

短文

成层场地振动特性及地震反应 简化解析解的完整形式

A complete form of simplified analytical solution of natural vibration characteristics and seismic response of horizontally-layered soil sites

栾茂田^{1,2}, 刘占阁²

(1. 大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024; 2. 大连理工大学 岩土工程研究所, 辽宁 大连 116024)

中图分类号: TU 435

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2003)06-0747-03

作者简介: 栾茂田(1962-), 男, 山东招远人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土力学基本理论与数值分析、非线性土动力学理论与计算、海洋土力学理论与实验技术等方面的教学与科学研究工作。

0 引言^{*}

场地的振动特性与地震响应分析是工程场地地震危险性评价及地震的场地效应评价和地震小区划研究中的基本问题, 由于天然场地的成层性, 考虑土层的成层非均质性, 发展复杂条件下土层振动特性与地震响应简化分析方法是十分必要和具有实际意义的。基于黏弹性理论的一维剪切条模型(在早期称之为剪切梁模型)能够简便地估算场地的自振特性与基岩地震动作用下的地震响应, 从而在工程实际中得到了广泛应用^[1~4]。高玉峰等在《岩土工程学报》发表了短文“成层地基一维土层地震反应解析解”^[5], 针对成层地基, 基于一维剪切条模型在时域上给出了地震动力响应的解析解答, 王春玲和黄义近期在《岩土工程学报》对高玉峰等的论文进行了讨论^[6], 对文中关于定解方程的解法与解答本身的合理性提出了不同的看法, 同期刊出了高玉峰的答复^[7], 无论高玉峰等的原文还是王春玲与黄义的讨论及高玉峰的答复对于弄清成层地基振动特性与地震反应的简化解析解答的正确形式是非常有益的。笔者曾于1992年对成层地基振动特性及地震反应进行了较为深入而系统的探讨, 在《大连理工大学学报》发表了“非均质地基振动特性及地震反应分析”^[4], 基于 Idriss 和 Seed 提出的一维剪切梁模型, 直接运用分离变量方法对基岩上的水平成层非均质地基给出了自振特性和地震动力响应的解析解答。文中不仅考虑地基的成层性, 而且对于各层土的剪切模量采用沿深度的幂函数分布以考虑剪切模量对于约束压力的非线性依赖性。实际上将拙作中成层非均质地基退化为层状地基即可得到高玉峰等同志所指的边值问题的解析解。笔者认为这个解答是以一维剪切条模型为基础的场地地震动力响应简化分析的解析解答的完整

而正确的形式。对于成层场地, 根据基于剪切条简化模型所建立的定解问题, 笔者已经表明: 利用数理方程中的分离变量方法能够求解从而成功地获得封闭形式解答, 既然这种解答能够求得, 则这种方法就是基于简化模型的精确解, 对此就没有必要再采用其他的简化处理方法或采用其他的途径求解。只有当分离变量方法无法实现时其他方法才值得推荐。因此笔者认为有必要将这个问题给予澄清, 这是引发笔者们著写此短文的主要目的。

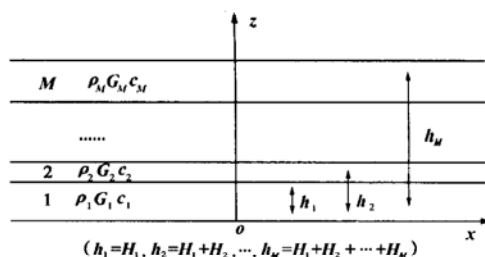


图1 层状场地地震反应分析的一维剪切条计算模型

Fig. 1 Shear-slice computational model for seismic response of horizontally layered soil sites under earthquake

1 成层场地的定解方程及其数学求解

对于图1所示的水平成层场地, M 层土层的厚度分别为 $H_1, H_2, \dots, H_M$; 土的质量密度分别为 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_M$; 阻尼系数分别为 $c_1, c_2, \dots, c_M$; 动剪切模量分别为 $G_1, G_2, \dots, G_M$ 。水平剪切地震波自基岩处向上垂直传播, 基岩处地面运动加速度为 $\ddot{u}_g(t)$ 。为统一起见, 图中坐标体系与高玉峰等同志所采用的坐标系相同。根据一维剪切条模型, 假定深度为 z 、厚度为 dz 的水

* 基金项目: 国家自然科学基金资助基金资助项目(50179006), 教育部跨世纪优秀人才培养计划研究基金资助项目

收稿日期: 2003-07-08

平微分土条在基岩地震动作用下仅仅产生水平位移,考虑该土条的动力平衡条件,得到在不计阻尼的情况下体系的振动控制方程为

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = G_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2}, j = 1, 2, \dots, M \quad (1)$$

