差分方法, 通过逐步折减土体的抗剪强度, 来分析土坡稳定的安全系数。实例计算表明, 强度折减系数达到某一数值时, 土坡顶点的水平位移会快速增加。根据这一现象, 提出了界定土坡破坏的坡顶位移增量标准。即坡顶位移增量与折减系数增量之比大于系数 s_c 为土坡破坏, 并建议了 s_c 的取值。这样可避免强度采用折减方法分析土坡稳定时, 以不收敛等“模糊”概念作为土坡破坏状态的判别标准, 具有物理意义明确、客观具体、便于数值计算等特点。与瑞典圆弧法、简化 Bishop 法及 Spencer 法比较可见, 这些方法的潜在滑动面形状相似、位置十分接近, 说明本文方法及“破坏”状态的判别标准是合适的。文中对剪胀角的影响进行了讨论, 得到“不考虑”剪胀性的关联流动法则会高估土坡稳定安全系数的结论。

关键词: 土坡稳定分析; 拉格朗日差分法; 强度折减; 剪胀角

中图分类号: TU 432

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2004)01-0042-05

作者简介: 迟世春(1964-), 男, 博士, 教授, 从事土工结构数值分析、土的动力弹塑性本构关系研究。

CHI Shi-chun, GUAN Li-jun

(State Key Lab of the Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: In this paper, the stability analysis of the slope has been studied by the explicit Lagrangian difference method for the continuum body using shear strength discount. In some case study, it is shown that the horizontal displacement of the slope top will be increasing rapidly when the reduction factor reaches a certain value. According to this phenomenon, a criterion has been proposed, which is used to distinguish the collapse of slope. If this criterion, which is the ratio of the horizontal displacement increment of the slope top and the increment of reduction factor, is larger than some suggested value s_c , then the slope is in failure state. Therefore the non convergence or other indistinctness will not be used as criterion to identify slope failure state when slope stability analysis is done using the shear strength discount method. This criterion has the clear physical meaning and is objective and explicit, and easily to be implemented in analysis. Compared with the limit equilibrium methods, such as Swedish slip circle method, simplified Bishop method and Spencer method, it is shown that the sliding surface of this method is coincident with those of other method basically. It is explained that the method and the criterion of the “failure” state proposed in this paper is appropriate. The influence of dilatative angle on stability factor is also discussed, and the conclusion has been got that the stability factor of the slope would be overestimated if the associated plastic flow rule is adopted.

Key words: slope stability analysis; Lagrangian difference method; shear strength discount; dilatative angle

0 引言^①

目前在岩土力学中常用的计算方法有有限单元法、有限差分法、边界元法等, 随着计算机技术的发展, 这些方法的应用越来越广泛。连续介质快速拉格朗日法(Fast Lagrangian Analysis of Continue)是基于显式差分方法来求解系统的运动方程, 可以对连续介质进行大变形分析, 相对局限于小变形假定的其他方法更适合岩土工程的破坏问题研究。另外快速拉格朗日法在求解过程中采用了动态松弛技术, 不需求解大型联立方程组, 节省了大量的计算时间^[1]。

通常的强度折减方法分析土坡稳定, 是以土体弹塑性有限元分析为基础的。通过逐步折减土体的抗剪强度, 改变土体的屈服准则, 计算边坡的应力应变, 考

察土坡的位移发展情况, 判断土坡是否处于稳定状态。并以破坏前土坡达到临界状态的折减系数为安全系数, 其安全系数具有“强度储备”的意义。但判断土坡是否破坏带有一定“主观性”, 不属于客观标准。如通常采用解的不收敛状态作为破坏标准, 是指在用户指定的收敛准则下其算法不能收敛, 表示应力分布不能满足土体的破坏准则和总体平衡要求, 这就意味着出现破坏。但不同的收敛准则以及不同的迭代方法会有不同的破坏状态准则。有的研究者把破坏标准定义为土体内某一幅值的广义剪应变自坡底部下方向坡顶上方贯通, 这时土坡处于破坏状态^[2], 或者以迭代次数作为收敛准则^[3]。显然这些土坡破坏状态的界定是模糊的, 难以客观把握, 并会出现混乱。其一是不同的计算

