

# 有限覆盖无单元法在裂纹扩展数值分析问题中的应用

## Applications of the finite-cover element-free method in numerical analyses of crack-expansion

栾茂田, 张大林, 杨庆, 田荣

(大连理工大学 土木水利学院 海岸与近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 有限覆盖无单元法是一种基于有限覆盖技术和无单元法的数值计算方法。有限覆盖技术是数值流形方法的基础, 由于数值流形方法具有统一处理连续与非连续问题的能力, 而无单元法的前处理比较简单。因此有限覆盖无单元法综合了数值流形方法与无单元法的优点, 能够更有效地处理非连续性问题。本文简要阐述了有限覆盖无单元法的基本理论, 着重将这种方法应用于应力强度因子计算和裂纹扩展模拟问题。若干算例数值计算结果表明了这种方法的有效性。

**关键词:** 有限覆盖; 无单元法; 裂纹; 应力强度因子; 数值分析; 有限覆盖无单元法

中图分类号: O 302; TU 452

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2003)05-0527-05

**作者简介:** 栾茂田(1962-), 男, 山东招远人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事海洋土力学理论与实验技术、岩土力学基本理论与数值分析、非线性动力学与岩土地震工程等方面的科研和教学工作。

LUAN Mao-tian, ZHANG Da-lin, YANG Qing, TIAN Rong

(School of Civil and Hydraulic Engineering and State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract:** Finite cover-based element-free method is a numerical method based on finite cover concept and element-free method. Finite cover is fundamental technique in manifold method which can deal with both continuous and discontinuous problems in a universal form. The prior process of the element-free method is relatively simple. Finite cover-based element-free method can integrate merits of both numerical manifold method and element-free method. At the same time, it can overcome their individual shortcomings. This method can handle discontinuous problems in a fairly effective way and it is easily implemented. In this paper, fundamental theory of the finite cover-based element-free method developed by the authors is briefly presented. The proposed method is successfully applied in the computations of stress intensity factor and numerical simulations of crack expansion. The effectiveness of the present method is verified by some numerical examples.

**Key words:** finite cover; element-free method; crack; stress intensity; numerical analysis; finite cover-based element-free method

## 0 前 言<sup>\*</sup>

近年来, 随着计算机科学与数值计算技术的发展, 非连续变形数值分析方法取得了长足进步。以往一般将非连续体近似或等效为连续介质来处理, 势必会造成较大的分析误差甚至错误, 给工程设计与分析带来不安全因素。

目前, 数值计算方法的重点发展方向在于三维空间分析技术与非连续变形分析。其中, 在非连续变形分析方面, 石根华等所发展的数值流形方法<sup>[1,2]</sup>和 Belytschko 所建立的无单元 Galerkin 法<sup>[3]</sup>各自以其新颖的计算思想、先进的数值技术得到了力学与工程界的重视和关注。数值流形方法解决了材料连续与非连续性的统一的数学表述问题, 插值子域的形状是固定不变的、规则的, 连续与非连续问题的插值构造是一致的, 因此可以统一地进行连续与非连续的计算分析。无单元 Galerkin 法由于实现了无单元插值构造格式, 极大

地简化了前处理工作与裂纹开裂扩展等问题的分析计算, 无单元 Galerkin 法采用无单元插值技术, 使得插值构造摆脱了单元的束缚。由于这些特点, 使得数值流形方法与无单元 Galerkin 法这两种方法各自具有一定的优越性, 并且具有很大的发展潜力, 在岩土工程非连续变形分析中具有广泛的应用前景。

但是, 这两种方法本身也存在某些缺陷和不足。数值流形方法<sup>[4-6]</sup>的双重网格既是流形方法的优点, 同时又使前处理复杂化和难以应用于裂纹开裂与扩展的数值模拟。无单元 Galerkin 法是为了解决前处理问题而发展起来的一种方法, 但就其本身直接用来处理岩土工程中非连续问题仍还存在一定的局限性, 对于连续与非连续变形分析, 流形方法与无单元 Galerkin 法相辅相成, 互相补充。若将这两种方法结合起来, 则

\* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172022); 教育部跨世纪优秀人才培养计划研究基金资助项目

收稿日期: 2002-10-19

不仅可以克服前处理与开裂扩展方面的困难,而且可以将连续与非连续问题的数值分析统一起来。本文正是基于这种思想,建立并发展了有限覆盖无单元法,并将其应用于裂纹开裂与扩展的数值分析。

