

基于模糊集理论的边坡稳定性分析

Slope stability analysis using fuzzy sets theory

徐卫亚, 蒋中明, 石安池
(河海大学 岩土工程研究所, 江苏 南京 210098)

摘要: 岩土工程中的各种信息都存在模糊性, 通过对边坡稳定性分析中模糊因素的研究, 提出了一种工程边坡模糊稳定性分析的新方法, 建立了边坡稳定性分析的模糊数学模型, 并给出了相应的求解方法。该模型可以考虑分析中所涉及到的计算力学参数的模糊性。在分析岩土力学参数试验资料的基础上, 结合专家经验提出了岩土力学参数的隶属函数构造方法, 利用统计资料构造了边坡稳定性评价的隶属函数, 并提出了边坡稳定性评价的具体分类指标和模糊安全系数隶属度的计算方法。实例研究表明边坡稳定性模糊分析方法是一种更为合理的研究边坡稳定性的新方法。

关键词: 模糊集; 隶属函数; 边坡稳定性; 模糊安全系数

中图分类号: TU 457

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2003)04-0409-05

作者简介: 徐卫亚(1963-), 男, 博士, 河海大学教授, 博导。主要从事岩石力学与工程的教学与科研工作。

XU Wei-ya, JIANG Zhong-ming, SHI An-chi

(Institute of Geotechnical Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Vague information widely exists in many aspects of the stability analysis of rock and soil slopes. By studying the vague factors in the slopes, a new approach is developed for the slope stability analysis using fuzzy sets, and a new fuzzy mathematical model is proposed to analyze the stability of slopes. In this model, the vague character of mechanical parameter, such as density, cohesion and frictional angle, is considered. For the convenience of computation, interval arithmetic is introduced to substitute fuzzy arithmetic. On the basis of the analysis of test data of rock and soil, a method to construct the membership functions is proposed according to the experience of specialist and a membership function for the evaluation of stability analysis of slopes is also constructed by use of statistical data. A new method used to evaluate membership degree of fuzzy safety coefficient and index for the evaluation of slope stability are also suggested in this paper. The case study indicates that fuzzy analysis method of slope stability is a more reasonable analysis method.

Key words: fuzzy sets; membership function; slope stability; fuzzy safety coefficient

0 引言*

岩土工程分析中使用的参数都包含了特定类型的模糊性, 不精确性或数量上是分散的。例如岩土材料中摩擦角或黏结力的测量值永远不可能是一个固定值。每个试验都会导致一些数据不同于先前所得到的值, 从而在某个范围内呈现出某种分布。在以往的边坡稳定性分析中, 往往在计算前对各个计算参数按照统计分析方法对这些参数的不确定性(模糊性或随机性)加以剔除, 选用一个确定的值进行边坡稳定性分析。

刚体极限平衡法是边坡稳定性分析中广泛使用的方法。这些方法逻辑合理、推导完善, 因而为广大工程人员所采用。但由于方法本身的局限性以及影响边坡稳定性的众多因素的不确定性, 求解的结果又很难直接为工程人员所采用, 其精度往往依赖于使用者的经验。这就导致了在许多计算条件下判断为稳定的边坡工程, 在实际情况中却发生了失稳破坏^[1]。如何提高计算结果的可靠性已成为工程技术人员关注的焦点。为此许多研究工作者进行了大量的探索, 冯夏庭^[1]结

合人工神经网络理论提出了边坡稳定性分析的智能化方法。贺少辉, 李中林^[2]通过建立边坡工程性能指标“安全时效性及适用性”的隶属函数, 将模糊概率测度理论用于边坡工程模糊可靠度研究, 建立了边坡工程模糊可靠度数学模型, 研究了开挖过程这一因素的模糊性对边坡稳定性的影响。汪益敏^[3]在考虑影响边坡稳定性因素的模糊性基础上, 采用多指标因素模糊评价方法, 对边坡岩体稳定质量进行了多级模糊综合评判研究。李彰明^[4]在对实测资料进行分析的基础上通过构造关联因素边界值矩阵建立了边坡稳定性分析的模糊综合评价模型。G. Habibagahi 和 R. Shahgholian^[5]则利用模糊集理论重点分析了岩石边坡中节理几何模糊性对边坡稳定性的影响, 等等。本文以刚体极限平衡分析方法中广泛使用的 Bishop 法为基础, 建立边坡稳定性分析的模糊计算方法。