① 收稿日期: 2003-02-06

者对同一问题的计算结果不同,设计使用者莫衷一是;其二是无法确定强度折减方法的安全系数控制标准,从而使这一方法无法实用化。因此,研究土坡稳定分析强度折减法“土坡破坏”的客观标准十分必要。本文采用的连续介质快速拉格朗日法,研究了理想弹塑性的莫尔-库仑摩擦材料的土坡稳定性,分析认为可以定义土坡顶点的水平位移快速增长前的强度折减系数为安全系数。提出了界定土坡破坏的坡顶位移增量标准,即坡顶位移增量与折减系数增量之比大于系数 s_c 。为土坡破坏,并建议了 s_c 的取值。

强度折减法相对于极限平衡法有许多优点,如不需要假定滑动面位置、形状,避免了极限平衡法中各种人为假定的缺点等。因此,随着方法细节的逐步完善强度折减法将会得到更加广泛的应用。

1 显式拉格朗日有限差分法

连续介质快速拉格朗日法是基于显式差分法来求解偏微分方程,将计算区域划分为差分网格后,对某一节点施加荷载,该节点的运动方程可以写成时间步长 Δt 的有限差分形式,在某一个微小的时段内,作用在该节点的荷载只对周围的若干节点有影响,根据单元节点的速度变化和时段 Δt 可以求出单元之间的相对位移,进而可以求出单元应变;再由单元材料的本构方程求单元应力,随着时段的增长,这一过程将扩展到整个计算范围,直到边界;计算得到单元之间的不平衡力,将此不平衡力重新加到各节点上,再进行下一步的迭代运算,直到不平衡力足够小或者各节点的位移趋于平衡为止^[4]。

求解过程中若某一时刻各个节点的速度已知,则根据高斯定理可求得单元的应变率,然后根据材料的本构方程就可求得单元的新的应力。

用增量形式,根据几何方程应变张量可表示为

$$\Delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} [\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}] \Delta t, \quad (1)$$

式中 $\Delta \epsilon_{ij}$ 为应变增量, $\dot{u}_i$ 为速度分量, Δt 为时步。

由式(1)看出,要得到 Δt 时刻内的应变增量平均值 $\langle \Delta \epsilon_{ij} \rangle$,先要知道速度微分在单元上的平均值,即

$$\langle \dot{u}_{i,j} \rangle = A^{-1} \int_A \dot{u}_{i,j} dA, \quad (2)$$

式中 A 为单元的面积。

对式(2)应用高斯定理,对于具有 N 条边的多边形单元如图1(a)所示,积分可写成对各边求和的形式,即

$$\langle \dot{u}_{i,j} \rangle = A^{-1} \int_S \dot{u}_{i,j} n_j dS = A^{-1} \sum_N \langle \dot{u}_i \rangle n_j \Delta S_i, \quad (3)$$

式中 ΔS_i 是多边形第 i 条边的边长, n_j 为边的外法线方向余弦。

根据材料的本构关系, $\Delta \sigma_{ij} = f(\Delta \epsilon_{ij}, \sigma_{ij}, \dots)$,可以得到单元在时步内的平均应力增量。

以上求解过程需要已知节点速度,为求得节点速度需要运用连续介质的运动微分方程^[5],即

$$\rho \ddot{u}_i + \rho g_i - \rho \dot{u}_i = 0, \quad (4)$$

式中, ρ 为介质的密度, g_i 为重力加速度分量。

将式(4)沿图1(b)所示的积分路径进行积分得

$$\rho \dot{u}_i = V^{-1} \sum \langle \sigma_{ij} \rangle n_j \Delta S_i + \rho g_i, \quad (5)$$

式中 $\langle \sigma_{ij} \rangle$ 表示应力在积分路径上的平均值,式中右边第一项 $\sum \langle \sigma_{ij} \rangle n_j \Delta S_i$ 为某节点周围单元作用在该节点上的集中力 F , V 是积分路径所围成多边形的面积。对式(5)变形可得

$$\ddot{u}_i = m^{-1} F + g_i, \quad (6)$$

式中 m 为积分路径所围成多边形面积的质量。

利用中心差分,得到节点加速度和速度关系为

$$\dot{u}_i(t + \frac{\Delta t}{2}) = \dot{u}_i(t - \frac{\Delta t}{2}) + m^{-1} F_i(t) \Delta t + g_i \Delta t. \quad (7)$$