## 1 有限覆盖无单元法基本原理

有限覆盖无单元法采用数值流形方法中的有限覆盖技术,保证插值子域无论对于连续问题还是非连续问题均不发生改变,应用无单元法中的多重权滑动最小二乘法构造插值函数,在无网格框架下实现了连续与非连续问题的插值函数的统一构造<sup>[7~9]</sup>。笔者曾成功地将这种方法应用于求解岩土工程中的摩擦接触问题<sup>[10]</sup>。

### 1.1 有限覆盖技术

有限覆盖技术是流形方法中的关键技术,其基本思想是用有限个相互重叠的覆盖去涵盖整个材料域,形成一个有限数学覆盖系统,总体形状函数可用局部覆盖所定义的函数来计算。材料域的边界、裂缝、块体和不同材料域的交接面再将这个数学覆盖系统划分成不同的物理网格,形成一个有限物理覆盖系统。一个数学覆盖可能被重分成2个或2个以上的物理覆盖。一个数学覆盖剖分成物理网格的数量与材料的非连续性有关,材料的非连续性越强,形成的物理网格越多。数学覆盖定义了近似解的精度,物理覆盖定义了求解的积分区域。图1示意了数学覆盖形成物理覆盖的过程。

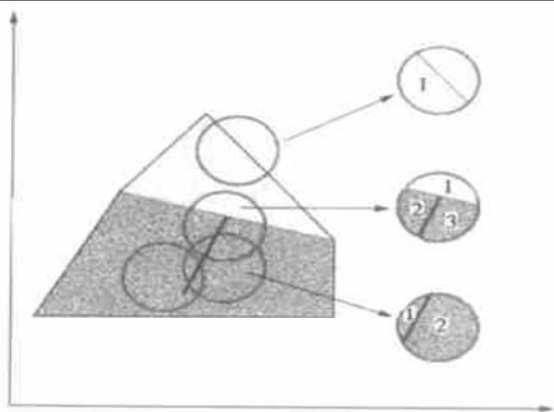


图1 有限覆盖技术

Fig. 1 Finite covers used in the analyses

本文采用圆作为数学覆盖,而在现有流形方法中,所采用的有限覆盖系统一般是基于有限元网格所形成的,数学覆盖形状为多边形。因此上述有限覆盖技术虽然与流形方法在理论上可以采用任意形状的图形作为数学覆盖,但对于特殊的覆盖形状与特殊的覆盖重叠形式,将会遇到困难。例如,当应用圆形数学覆盖

时,会出现曲线形状的流形单元,而且每一流形单元的覆盖个数不可能完全相同,这样现有流形方法的插值函数构造方法和单纯形积分方法都会失去作用。

### 1.2 多重权滑动最小二乘法

无单元法的基础是滑动最小二乘法,它的基本思想是在计算域上通过一些离散点上的场函数值由滑动最小二乘法来拟合场函数。滑动最小二乘法采用加权最小二乘法来近似场函数。

由于覆盖权函数是定义在数学覆盖上,无论对于连续材料还是非连续材料,覆盖权函数的形状都不会发生改变。但是对于一个数学覆盖的不同物理覆盖,覆盖权函数的影响区域即定义域是不同的。如图2中标有a、b和c的三个物理覆盖的覆盖权函数。