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50128908); 国家重点基础研究发展规划项目(973项目)(2002CB412707); 水利科技创新基金资助项目(SCX200055)

收稿日期: 2002-10-12

1 模糊集基本理论及模糊算子

1.1 模糊集的符号

论域 U 中的模糊子集 $\tilde{A}$ 可以定义为目标和其相应的隶属度的“积分”。如果隶属函数是连续的, 模糊子集 $\tilde{A}$ 代表了 $x \in \tilde{A}$ 且 $\tilde{A} \subset U$:

$$\tilde{A} = \int_U \mu_{\tilde{A}}(x)/x. \quad (1)$$

式中 积分符号代表“并”; $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 是 x 在 $\tilde{A}$ 中的隶属度, 并且在 $[0, 1]$ 之间取值; “/”是用来区别 x 值和隶属度的分隔符。

如果模糊子集 $\tilde{A}$ 是离散数据对, 有

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^n \mu_i/x_i = \mu_1/x_1 + \dots + \mu_n/x_n, \quad (2)$$

式中求和符号或“+”表示“并”。

1.2 α -水平集, 凸性和正态性

α -水平集: 如果假定水平用 α 表示, $\alpha \in [0, 1]$ 。 $\tilde{A}$ 是 X 的模糊子集, 则 $\tilde{A}$ 的水平截集可以定义为

$$A_{\alpha} = \{x/\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}. \quad (3)$$

例如用 A_{α} 表示 $\tilde{A}$ 的 α -水平集, 它是 X 中所有隶属度大于等于 α 的元素组成的集合。

凸性: 模糊集 $\tilde{A}$ 是凸的当且仅当集合 A_{α} 满足下式:

$$A_{\alpha} = \{x/\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}. \quad (4)$$

集合 A_{α} 是凸的则所有 α 均在 $[0, 1]$ 区间取值。

正态性: 模糊集是正态的当且仅当

$$\bigvee_x \mu_{\tilde{A}}(x) = 1, \quad (5)$$

即 $\tilde{A}$ 的最大隶属度等于 1。

1.3 模糊数算子

模糊加: 把两个模糊区间以 α 水平在 R 内相加, 即

$$\begin{aligned} A_{\alpha}(+)B_{\alpha} &= [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}](+) [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] \\ &= [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}], \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $(+)$ 表示模糊数加法。

模糊减: 把两个模糊区间以 α 水平在 R 内相减, 即

$$\begin{aligned} A_{\alpha}(-)B_{\alpha} &= [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}](-) [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] \\ &= [a_1^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)}], \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $(-)$ 表示模糊数减法。

模糊乘: 利用 R 内的 α 截集得到的置信区间相乘, 即

$$\begin{aligned} A_{\alpha}(\times)B_{\alpha} &= [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}](\times) [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] \\ &= [a_1^{(\alpha)} \times b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \times b_2^{(\alpha)}], \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $(\times)$ 表示模糊数乘法。

模糊除: 利用 R 内的 α 截集得到的模糊区间相

除, 即

$$\begin{aligned} A_{\alpha}(\div)B_{\alpha} &= [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}](\div) [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] \\ &= [a_1^{(\alpha)} \div b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \div b_1^{(\alpha)}], \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $(\div)$ 表示模糊数除法。

1.4 扩展原理

设: $X_1, X_2, \dots, X_r, Y$ 分别为不同的论域; $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_r$ 为模糊集, 且 $\tilde{A}_i \subseteq X_i$; $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_r$ 为笛卡尔集。映射 f 为