按照以上思路,通过迭代求解,可求出各个时步各单元(或节点)的应力、变形值,进而可以模拟出边坡变形破坏的全过程,求解过程如图1(c)所示。

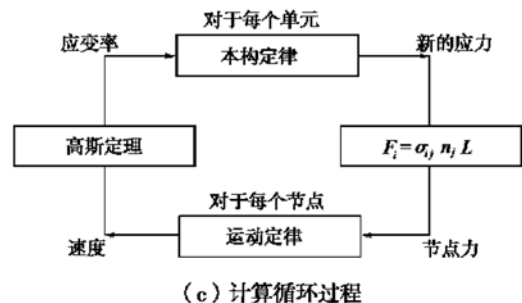
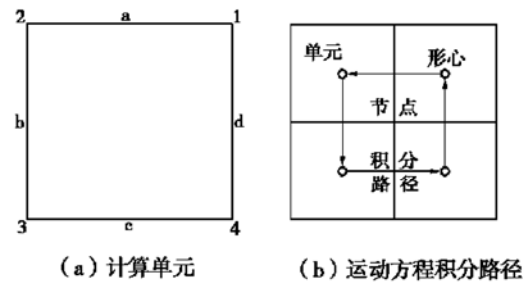


图1 拉格朗日差分原理

Fig. 1 The principle of Lagrangian difference method

2 土的理想弹塑性模型

2.1 屈服函数与塑性势函数

土的莫尔-库仑强度准则是目前岩土工程中应用

最为广泛的破坏准则,其表达式为

$$f = \frac{1}{3}I_1 \sin \varphi - c \cos \varphi + \sqrt{J_2} \left(\cos \theta_0 + \frac{\sin \theta_0 \sin \varphi}{\sqrt{3}} \right) = 0, \quad (8)$$

式中 I_1, J_2 为应力张量第一不变量和应力偏量第二不变量, θ_0 为应力罗德角, c, φ 为黏聚力和内摩擦角。

采用非关联的流动法则,其塑性势函数与屈服函数具有相似的形式,即

$$g = \frac{1}{3}I_1 \sin \Psi - c \cos \Psi + \sqrt{J_2} \left(\cos \theta_0 + \frac{\sin \theta_0 \sin \Psi}{\sqrt{3}} \right) = 0, \quad (9)$$

式中 Ψ 为土体的剪胀角,当 $\Psi = \varphi$ 时为相关联的流动法则, $\Psi \neq \varphi$ 时为非关联的流动法则。

2.2 弹塑性刚度张量

土的应变可分解为弹性应变和塑性应变,其理想弹塑性应力应变关系为

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p = \frac{dI_1}{9K} \delta_{ij} + \frac{ds_{ij}}{2G} + d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (10)$$

式中 $d\lambda$ 为待定比例系数, K, G 为体积及剪切模量, ds_{ij} 为应力偏量增量, $d\lambda$ 的取值:

$$d\lambda = 0 \quad f < 0 \text{ 或 } f = 0 \text{ 且 } df < 0; \quad (11a)$$

$$d\lambda > 0 \quad f < 0 \text{ 且 } df = 0. \quad (11b)$$

运用连续性条件, $d\lambda$ 的表达式为

$$d\lambda = \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} d\varepsilon_{kl}, \quad (12)$$

其中 D_{ijkl} 为弹性刚度张量,

$$D_{ijkl} = (K - \frac{2}{3}G) \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (13)$$

$$H = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (14)$$

记

$$\left. \begin{aligned} H_{ii}^* &= D_{iimn} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}}, \\ H_{kl} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} D_{pqkl}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

则土的理想弹塑性应力应变关系为

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}, \quad (16)$$

$$\text{其中} \quad D_{ijkl}^e = D_{ijkl} - \frac{1}{H} H_{ij}^* H_{kl}. \quad (17)$$

2.3 抗剪强度的折减

土工建筑物的稳定安全系数除了经典的定义外,还可定义为结构所具有的承载力与所承受荷载之比。但对于像土坡这类主要承受自重作用的土工建筑物,由于土体是摩擦型材料,增大土体自重不一定会达到

土体的极限状态^[6]。为达到土体的极限状态,可通过逐步折减土的抗剪强度。大多数土坡和部分人工边坡的滑坡都属于渐进破坏,滑坡的主要原因是由于土坡在风化、吸水饱和、应变软化等因素的作用下土体的抗剪强度会逐渐降低^[7]。因此通过抗剪强度的折减可以使土坡达到破坏的临界状态,这时的折减系数定义为土坡稳定的安全系数。对土的抗剪强度进行折减的程度,即土的实际抗剪强度与临界破坏时折减后的抗剪强度的比值,具有强度储备系数的物理意义。