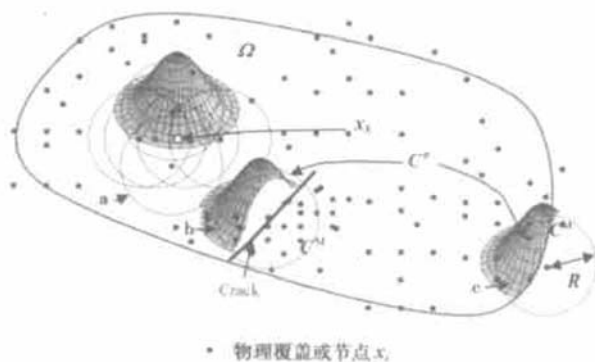


图2 物理覆盖的覆盖权函数

Fig. 2 Weighted functions of physical cover

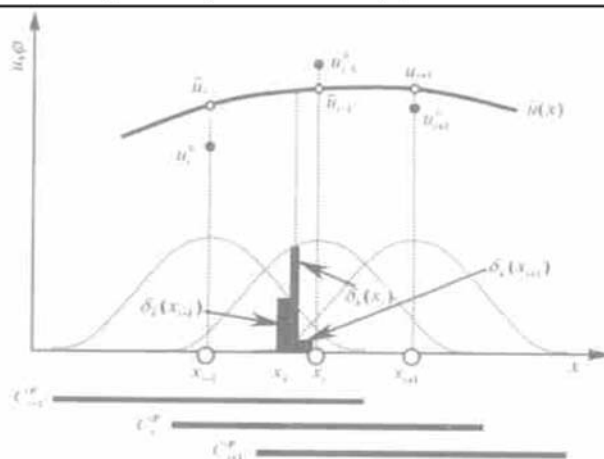


图3 有限覆盖无单元方法的多重权滑动最小二乘法

Fig. 3 Multiple weighted moving least square method

设场函数为  $u(x)$ , 给定  $u(x)$  在  $n$  个节点上的值 (如图3所示)

$$u(x_i) = u_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

则使用滑动二乘法可确定一个  $u(x)$  的近似函数为

$$u(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) = p^T(x) a(x), \quad (2)$$

式中  $a(x)$  为  $m$  维系数向量,  $p(x)$  为  $m$  维基向量。

在域内某一点  $\hat{x}$  的微小邻域内,  $u(x)$  的局部近似函数为

$$L_{\hat{x}}u(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) = p^T(\hat{x}) a(\hat{x}). \quad (3)$$

最小二乘法要求近似函数与真实函数在各已知点上取值的离差的加权二阶范数最小, 则对局部近似函数式(3)构造下列的加权二阶能量模离散形式:

$$J[a(\hat{x})] = \sum_{i=1}^n w_i(\hat{x}) [p^T(x_i) a(\hat{x}) - u_i]^2, \quad (4)$$

由式(4)关于  $a(\hat{x})$  求导得到驻值条件

$$a(\hat{x}) = A^{-1}(\hat{x}) B(x) u, \quad (5)$$

将式(5)代入式(3), 得到

$$L_{\hat{x}}u(x) = \sum_{i=1}^n n_i(\hat{x}, x) u_i. \quad (6)$$

其中

$$n_i(\hat{x}, x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) [A^{-1}(x) B(x)]_{ji}, \quad (7)$$

$$A(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) p(x_i) p^T(x_i), \quad (8)$$

$$B(x) = [w_1(x) p(x_1), \Lambda, w_n(x) p(x_n)]. \quad (9)$$

现在使  $\hat{x}$  成为域内的任意一点, 则

$$u(x) = L_{\hat{x}}u(x), \quad (10)$$

由此可得计算域内任意点的近似函数表达式为

$$u(x) = \sum_{i=1}^n n_i(x) u_i, \quad (11)$$

式中

$$n_i(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) [A^{-1}(x) B(x)]_{ji}. \quad (12)$$

## 2 裂纹扩展过程的数值分析技术

### 2.1 裂纹断裂判据

在裂纹扩展分析中, 断裂判据是一个基本问题。这里选用最大周向正应力准则作为裂纹的断裂扩展判据。最大周向正应力准则的表达式为

$$\cos \frac{\theta}{2} \left| K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right| = K_{Ic}. \quad (13)$$

式中  $K_I$  与  $K_{II}$  分别为 I 型与 II 型裂纹的应力强度因子;  $K_{Ic}$  为断裂韧度。裂纹扩展的方向角  $\theta_0$  由下式确定:

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0. \quad (14)$$

### 2.2 应力强度因子计算

应力强度因子的精确计算是判断裂纹起裂及确定裂纹扩展方向的关键, 本文采用围线积分法计算应力强度因子<sup>[11]</sup>。在围线积分法中, 首先取一远离裂纹尖端且包围裂纹的围线  $\Gamma'_s$ , 由系统在某一平衡状态下围线  $\Gamma'_s$  上的真实位移和作用力与辅助场的位移和作

用力联合求出一个围线积分, 然后根据 Betti 功互等定理求得裂尖应力强度因子。

### 2.3 裂纹扩展过程中的数值分析

由于有限覆盖无单元法采用了无单元的插值方法, 因此用于非连续性问题的分析及裂纹扩展模拟时比较简便。在应用有限覆盖无单元法进行裂纹扩展过程的数值模拟时, 采用了裂尖能量释放方法和小步长扩展技术。具体实施过程中, 在每一加载步末, 判断裂纹是否扩展。如果裂纹开始扩展, 则保持载荷水平, 进行能量释放过程。在能量释放过程中, 如果裂纹系统能够回到一个新的平衡状态, 则说明裂纹在当前载荷水平下是稳定的, 继续施加载荷进行新一轮新的迭代过程; 如果系统无法回到新的平衡状态, 则说明裂纹发生了失稳扩展, 系统发生破坏, 计算结束。图 4 给出了有限覆盖无单元法模拟裂纹扩展过程的计算流程。