采用分离变量法,假设在稳态时其通解为 $u_j(z, t) = U_j(z) e^{i\omega t}$, 将其代入方程(1), 经求解得到各层的模态函数为

$$U_j(z) = A_j \sin \frac{\omega(z - h_{j-1})}{V_{sj}} + B_j \cos \frac{\omega(z - h_{j-1})}{V_{sj}}, \quad (2)$$

式中 $V_{sj} = \sqrt{G_j/\rho}$ 为第 j 层土层的剪切波速, A_j 与 B_j 为待定系数。

由层间位移和剪应力的连续条件, 可得各层待定系数之间的相互传递关系

$$\begin{bmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}^{j+1,j} & t_{12}^{j+1,j} \\ t_{21}^{j+1,j} & t_{22}^{j+1,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} = T^{(j+1,j)} \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix}, \quad (3)$$

式中 $T^{(j+1,j)}$ 称为第 $j+1$ 层与第 j 层待定系数之间的传递矩阵, 且

$$T^{(j+1,j)} = \begin{bmatrix} t_{11}^{j+1,j} & t_{12}^{j+1,j} \\ t_{21}^{j+1,j} & t_{22}^{j+1,j} \end{bmatrix},$$

式中 $t_{11}^{j+1,j} = \frac{V_{sj+1}}{V_{sj}} \cos \frac{\omega H_j}{V_{sj}}, t_{12}^{j+1,j} = -\frac{V_{sj+1}}{V_{sj}} \sin \frac{\omega H_j}{V_{sj}},$

$$t_{21}^{j+1,j} = \sin \frac{\omega H_j}{V_{sj}}, t_{22}^{j+1,j} = \cos \frac{\omega H_j}{V_{sj}}.$$

经过逐层传递可以推求得到表层与底层间待定系数之间的关系为

$$\begin{bmatrix} A_M \\ B_M \end{bmatrix} = T^{(M,1)} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

式中 $T^{(M,1)}$ 称为表层与底层待定系数之间的传递矩阵, 且

$$T^{(M,1)} = \begin{bmatrix} t_{11}^{M,1} & t_{12}^{M,1} \\ t_{21}^{M,1} & t_{22}^{M,1} \end{bmatrix} = T^{(M,M-1)} T^{(M-1,M-2)} \dots T^{(2,1)}.$$

由底层零位移条件和表面处零剪应力边界条件, 可知

$$\begin{bmatrix} B_1 = 0, \\ A_M \cos \frac{\omega H_M}{V_{sM}} = B_M \sin \frac{\omega H_M}{V_{sM}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

将式(5)代入式(4), 整理得

$$A_M = t_{11}^{M,1} A_1, \quad (6)$$

及系统的特征方程

$$f(\omega) = t_{11}^{M,1} - \tan \frac{\omega H_M}{V_{sM}} t_{21}^{M,1}. \quad (7)$$

特征方程(7)是关于自振频率 ω 的非线性超越方程, 依赖于各层土的物理力学参数, 解此非线性方程求其

特征根即为场地的各阶自振频率 ω_n 。进而由式(2)可以确定各层的各阶模态函数。

2 岩基处地震动下土层地震响应分析

在岩基处地震运动 $\ddot{u}_g = \ddot{u}_g(t)$ 的作用下覆盖土层的运动方程为

$$V_{sj}^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} = \ddot{u}_j + \ddot{u}_g. \quad (8)$$

利用振型叠加法, 可求得动力位移响应函数 $u(z, t)$ 的级数表达式

$$u_j(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n U_{jn}(z) D_n(t), \quad (9)$$

式中 P_n 称为第 n 阶模态的参与系数, 根据结构动力学定义, 可得

$$P_n = \frac{\sum_{j=1}^M \int_{h_{j-1}}^{h_j} \rho U_{jn}(z) dz}{\sum_{j=1}^M \int_{h_{j-1}}^{h_j} \rho U_{jn}^2(z) dz}. \quad (10)$$

将式(2)中模态函数代入式(10), 经简化可以证明

$$P_n = \frac{\sum_{j=1}^M p_{1jn}}{\sum_{j=1}^M p_{2jn}}, \quad (11)$$

其中 $p_{1jn} = \frac{V_{sj}\rho}{\omega_n} \left| A_j \right| \cos \frac{\omega_n H_j}{V_{sj}} - 1 + B_j \sin \frac{\omega_n H_j}{V_{sj}},$

$$p_{2jn} = \frac{H_j \rho (A_j^2 + B_j^2)}{2} - \frac{\rho A_j B_j V_{sj}}{2 \omega_n} \left| \cos \frac{2 \omega_n H_j}{V_{sj}} - 1 \right| - \frac{V_{sj} \rho (A_j^2 - B_j^2) \sin 2 \omega_n H_j}{4 \omega_n}.$$

在有阻尼振动时, $D_n(t)$ 是具有频率为 ω_n 、阻尼比为 β_n 的单自由度线性振子的时域地震响应函数, 以 Duhamal 积分形式表达为

$$D_n(t) = -\frac{1}{\omega_n^*} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\beta_n \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_n^* (t-\tau) d\tau, \quad (12)$$