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow Y, \\ (x_1, \dots, x_r) &\rightarrow y = f(x_1, \dots, x_r). \end{aligned} \quad (10)$$

f 在 Y 上生成一个模糊集 $\tilde{B}$,

$$\tilde{B} \triangleq \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) \mid y = f(x_1, \dots, x_r), (x_1, \dots, x_r) \in X\}, \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{B}}(y) &= \\ &\begin{cases} \sup_{(x_1, \dots, x_r) \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_r}(x_r)\}, & \text{若 } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{其它。} \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

2 边坡稳定性分析的模糊数学模型

根据国内外许多人的研究, 对于土质边坡或节理化的岩质边坡, 其变形破坏模式可按圆弧形破坏考虑^[6]。假定岩土体在统计意义上具有各向同性的性质, 则 Bishop 计算公式为

$$F_s = \frac{\sum_{i=1}^n (c_i l_i \cos \beta_i + \gamma_i V_i \tan \varphi_i) / m_i}{\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i V_i \sin \beta_i + Q_i \right)}, \quad (13)$$

$$m_i = \cos \beta_i + \tan \varphi_i \times \sin \beta_i / F_s. \quad (14)$$

式中 F_s 为边坡安全系数; n 为边坡分析的条块数; γ_i 为第 i 条块的容重; V_i 为第 i 条块的体积; l_i 为第 i 条块底边长度; β_i 为第 i 条块底边与水平面的夹角; c_i 为第 i 条块的岩土体内聚力; φ_i 为第 i 条块岩土体的内摩擦角; Q_i 为地震等因素引起的水平力。

在上述计算公式中, 由于获取参数信息时受到诸多因素的影响, 从而使各个力学参数具有“模糊性”, 所以可以利用模糊数学的分析方法来研究边坡的模糊稳定性。考虑边坡岩土体的容重 (γ_i), 内聚力 (c_i) 及内摩擦角 (φ_i) 为模糊数, 则安全系数 F_s 也必为模糊数, 将模糊数学符号引入式 (13), (14) 得

$$\begin{aligned} \tilde{F}_s &= \left\{ \sum_{i=1}^n [\tilde{c}_i l_i \cos \beta_i (+) \tilde{\gamma}_i V_i (\times) \tan \tilde{\varphi}_i] (\div) \tilde{m}_i \right\} \\ &(\div) \left[\sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_i V_i \sin \beta_i + Q_i \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\tilde{m}_i = \cos \beta_i + \tan \varphi_i \times \sin \beta_i (\cdot) \tilde{F}_s, \quad (16)$$

式中, (+) (×) (·) 分别表示模糊数加法、乘法和除法。

引入模糊数后, 式(15)、(16)的运算中包含了模糊运算, 模糊运算与传统的算子运算是不同的。对各个参数隶属函数引入 α 水平截集, 得到各个模糊数的模糊区间, 再根据扩展原理和式(15)、(16)计算出模糊安全系数的隶属度函数^[7]。

当对模糊变量取相同的水平截集 α 时, 各模糊数可表示为区间数: $c_i^\alpha = [c_{iL}^\alpha, c_{iR}^\alpha]$, $\varphi_i^\alpha = [\varphi_{iL}^\alpha, \varphi_{iR}^\alpha]$, $V_i^\alpha = [V_{iL}^\alpha, V_{iR}^\alpha]$ 。

式中 L 和 R 分别为水平截集下模糊数的左端点值和右端点值。经过如此处理后, 可将式(15)、(16)的运算转化为常规的代数运算, α 水平截集下边坡的模糊安全系数上、下限为

$$F_{sL}^\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n (c_{iL}^\alpha \cos \beta_i + V_{iL}^\alpha \tan \varphi_{iL}^\alpha) / m_{iL}^\alpha}{(\sum_{i=1}^n V_{iR}^\alpha \sin \beta_i + Q_i)}, \quad (17)$$

$$m_{iR}^\alpha = \cos \beta_i + \tan \varphi_{iR}^\alpha \times \sin \beta_i / F_{sL}^\alpha, \quad (18)$$

$$F_{sR}^\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n (c_{iR}^\alpha \cos \beta_i + V_{iR}^\alpha \tan \varphi_{iR}^\alpha) / m_{iR}^\alpha}{(\sum_{i=1}^n V_{iL}^\alpha \sin \beta_i + Q_i)}, \quad (19)$$

$$m_{iL}^\alpha = \cos \beta_i + \tan \varphi_{iL}^\alpha \times \sin \beta_i / F_{sR}^\alpha. \quad (20)$$

