

推算室内固结系数的剩余沉降对数法

Study on evaluation of consolidation coefficient

李 涛, 张仪萍, 曹国强, 张土乔
(浙江大学 市政工程研究所, 浙江 杭州 310027)

摘要: 试样剩余沉降(最终沉降与沉降的差值)的对数与时间呈线性关系, 由线性方程的系数可推算出试样的固结系数。采用最小二乘原理估计线性方程的系数时需事先确定最终沉降, 由于线性方程的线性相关系数是最终沉降的函数, 为使线性拟合达到最佳, 最终沉降应使线性相关系数取到极值, 根据这一条件可解析出最终沉降。与推算固结系数的时间平方根法和时间对数法等方法相比, 本文方法无需固结试验初始阶段和最后阶段的数据, 从而避免了初始沉降和后期次固结沉降的影响, 并加快了固结试验的进程。

关键词: 固结系数; 剩余沉降对数法; 最小二乘原理

中图分类号: TU 411.5 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2003)06-0724-03

作者简介: 李 涛(1977-), 男, 浙江大学建筑工程学院在读博士研究生, 主要从事地基处理和沉降预测等方面工作。

LI Tao, ZHANG Yi-ping, CAO Guo-qiang, ZHANG Tu-qiao

(Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: The logarithm of residual settlement is linearly related with the time. From this relationship, a new method can be developed to evaluate the coefficient of consolidation. Data of early and last periods of the test are not needed for the method put forward in this paper, so the influence of the initial and the secondary compression is avoided. At the same time, the new method also can accelerate the consolidation test.

Key words: consolidation coefficient; logarithm of residual settlement method; least square principle

0 引 言*

土体固结问题是土力学的基本课题之一。现已有很多考虑了多种因素的经典固结理论, 但由于 Terzaghi 固结理论的简便性, 在工程实际应用中最广泛采用的还是 Terzaghi 固结理论。室内固结试验最重要的目的之一就是测定土体的固结系数 C_v 。在根据室内固结试验确定固结系数的方法中, 常采用 Taylor 提出的时间平方根法和 Casagrande 提出的时间对数法^[1] 两种半经验方法, 但由于试验初期的初始沉降 S_i 和后期的次固结沉降 S_s 的影响, 在确定主固结起点和终点时人为因素的影响较大。此后, 国内外许多学者提出许多不同的确定固结系数的方法, 如 Sivaram 等提出的三点法^[7]、Cour 提出的反弯点法^[8]、Parkin 提出的速率法^[9]、Scott 法^[10]、Prasad 等提出的两点法^[11]、李金轩等提出的标准曲线比拟法^[5]、熊兴邦等^[4] 在 Scott 法基础上直接利用解析法求固结系数, 以及张仪萍等提出的方法^[2], 等等。还有一些在时间平方根法和时间对数法上进行改进的方法, 如张其昌^[3]、Robinson 等^[10] 的研究工作。以上这些方法都不同程度地弥补了时间对数法和时间平方根法的不足之处, 但由于各种原因在实际应用中并没有得到推广。

在荷载的作用下, 土体产生沉降, 按变形机理可分为 3 部分: 初始沉降 S_i 、主固结沉降 S_c 和次固结沉降

S_r 。这三者中只有主固结沉降 S_c 才是土体在附加应力作用下排水固结而引起的变形, 而在固结试验中实测的 $S-t$ 曲线中, 变形 S_t 中往往包含初始沉降、固结沉降和次固结沉降。因此, 应设法将试验数据中初始沉降和次固结沉降的影响消除, 才能较准确地得出反映主固结特性的固结系数 C_v 。本文从 Terzaghi 固结理论出发, 推导出主固结完成时的总沉降量 S_∞ 和沉降量 S_t 之差 ($S_\infty - S_t$), 即剩余沉降量与时间 t 在半对数坐标系中呈线性关系, 利用这一关系提出了一种固结系数的推算方法。该方法无需固结试验初始阶段和最后阶段的数据, 从而避免了初始沉降 S_i 和后期次固结沉降 S_s 的影响, 同时加快了固结试验的进程。