为了和传统方法形式上取得一致,以及在折减计算过程中保持流动法则的协调,把抗剪强度参数和剪胀角按如下形式进行折减:

$$c' = \frac{c}{F_s}, \quad \varphi' = \tan^{-1} \frac{\tan \varphi}{F_s}, \quad \Psi' = \tan^{-1} \frac{\tan \Psi}{F_s}. \quad (18)$$

3 算 例

一平面应变的均质土坡,土坡的坡高 20 m, 坡比 1:1, 有限差分网格如图 2 所示。

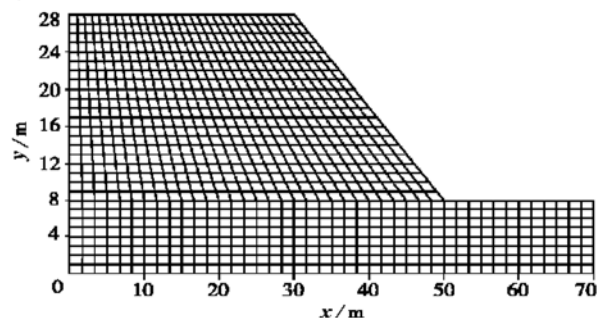


图 2 土坡几何尺寸及网格图

Fig. 2 The geometrical size and mesh of the slope

基底采用刚性边界,两侧为水平滑动支承,只允许竖向沉降,上部边界为自由边界。土体采用莫尔-库仑理想弹塑性模型。材料参数:容重 $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, 黏聚力 $c = 40 \text{ kPa}$, 内摩擦角 $\varphi = 20^\circ$, 剪胀角 $\Psi = 20^\circ$, 弹性模量 $E = 20 \text{ MPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$ 。强度折减计算过程以折减系数 $F_s = 1.0$ 开始,然后以 $\Delta F_s = 0.01$ 递增。

4 破坏状态准则

为了确定描述土坡破坏状态的客观标准,本文绘出了抗剪强度的折减系数同土坡顶点水平位移的关系曲线。发现当土的抗剪强度折减到一定程度后,土体位移会持续增大,折减系数与坡顶水平位移关系曲线趋于平缓,如图 6 所示。根据这一现象,可以将土坡的“破坏程度”定义为强度折减系数与坡顶水平位移关系曲线斜率的函数,斜率愈小说明土坡愈接近破坏。直到该斜率达到某一固定值时,即认为土坡达到“破坏”

状态,即

$$(\Delta U / \Delta F_s) \geq s_c, \quad (19)$$

式中 ΔU 为土坡顶点水平位移增量, ΔF_s 为折减系数增量, s_c 为“破坏”状态的斜率控制值。

值得说明的是这里的“破坏”状态显然不是土坡稳定的极限状态,而是土坡达到失稳的极限平衡状态前的某一状态,因此属于相对的“破坏”状态。即认为一旦强度折减系数与坡顶水平位移关系曲线的斜率等于或大于 s_c ,则如果继续折减土体的抗剪强度,土坡将产生正常使用所不能允许的位移增长,故认为土坡已不能正常使用,属于“破坏”状态。也就是在允许位移增长下,土体的强度折减系数不再有值得注意的增长,即强度的安全储备已近极限。