对式(17)、(18)和式(19)、(20)进行迭代计算直至收敛后即可求得模糊安全系数的上下限值。分别对不同的隶属度进行计算, 可得到一系列的安全系数与隶属度的相互关系, 据此可绘出安全系数的隶属函数图。

3 隶属函数的构造

3.1 计算力学参数隶属函数的构造

岩土工程中, 根据试验结果获得土体参数较高和较低的专家知识是可能的^[8], 基于这些信息, 计算力学参数的隶属函数可以构造成线性或非线形式。线性隶属函数呈三角形形状, 而非线性隶属函数 Zadeh π -函数的扩展^[9]等, 它既可以是对称的, 也可以是不对称的。这两种建议的隶属函数类型是实际应用众多可能性函数中的两种。函数形状的选择依赖于专家意见, 因为不可能推断一种函数类型比另一种函数类型更适合。三角形和 π -函数之间的区别在于后者允许从 $\mu=1$ 到 $\mu=0.5$ 更缓慢的下降, 而 $\mu=0.5$ 下降到 $\mu=0$ 在更快。三角形函数则与此相反。这里采用线性三角形隶属函数。

在构造隶属函数之前, 在 $\mu(x)=0$ 处 L' 和 H' 分别定义为模糊数的左右两个极端值, 形式如下:

$$L' = \begin{cases} P - 2(P - L), & P \geq 2(P - L), \\ 0, & P \leq 2(P - L), \end{cases} \quad (21)$$

$$H' = P + 2(H - P). \quad (22)$$

式中 L P H 分别是专家根据试验结果估计的计算力学参数较低值、可能值和较高值。

3.2 稳定性隶属函数构造

边坡稳定分析中, 一般将边坡的状态分为四种情况: 稳定状态、基本稳定状态、临界状态及失稳状态。之所以对边坡确定为这四种状态, 是因为在目前的科技水平下, 人们还不可能对边坡的失稳状态给出一个完全彻底的认识。大多数情况下, 对边坡进行极限平衡分析后, 都可以得到一个稳定性系数。然后根据稳定性系数对边坡的状态进行评判。边坡稳定性的评判就是要确定边坡在运行过程中可能遇到的工况(荷载条件)及在遭遇这些工况条件下边坡的稳定性状况。为此, 当我们对边坡地质、力学及环境条件进行充分分析后, 就可以对边坡的两种极端状态(稳定状态和失稳状态)给出一个比较满意的评价, 且其可靠度也较高。但是, 当我们的结论趋向于中间状态(基本稳定状态、临界状态)时, 就会给人们对边坡实际状态的判断带来相当大的困难。这种情况的出现是由于人们在对边坡进行分析时, 没有充分考虑各种信息的模糊性对力学分析所带来的影响。事实上, 边坡的地质条件、物理力学参数、荷载条件、分析所采用的几何信息以及评价边坡是否稳定的评价标准都存在模糊不确定性。因此对边坡稳定性进行模糊分析无疑有助于我们对边坡稳定性状态有更深入的认识, 并为工程决策提供更为有力的参考。

根据对文献[1]中列出的 83 个实际工程边坡的极限平衡分析统计资料和边坡对应的实际状态资料分析可以发现, 由于分析信息的模糊性、不确定性, 即使计算安全系数大于 1.6 的情况下, 也有部分边坡最终发生失稳破坏。为此当我们采用常规方法进行边坡稳定性分析时, 就不能简单地以安全系数大于 1.0(或某一个数值, 比如 1.5)来判断边坡的稳定状态。根据安全系数的隶属函数来判断边坡的稳定状态应该是一个比较客观方法。