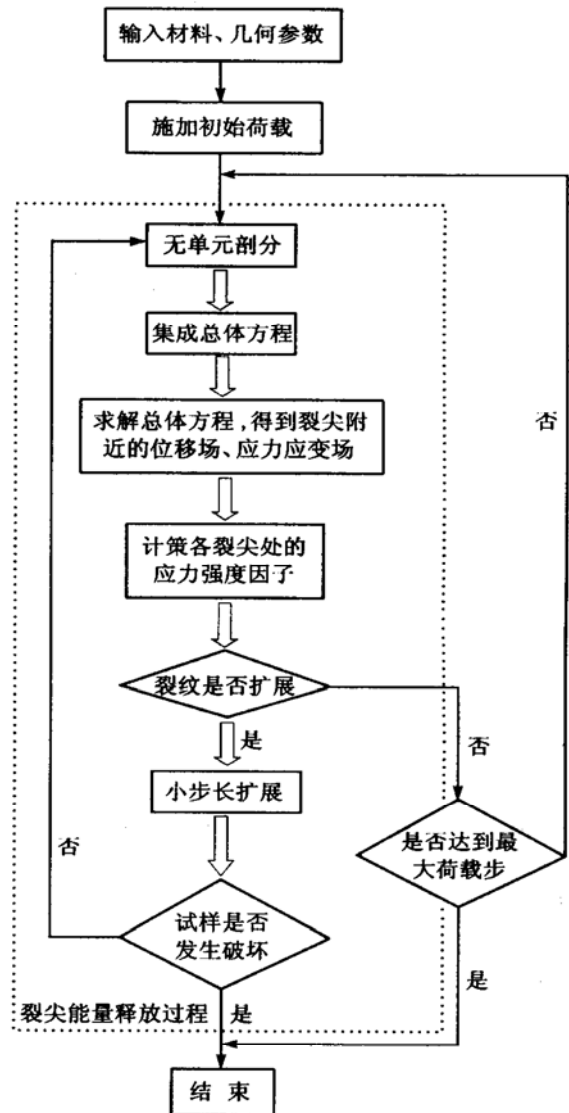


图 4 裂纹扩展过程模拟流程图

Fig. 4 Flow chart of numerical simulation of crack propagation

### 3 数值算例分析

本文应用有限覆盖无单元方法计算了三一点弯曲梁的应力强度因子, 并对半圆盘裂纹试样的裂纹扩展过程进行了数值计算与分析, 实时跟踪了裂纹的扩展路径, 计算结果表明这种方法是行之有效的。

#### 3.1 三一点弯曲梁试件的应力强度因子分析

由于所需试件尺寸较小, 原材料和试验机吨位都较小, 且试样形状简单便于加工, 三一点弯曲梁试样是在测定材料的平面应变断裂韧度  $K_{Ic}$  时应用最广泛的一种试件形式。然而在三一点弯曲试件中, 由于裂纹面受到的不是拉伸应力而是弯曲应力, 对这种情况的应力强度因子尚未得到严密的理论解。美国 ASTM E399 规范采用了如下经验关系<sup>[12]</sup>:

$$K_I = \left| \frac{PS}{BW^{3/2}} \right| f \left| \frac{a}{W} \right|, \quad (15)$$

式中

$$f \left| \frac{a}{W} \right| = 2.9 \left| \frac{a}{W} \right|^{1/2} - 4.6 \left| \frac{a}{W} \right|^{3/2} + 21.8 \left| \frac{a}{W} \right|^{5/2} - 37.6 \left| \frac{a}{W} \right|^{7/2} + 38.7 \left| \frac{a}{W} \right|^{9/2}. \quad (16)$$

在我国 GB4161-84《金属材料平面应变断裂韧度  $K_{Ic}$  试验方法》中, 对于  $K_I$ , 采用了与 ASTM E399 相同的表达式(15), 经验函数取为下列形式<sup>[12]</sup>:

$$f \left| \frac{a}{W} \right| = \frac{3 \left| \frac{a}{W} \right|^{1/2} \left| 1.99 - \left| \frac{a}{W} \right| \left| 1 - \frac{a}{W} \right| \right|}{2 \left| 1 + 2 \frac{a}{W} \right| \left| 1 - \frac{a}{W} \right|^{3/2}} \cdot \left| 2.15 - 3.93 \left| \frac{a}{W} \right| + 2.7 \left| \frac{a}{W} \right|^2 \right|. \quad (17)$$