式中 $\omega_n^* = \sqrt{1-\beta_n^2} \omega_n$ 为有阻尼时的振动频率。由式(9)中位移函数关于时间的二次导数可以确定土层的相对运动加速度响应函数为

$$\ddot{u}_j(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n U_{jn}(z) D_{an}(t), \quad (13)$$

其中

$$D_{an}(t) = \frac{1-2\beta_n^2}{\sqrt{1-\beta_n^2}} \omega_n \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\beta_n \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_n^* (t-\tau) \cdot d\tau + 2\beta_n \omega_n \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\beta_n \omega_n (t-\tau)} \cos \omega_n^* (t-\tau) d\tau. \quad (14)$$

土层中任一点深度处的绝对加速度为

$$\begin{aligned}\ddot{u}_{sj}(z, t) &= \ddot{u}_j(z, t) + \ddot{u}_g(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n U_{jn}(z) D_{an}(t) + \ddot{u}_g(t) \left| 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P_n U_{jn}(z) \right|.\end{aligned}\quad (15)$$

相应地土层中任一深度处的剪应变为

$$\begin{aligned}\gamma_j(z, t) &= \frac{\partial u_j(z, t)}{\partial z} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n U'_{jn}(z) D_n(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n P_n D_n(t)}{V_{sj}} \left| \cos \frac{\omega(z - h_{j-1})}{V_{sj}} - \sin \frac{\omega(z - h_{j-1})}{V_{sj}} \right|.\end{aligned}\quad (16)$$

而土层中任一深度处的剪应力为

$$\begin{aligned}\tau_j(z, t) &= G_j \frac{\partial u_j(z, t)}{\partial z} = \sum_{n=1}^{\infty} G_j P_n U'_{jn}(z) D_n(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n G_j P_n D_n(t)}{V_{sj}} \left| \cos \frac{\omega(z - h_{j-1})}{V_{sj}} - \sin \frac{\omega(z - h_{j-1})}{V_{sj}} \right|.\end{aligned}\quad (17)$$

进一步地, 将上述方法与等价线性化法相结合可以考虑场地土的动力非线性性质^[8]。

特别地, 对于单层场地, 若厚度为 H , 剪切波速为 V_s , 则确定自振频率的特征方程为 $\cos \frac{\omega H}{V_s} = 0$, 由此可以直接求得自振频率为

$$\omega_n = \frac{V_s(2n-1)\pi}{2H}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (18)$$

或自振周期为

$$T_n = \frac{4H}{(2n-1)V_s}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (19)$$

相应地, 模态函数为

$$U(z) = \sin \frac{\omega z}{V_s}. \quad (20)$$

位移动力响应函数为

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n U_n(z) D_n(t). \quad (21)$$

其中模态参与系数为

$$P_n = \frac{4V_s \left| \cos \frac{\omega_n H}{V_s} - 1 \right|}{2\omega_n H - V_s \sin 2\omega_n H}. \quad (22)$$

3 结 论

本文以一维剪切条模型为基础, 对于成层场地振动问题列出了定解方程, 并通过分离变量法直接求解, 给出了水平成层场地自振特性与地震动力时域响应的解析表达式, 其中包括确定场地自振频率的特征方程、模态函数、位移时域响应、相对加速度与绝对加速度及剪应力的封闭形式解, 这一解答是这种一维剪切条简化模型解答的精确形式, 为地震动场地效应分析与地震小区划提供了基础。

参考文献:

- [1] Idriss I M, Seed H B. Seismic response of horizontal soil layers [J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Engineering Division, ASCE, 1968, **94**(4): 1003–1031.
- [2] Dobry R, Oweis I, Urzua A. Simplified procedures for estimating the fundamental period of soil profile [J]. Bulletin of Seismological Society of America, 1976, **66**(4): 1293–1321.
- [3] 熊建国, 许贻燕. 分层土自振特性分析 [J]. 地震工程与工程振动, 1986, **6**(4): 21–35.
- [4] 栾茂田, 金崇磐, 林 皋. 非均质地基振动特性及地震反应分析 [J]. 大连理工大学学报, 1992, **32**(1): 81–87.
- [5] 高玉峰, 金建新, 谢康和, 王朝晖. 成层地基一维土层地震反应解析解 [J]. 岩土工程学报, 1999, **21**(4): 498–500.
- [6] 王春玲, 黄 义. 关于“成层地基一维地震反应解析解”的讨论 [J]. 岩土工程学报, 2003, **25**(3): 377–378.
- [7] 高玉峰. 对“成层地基一维地震反应解析解”讨论的答复 [J]. 岩土工程学报, 2003, **25**(3): 378.
- [8] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算(第二版) [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1996.