隶属函数的构造在模糊分析中显得至关重要。理想化的隶属函数形式由于加入了过多的人为因素作用(专家知识), 使得分析结果带有较大的任意性。为了尽量减少人为因素给工程分析带来的主观影响, 应该寻求一种尽可能少使用专家经验的方法来确定模糊分析所需的隶属函数。当然, 专家知识在模糊分析中的作用目前还不能完全被忽略。因为, 如果一点都不考虑专家知识系统的作用, 很可能会出现一些很幼稚的

错误。这从另一方面也说明了模糊数学本身也有待于进一步发展和完善,以便更好地为工程服务。鉴于此,本研究提出在统计分析基础上的隶属函数构造新方法。

图 1 是根据文献[1]的统计资料绘出安全系数与稳定状态关系图。图中稳定状态为 1.0 的点表示稳定,而稳定状态为 0.0 的点表示边坡已经破坏。隶属函数的作用就是要量化确定稳定和破坏这两者之间的中间状态。图 1 还指出,稳定性隶属函数的类型属于偏大型,根据扩张定理可求得其隶属函数。

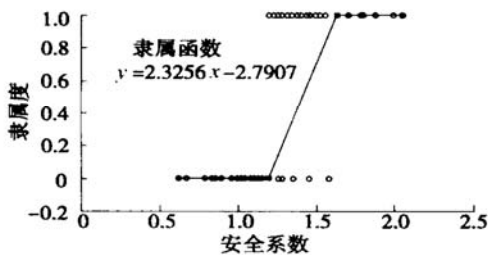


图 1 稳定性隶属函数

Fig. 1 Membership function of stability

一般说来,隶属函数的表达形式分为两大类,即线性和非线性两种,至于哪一种更科学,目前还没有这方面的研究成果。为方便运算,本文采用常用的线性表达型式,即将中间状态用一条直线代替,由此得到隶属函数的定义式如下:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \leq 1.2, \\ 2.3256x - 2.7907 & \text{当 } 1.2 < x \leq 1.63, \\ 1 & \text{当 } 1.63 < x. \end{cases} \quad (23)$$

在模糊数学中,当某一事件的隶属度越接近 0.5 时,其模糊性就越大;当事件的隶属度越接近于 0 或 1 时,其模糊性就越小,即事件是否属于某一状态就越清晰。本研究中,当隶属度等于 0.5 时,其对应的安全系数为 1.415,也就是当计算求得的安全系数为 1.415 时,判断边坡是否处于失稳状态的难度最大,或者说,在此条件下,很难说清边坡是否失稳或稳定,在工程上可将它界定为临界状态。同样,根据专家知识,当隶属度接近 0.75 时将它界定为基本稳定状态;当隶属度接近 1.0 时将它界定为稳定状态;当隶属度接近 0.25 时将它界定为基本不稳定状态。从而将边坡的状态划分为五种:稳定状态、基本稳定状态、临界状态、基本不稳定状态和破坏状态。

4 实例研究

在建中的某高速公路高路堑岩石边坡工程,设计最大坡高约 80 m,边坡计算简图如图 2 所示。地质钻探资料表明该边坡山体被节理切割严重,岩体破碎。

根据三轴压缩试验和单轴抗压试验结果,结合当地类似岩体结构的力学参数统计资料,得到边坡岩体的密度、黏聚力和内摩擦角的较低值、可能值和较高值分别为 2530, 2595, 2650 kg/m³; 0.07, 0.5, 1.1 MPa; 17°, 22°, 38°。