定义了“破坏”状态准则,如何确定“破坏”状态的斜率控制值 s_c 是问题的关键。文中绘出了“破坏”状态的土坡坡顶水平位移和强度折减系数与斜率控制值 s_c 的关系曲线。见图3。由图可见,两条曲线均出现了阶梯上升的现象。平台的出现意味着在土坡渐进破坏的过程中,存在着坡顶水平位移和强度折减系数对“破坏”状态的斜率控制值 s_c 变化不敏感的区间。初步分析认为每一水平台阶对应着土坡的某个特定状态,该状态与土体的塑性发展有关。绘出每个水平平台处土坡的位移场,见图4。显然第一平台和第二平台时土坡位移均不足以形成土坡失稳,因此不能作为土坡“破坏”状态,其“破坏”状态的斜率控制值也不应该取这两个平台值。但随着斜率控制值 s_c 提高,坡顶位移和折减系数随 s_c 的曲线在越过前两个平台后,会出现一个很长的水平段。即当 $s_c \geq 0.7$ 时,坡顶的水平位移及强度折减系数几乎不再增加。因此可以认为 s_c 大于等于 0.7 是土坡稳定分析的“破坏”状态控制值,对应的强度折减系数为 1.25。绘制此时的土坡位移场,见图5。由图可见,此时的土坡位移已经有了相当发展,由位移向量图可以明显分辨出将要滑动的区域,确定滑动区域和不滑动区域的交界位置,即确定了潜在滑动面的形状、位置。为校核计算结果,同极限平衡法相比较,计算得到瑞典圆弧法的安全系数 $F_s = 1.226$,简化 Bishop 法 $F_s = 1.266$, Spencer 法的安全系数 $F_s = 1.265$,潜在滑动面位置也在图5中示出。可见 $s_c = 0.7$ 时的滑动面与极限平衡法的滑动面形状相似、位置接近。另外,从图6所示的坡顶水平位移同折减系数的关系曲线也可以看出,当折减系数达到 1.25 时曲线已经趋于水平。因此本文定义强度折减方法的“破坏”状态标准是合适的,且物理意义明确,克服了其他一些破坏标准缺乏客观数值标准的缺点。

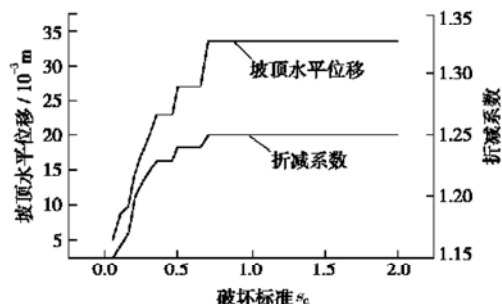


图3 坡顶水平位移及折减系数与 s_c 的关系曲线

Fig. 3 The variation of the horizontal displacement of the slope top and deduct factor with s_c .

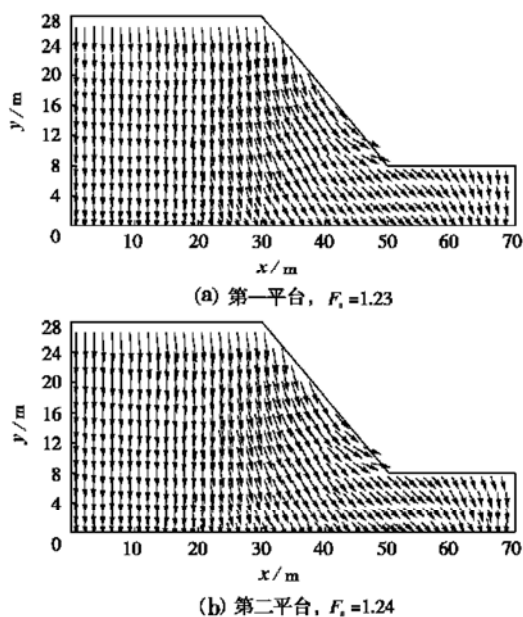


图4 坡顶位移平台段对应的土坡位移场

Fig. 4 The displacement field of the soil slope corresponding flat segment on the displacement curve of the slope top

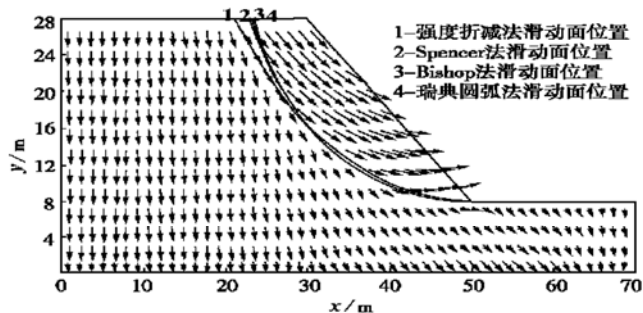


图5 极限状态时位移向量场

Fig. 5 The displacement vector field in the limit equilibrium state

5 剪胀角对计算结果的影响

对于密实砂性土和重度超固结黏土,在剪切过程中会表现出剪胀性。反映到应力应变曲线上,则出现明显的峰值特征。即在剪切的过程中应力应变曲线先以正斜率上升,达到峰值后发生软化,应变增加而应力