1 方法的理论基础

Terzaghi 一维固结微分方程为^[6]

$$C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1)$$

式中 C_v 为固结系数; u 为超静孔压; t 为时间; z 为深度。相应平均固结度的计算式为

$$U_t = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} e^{-m^2 \frac{\pi^2}{4} T_v}, \quad (2)$$

式中 时间因子 $T_v = \frac{C_v}{H^2} t$, H 为排水距离, m 为奇正

整数。

当 $U_i > 30\%$ 时,级数收敛很快,只要采用第一阶即可满足精度要求,即

$$U_i = 1 - \frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2}{4} T_v}, \quad (3)$$

根据平均固结度的定义 $U_i = \frac{S_i - S_d}{S_\infty - S_d}$,代入式(3),化简后有

$$\frac{S_\infty - S_i}{S_\infty - S_d} = \frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2}{4} \frac{C_v}{H^2} t}, \quad (4)$$

式中 S_∞ 为主固结完成时对应的总沉降量, S_d 为初始沉降量。对(4)式两边取对数,整理后得

$$\ln(S_\infty - S_i) = \alpha C_v t + \beta, \quad (5)$$

其中 $\alpha = -\frac{\pi^2}{4H^2}$, $\beta = \ln \frac{8}{\pi^2} (S_\infty - S_d)$ 。

2 固结系数的推算

由式(5)可以看出, $\ln(S_\infty - S_i)$ 与时间呈线性关系,根据一组试验数据 $(S_{ti}, t_i) (i = 1, \dots, N)$ 采用最小二乘原理可确定出式(5)中的系数。不过由于最终沉降 S_∞ 仍未知,因此在确定线性方程式(5)的系数 α 、 β 之前必须先确定最终沉降 S_∞ 。

用最小二乘法进行拟合时,式(5)相应的线性相关系数为

$$R = \frac{L_{xy}}{\sqrt{L_{xx}L_{yy}}}. \quad (6)$$

其中 $L_{xx} = \sum_{i=1}^N t_i^2 - \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N t_i \right|^2$, $L_{xy} = \sum_{i=1}^N t_i \ln(S_\infty - S_{ti}) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i \sum_{i=1}^N \ln(S_\infty - S_{ti})$, $L_{yy} = \sum_{i=1}^N \ln^2(S_\infty - S_{ti}) - \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N \ln(S_\infty - S_{ti}) \right|^2$, 式中 N 为试验数据的个数。

从线性相关系数的计算式(6)可以看出,相关系数 R 只是 S_∞ 的函数,为了达到最佳的线性拟合, S_∞ 应使 R 取到极值,即

$$\frac{d|R|}{dS_\infty} = 0, \quad (7)$$

亦即

$$\frac{dR^2}{dS_\infty} = 0. \quad (8)$$

由式(8)可得

$$\sum_{i=1}^N \frac{t_i}{S_\infty - S_{ti}} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i \sum_{i=1}^N \frac{1}{S_\infty - S_{ti}} - \frac{L_{xy}}{L_{yy}} \sum_{i=1}^N \frac{\ln(S_\infty - S_{ti})}{S_\infty - S_{ti}} + \frac{L_{xy}}{NL_{yy}} \sum_{i=1}^N \ln(S_\infty - S_{ti}) \sum_{i=1}^N \frac{1}{S_\infty - S_{ti}} = 0. \quad (9)$$

由式(9)可解得最终沉降 S_∞ , 最终沉降计算出来后,再由最小二乘法计算出式(5)线性方程的系数。设有 N 个数据点 $(\ln(S_\infty - S_{ti}), t_i)$, 其最佳拟合的斜率为

$$k = \frac{N \sum \ln(S_\infty - S_{ti}) t_i - \sum \ln(S_\infty - S_{ti}) \sum t_i}{N \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}, \quad (10)$$