对于如图 5 所示的试样, 梁高  $W = 100$  cm, 集中荷载  $P = 200$  kN。按平面应变问题, 用有限覆盖无单元方法分别计算了 7 种不同裂纹长度情况下的应力强度因子。7 种裂纹长度  $a$  的取值分别为  $0.15W$ ,  $0.25W$ ,  $0.35W$ ,  $0.45W$ ,  $0.55W$ ,  $0.65W$  和  $0.75W$ 。

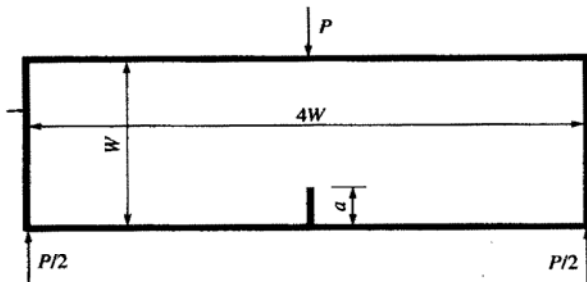


图 5 三一点弯曲试样

Fig. 5 Sample of the three point bending beam

节点布置如图 6 所示, 均匀分布节点间距为  $12.5$  mm  $\times$   $12.5$  mm, 裂尖处加密圆半径为  $12.5$  mm, 并在 5 个

加密周上加密布置  $5 \times 12$  个节点。

图 7 同时给出了针对不同裂纹长度所得到的计算结果及规范建议值。数值计算结果与我国规范建议值最大相对差别约为  $1.6\%$ , 而与美国规范建议值相差在  $2.4\%$  左右。当裂纹长度与梁高之比较小或较大时, 数值计算结果与规范建议值差别稍大一些。

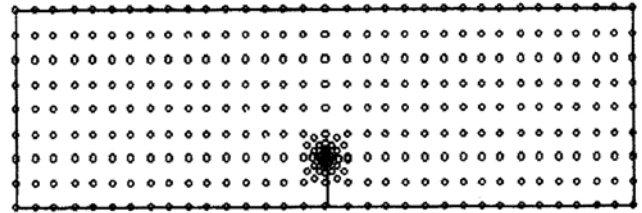


图 6 试样节点分布图

Fig. 6 Configuration of computational nodes of the beam

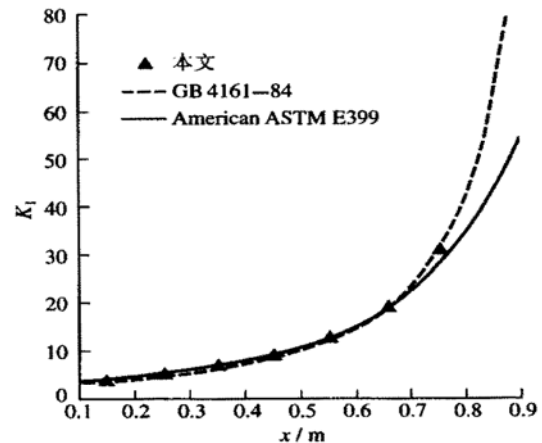


图 7 应力强度因子计算结果

Fig. 7 Comparison between the calculated results of stress intensity factors and empirical data given in the code

#### 3.2 半圆盘裂纹试件的裂纹扩展过程分析

为了进一步考察有限覆盖无单元法的有效性, 对半圆盘状带裂纹试件的裂纹扩展进行了数值模拟, 试样尺寸如图 8 所示, 裂纹试件的初始计算网格如图 9 所示。对于裂纹扩展路径, 图 10 对本文数值计算结果与已有分析计算和实验结果进行了对比<sup>[13, 14]</sup>, 可见本文的数值模拟结果与现有解答吻合较好。