减小,最后应力趋于残余强度。土的剪胀性开始于峰值强度前,终止于残余强度。由于剪胀性反映了土体剪切屈服过程中的体积变松引起的抗剪强度降低现象,因此剪胀性对土坡稳定计算有重要影响。基于弹塑性理论的土坡稳定分析方法中,“不考虑”剪胀性实际上意味着采用相关联的流动法则,即土体的剪胀角等于内摩擦角,则会高估了土的剪胀性^[8]。分析土工建筑物的极限荷载,其流动法则采用相关联与不相关联的比较工作已有很多,主要结论是相关联的流动法则高估了土的承载能力。这就意味着高估剪胀性等于高估了承载能力。因此土体剪胀角对基于强度折减的有限差分方法分析土坡稳定性的影响如何值得深入研究。

为确定剪胀角对稳定安全系数影响,在 $0 \leq \psi \leq \varphi$ 范围内取剪胀角为 $0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ 分别进行抗剪强度折减的土坡稳定性分析,得到相应的安全系数为 1.21, 1.22, 1.23, 1.24。不同剪胀角下坡顶水平位移同折减系数的关系如图 6 所示。可见土坡安全系数随剪胀角的增大而增大,采用非关联流动法则的结果比采用关联流动法则的要小。因此剪胀角对土坡稳定的安全系数有一定的影响。

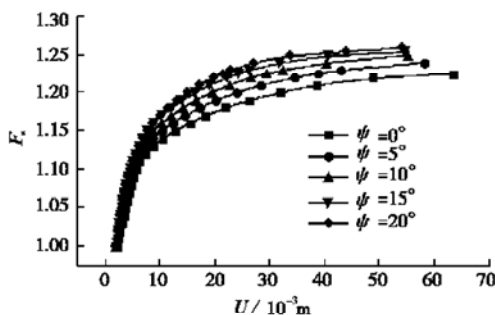


图 6 不同剪胀角下坡顶水平位移同折减系数关系

Fig. 6 The relation between horizontal displacement of the slope top and the reduction factor

6 结 论

基于强度折减理论的显式拉格朗日有限差分法分析土坡稳定性具有计算简单方便、结果可靠的优点,同

时避免了极限平衡法需要事先假设滑动面以及人为假定等不足。本文通过实例分析,得到该算法其强度折减系数大于某一数值后,土坡顶点的水平位移会快速增长。并根据这一特点,提出了界定土坡破坏的坡顶位移增量标准,即坡顶位移增量与折减系数增量之比大于系数 s_0 为土坡破坏,并建议了 s_0 的取值。这种方法可以避免强度折减方法分析土坡稳定性时,以不收敛或迭代次数等作为土坡破坏状态的“模糊”判别标准。与瑞典圆弧法、简化的 Bishop 法及 Spencer 法比较可见,这些方法的潜在滑动面形状相似位置十分接近。说明本文提出的“破坏”状态判别标准是合适的。这一土坡破坏标准便于数值计算,物理意义明确,避免了土坡破坏标准定义缺乏客观数值标准的缺点。

剪胀性对土坡稳定分析有一定影响。因为安全系数随着剪胀角增大而增大,故采用“不考虑”剪胀性的关联流动法则意味着剪胀角等于内摩擦角,会高估稳定安全系数。因此不考虑剪胀性的极限平衡法和采用关联流动法则的弹塑性分析方法都是不尽合理的。

参考文献:

- [1] 黄润秋, 许强. 显式拉格朗日差分分析在岩石边坡工程中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 1995, 14(4): 346-353.
- [2] 连锁营, 韩国城, 孔宪京. 强度折减法研究开挖边坡的稳定性[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(4): 407-411.
- [3] Ugai K. A method of calculation of total factor of safety of slopes by elastoplastic FEM[J]. Soils and Foundations, 1992, 3(1): 59-70.
- [4] 王泳嘉, 邢纪波. 离散单元法同拉格朗日元法及其在岩土力学中的应用[J]. 岩土力学, 1995, 16(2): 1-14.
- [5] 龚晓南. 土塑性力学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1997.
- [6] 宋二祥. 土工结构安全系数的有限元计算[J]. 岩土工程学报, 1991, 19(2): 1-7.
- [7] 陈守义. 试论土的应力应变模式与滑坡发育过程的关系[J]. 岩土力学, 1996, 17(3): 21-26.
- [8] Manzari M T, Nour M A. Significance of soil dilatancy in slope stability analysis[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2000, 126(1): 75-80.