直线斜率 $k = \alpha C_v$ 已知后,即可计算出固结系数:

$$C_v = \frac{k}{\alpha} = -\frac{4H^2 k}{\pi^2}, \quad (11)$$

式中 H 为排水距离,若是双面排水一般取试验前后试样高度平均值的一半。同时直线的截距 β 也可求出,由此可求出相应的初始沉降 S_d 为

$$S_d = S_\infty - \frac{\pi^2}{8} e^{\beta}. \quad (12)$$

3 计算实例

采用文献[2]中的两个实例来验证方法的正确性。

实例1:饱和土样作固结试验,当压力从 200 kPa 增加到 400 kPa 时,测得千分表读数如表 1,经过 24 h 后,土样厚度为 14.10 mm。

考虑到初始沉降和次固结沉降的影响,选取 1~49 min 数据进行计算,利用程序迭代计算得到 S_∞ 的结果为 1.92 mm。按最终沉降 $S_\infty = 1.92$ 绘制 $\ln(S_\infty - S_i) - t$ 关系曲线如图 1 所示,由图可知,试验初始阶段(1 min 之前)由于初始沉降还处于发展阶段以及(2)式偏离理论值等原因, $\ln(S_\infty - S_i) - t$ 线性关系不明显,试验后期(49 min 之后)由于次固结的影响,曲线也偏离了线性,而在试验的中间阶段(2~49 min)两者具有明显的线性关系。利用 2~49 min 之间的数据,采用最小二乘法求得直线的斜率为 $k = -9.014 \times 10^{-4}$, 线性相关系数为 -0.9996,相关性很好。在第 2 分钟土样厚度为 16.01 mm,在第 49 分钟土样厚度为 14.69 mm,此间土样平均厚度为 15.35 mm,排水距离取 7.675 mm。则固结系数:

$$C_v = -\frac{4H^2 k}{\pi^2} = 2.15 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s},$$

文献[2]计算的固结系数为 $1.722 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}$,而由时间对数法计算值为 $1.47 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}$ 。

实例2:试样最大排水距离为 1 cm,试验数据如表 2 所示。

选取 1~64 min 数据进行计算,得到 S_∞ 为 1.798 mm,按最终沉降 $S_\infty = 1.798$ 绘制 $\ln(S_\infty - S_i) - t$ 关系曲线如图 2 所示,同样选取试验中间阶段(2.25~49 min)数据进行计算,得到直线斜率为 $k = -1.02 \times 10^{-3}$,

表 1 算例 1 试验数据

Table 1 The data of case 1

时间/min	0	0.25	0.5	1	2	4	9	16	25	36	49	60	90	120	210	300	1440
读数/mm	5.00	4.82	4.77	4.64	4.51	4.32	4.00	3.72	3.49	3.31	3.19	3.10	2.98	2.89	2.78	2.72	2.60

表 2 算例 2 试验数据

Table 2 The data of case 2

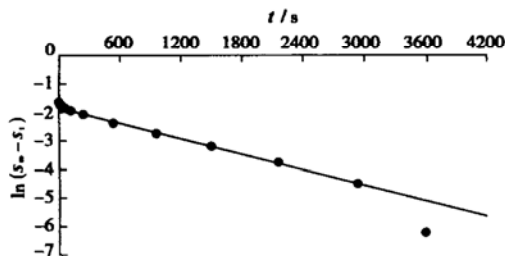
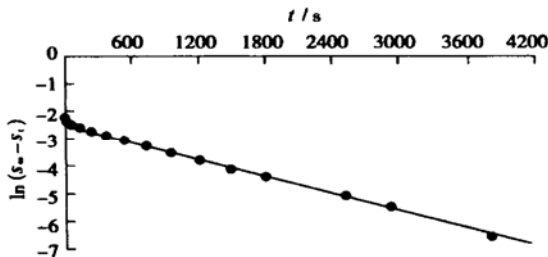
时间/min	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9	12.25	16	20.25	25	30.25	42.25	49	64	100	200	300	400	1000
压缩量/mm	0	0.240	0.397	0.552	0.706	0.863	1.012	1.161	1.298	1.416	1.521	1.590	1.693	1.728	1.773	1.820	1.853	1.871	1.880	1.900