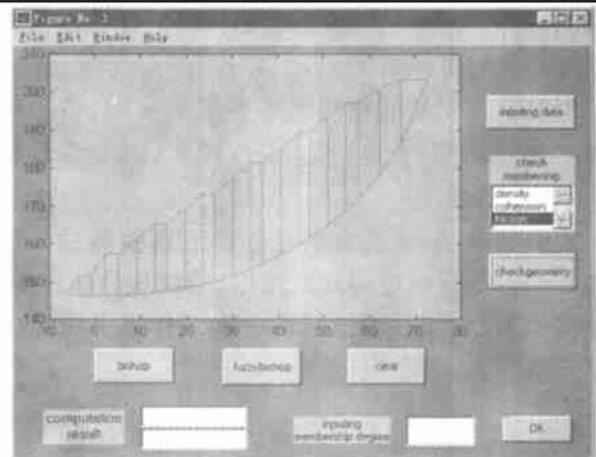


图 2 边坡计算简图

Fig. 2 Sketch of the slope for computation

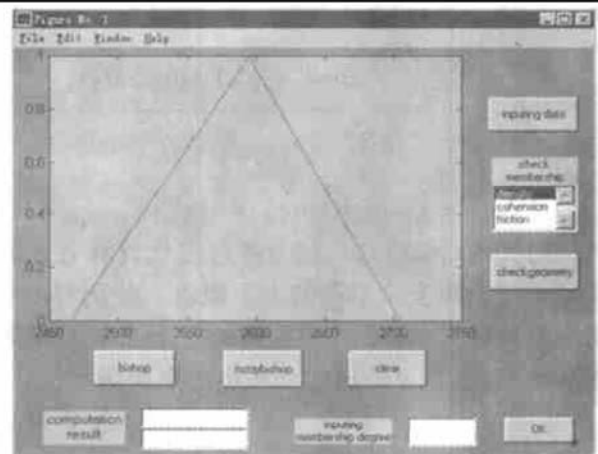


图 3 密度隶属函数图

Fig. 3 Membership function of density

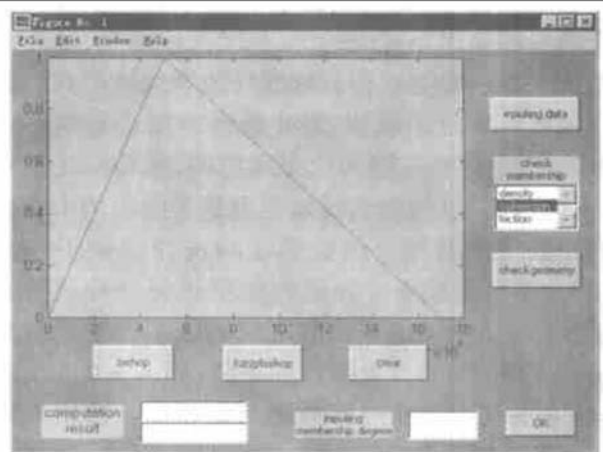


图 4 黏聚力 c 隶属函数图

Fig. 4 Membership function of cohesive

表1 隶属度与安全系数对照表

Table 1 Membership degree versus safe index of the computed slope

隶属度	1.0	0.95	0.9	0.85	0.8	0.75	0.7	0.6
安全 系数 极小值	2.7791	2.6019	2.4441	2.2787	2.115	1.9529	1.7928	1.4794
极大值	2.7791	3.1375	3.5007	3.8688	4.2418	4.6199	5.0035	5.7877

根据上述理论编制了基于 Matlab 环境的边坡模糊稳定性计算程序, 并对该实例进行了计算。图 3~5 为密度、黏聚力和内摩擦角的隶属函数图形。图 6 为计算得到的安全系数隶属函数图。表 1 给出了各种隶属度情况下对应的边坡安全系数。