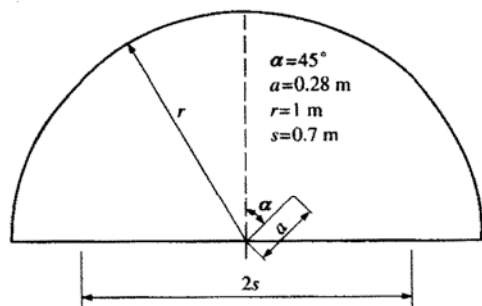


图 8 半圆盘裂纹试件

Fig. 8 Specimen of semicircle disc

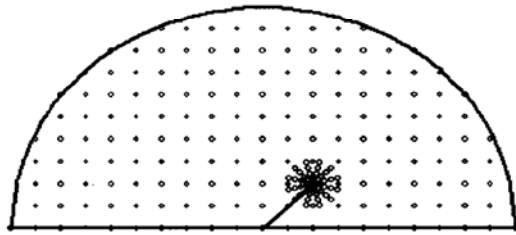


图9 半圆盘裂纹试件的初始计算网格

Fig. 9 Initial grids of the semicircular disc specimen

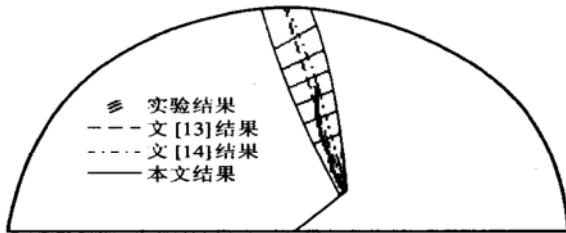


图10 不同方法所预测的半圆盘裂纹试件裂纹扩展路径

Fig. 10 Comparison of crack extension path of the semicircular disc specimen predicted by different methods

## 4 结 语

有限覆盖无单元法继承了流形方法中有限覆盖技术和无单元两种方法的各自优点,简化了前处理过程,是一种可以统一处理连续与非连续问题的无单元方法。数值算例分析表明了这种方法的可行性和有效性。如进一步与接触算法相结合,该方法可以广泛应用于实际岩体非连续变形、裂纹扩展与开裂、界面接触、多体相互作用等一系列非连续问题的数值模拟。

### 参考文献:

[1] Shi G H. Manifold method [A]. Proceedings of First International Forum on Discontinuous Deformation Analysis (DDA) and Simulation of Discontinuous Media [C]. Berkeley, California, 1996. 52- 204.

[2] 石根华. 数值流形方法与非连续变形分析 [M]. 裴觉民译. 北京: 清华大学出版社, 1997.

[3] Belytschko T, Lu Y, Gu L. Element free Galerkin methods [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37: 229- 256.

[4] Luan Maotian, Tian Rong, Yang Qing. A new mesh-free method—finite cover element-free method [A]. Desai C S. et al. Proceedings of the 10th International Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics [C]. Tucson: The University of Arizona, 2001.

[5] 庞作会, 葛修润, 等. 一种新的数值方法——无网格伽辽金法 (EFGM) [J]. 计算力学学报, 1999, 16(3): 320- 329.

[6] 王水林, 葛修润. 流形元法在模拟裂纹扩展中的应用 [J]. 岩石力学与工程学报, 1997, 16(5): 405- 410.

[7] 寇晓东. 无单元法追踪结构开裂及拱坝稳定研究 [D]. 北京: 清华大学, 1998.

[8] 田 荣. 连续与非连续变形分析的有限覆盖无单元方法及其应用研究 [D]. 大连: 大连理工大学, 2000.

[9] 田 荣, 栾茂田, 杨 庆. 一种新的数值方法——有限覆盖无单元方法 [A]. 第六届岩石力学与工程大会论文集 [C]. 2000. 267- 272.

[10] 栾茂田, 田 荣, 杨 庆, 张大林. 有限覆盖无单元法在岩土类弱拉型材料摩擦接触问题中的应用 [J]. 岩土工程学报, 2002, 24(2): 137- 141.

[11] 杨晓翔, 范家齐, 匡振邦. 求解混合型应力强度因子的围线积分法 [J]. 计算结构力学及其应用, 1996, 13(1): 84- 89.

[12] 于晓中. 岩石和混凝土断裂力学 [M]. 长沙: 中南工业大学出版社, 1989.

[13] 李义军, Zimmermann T H. 混合型裂纹在应变软化材料中扩展的数值模拟 [A]. 中国青年学者岩土工程及其应用讨论会论文集 [C]. 1994. 710- 717.

[14] 蔡永昌, 朱合华. 基于矩形覆盖的流形方法及其在模拟裂纹扩展中的应用 [A]. 第七届岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集 [C]. 大连: 大连理工大学出版社, 2001. 464- 468.