线性相关系数为 -0.9994 , 具有很好的相关性。排水距离 $H = 9.35 \text{ mm}$, 所以固结系数为

$$C_v = -\frac{4H^2 k}{\pi^2} = 3.62 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}.$$

文献[2] 时间对数法、时间平方根法和标准曲线比拟法计算的固结系数分别为 3.69×10^{-4} , 4.16×10^{-4} , 3.68×10^{-4} , $4.67 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}$ 。

从两个实例的计算结果来看, 本文的方法是有效可靠的, 可应用到实际当中去。同时从图 1 和图 2 中可以看到, 由于近似公式(3) 偏离理论值以及初始沉降的影响, 试验点初期偏离直线; 而在试验后期, 由于次固结的影响, 试验点也偏离直线。因此, 在推算固结系数时最好选取中间阶段的数据为宜, 一般可取 $1 \sim 60 \text{ min}$ 时间段内的数据。

图 1 算例 1 中 $\ln(S_\infty - S_t) - t$ 关系曲线Fig. 1 The relation between $\ln(S_\infty - S_t)$ and t in case 1图 2 算例 2 中 $\ln(S_\infty - S_t) - t$ 关系曲线Fig. 2 The relation between $\ln(S_\infty - S_t)$ and t in case 2

4 结 语

本文研究表明剩余沉降的对数 $\ln(S_\infty - S_t)$ 与时间 t 具有很好的线性关系, 利用这一关系可得到一种

推算固结系数的方法, 类似于时间对数法, 称为剩余沉降对数法。这种方法具有以下优点:

(1) 在试验数据选取上避开对固结系数影响较大的试验初始阶段和最后阶段, 从而最大限度地消除了初始沉降和次固结沉降的影响, 使得试验结果能很好地反映试样主固结特性。

(2) 根据最小二乘法原理, 利用 S_∞ 使线性相关系数取极值来推求 S_∞ , 这比一般作图方法更为合理, 同时也可计算出初始沉降量 S_d 。

(3) 从算例来看, 基本上只需要试验初期 1 h 的数据即可推求固结系数, 无需试验后期的数据, 可以更快地测定固结系数。

参考文献:

- [1] GBJ 145—90. 土工试验方法标准[S].
- [2] 张仪萍, 俞亚南, 张土乔, 张晓海. 室内固结系数的一种推算方法[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(5): 616—618.
- [3] 张其昌. 土工试验中固结系数的计算方法及其在微机数据处理系统中的实现[J]. 地基基础工程, 1995, (1): 11—14.
- [4] 熊兴邦, 陈 钟. 固结系数的计算方法[J]. 工程勘察, 1994, (6): 17—21.
- [5] 李金轩, 胡金珠. 确定固结系数的标准曲线比拟法[J]. 工程勘察, 1996(1): 21—22.
- [6] 龚晓南. 高等土力学[M]. 浙江: 浙江大学出版社, 1996. 91—116.
- [7] Sivaram B, Swamee P K. A computation method for consolidation coefficient[J]. Soils & Foundations, 1977, 17(2): 48—52.
- [8] Cour F R. Inflection point method for computing C_v [J]. J Soil Mech Fdn Engng, ASCE, 1971, (1): 827—831.
- [9] Parkin A K. Coefficient of consolidation by the velocity method [J]. Geotechnique, 1978, 28(4): 472—474.
- [10] Robinson R G. Consolidation analysis by an inflection point method[J]. Geotechnique, 1997, 47(1): 199—200.
- [11] Scott R F. Newmethod of consolidation coefficient evaluation [J]. ASCE, 1976, (SM1): 29—30.
- [12] Prasad Y V S N, Rao S N. A new two point method of obtaining from a consolidation test [J]. Canada Geotechnical Journal, 1995, 32: 741—746.