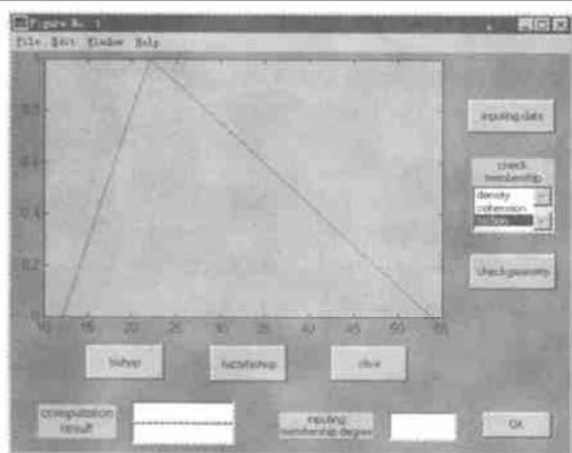
图5 内摩擦角 φ 隶属函数图

Fig. 5 Membership function of frictional angle

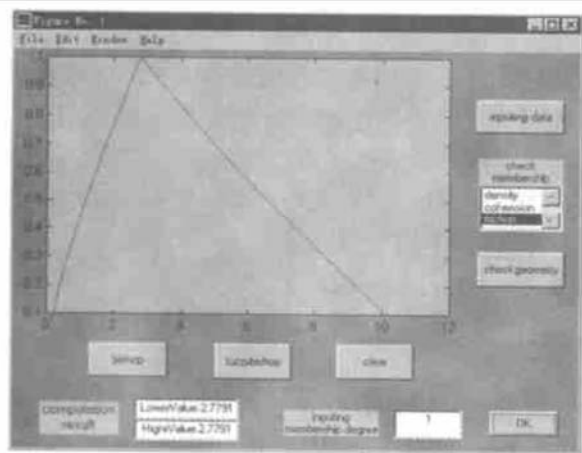


图6 安全系数隶属函数图

Fig. 6 Membership function of safe index

由此可见, 当取最大隶属度为 1.0 时, 边坡的安全系数为 2.7791, 这就是边坡“最可能”的安全系数, 将 2.7791 代入式 (23), 可知边坡稳定性隶属度为 1.0, 说明边坡处于稳定状态。当取隶属度为 0.6 时, 边坡的安全系数可能在 1.4794~5.7877 之间变化, 将安全系

数 1.4794 代入式 (23), 此时边坡稳定性隶属度为 0.6498, 说明边坡有可能处于基本稳定状态, 但这种可能性较小。总的说来, 当隶属度大于等于 0.7 时, 稳定性隶属度均为 1.0, 故可以判断该边坡是稳定的。

5 结 论

通过对边坡刚体极限平衡分析中的模糊因素的分析, 提出了一种使用模糊集理论来计算工程边坡稳定性的新方法。这种方法的优点是可以考虑分析中所涉及到的计算力学参数的模糊性。文中还提出了基于试验资料和专家经验的模糊数隶属函数构造方法, 利用统计资料构造了边坡稳定性评价的隶属函数, 并提出了边坡稳定性评价的具体分类指标。实例研究表明本文提出的边坡稳定性分析方法提供了关于选择安全系数的一个更合理方法。

参考文献:

- [1] 冯夏庭. 智能岩石力学导论[M]. 北京: 科学出版社, 2000. 199-255.
- [2] 贺少辉, 李中林. 边坡工程模糊可靠度研究[J]. 南方冶金学院学报, 1994, 15(1): 1-9.
- [3] 汪益敏. 边坡岩体稳定质量的模糊评价[J]. 华南理工大学学报, 1997, 15(4): 110-115.
- [4] 李彰明. 模糊分析在边坡稳定性评价中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, 16(5): 90-95.
- [5] Habibagahi G, Meidani M. Reliability of slope stability analysis evaluated using fuzzy set approach[A]. Proc Of 5th Int Conf On Civil Eng[C]. Ferdowsi University, 2000. 29-36.
- [6] 李文秀. 岩石力学中的 Fuzzy 数学方法[J]. 力学学报, 1990, 22(3): 328-336.
- [7] 吕恩琳. 结构模糊有限元平衡方程的一种新解法[J]. 应用数学和力学, 1997, 18(4): 361-366.
- [8] Valliappan S, Pham T D. Fuzzy finite element analysis of a foundation on an elastic soil medium[J]. International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, 1993, (17): 771-789.
- [9] Teixeira EC. Uncertainty treatment of elastoplastic materials by the finite element method and fuzzy logic[D]. COPPE/Federal University of Rio de Janeiro, 1999.