

黄文熙讲座

岩土塑性力学的新进展——广义塑性力学

New development of geotechnical plastic mechanics—generalized plastic mechanics

郑颖人

(后勤工程学院 军事土木工程系, 重庆 400041)

摘要:多数岩土工程都处于弹塑性状态,因而岩土塑性在岩土工程的设计中至关重要。本文首先简要回顾了岩土塑性的发展过程,分析了经典塑性力学用于岩土类材料存在的问题,指出其采用的3个不符合岩土材料变形机制的假设。放弃这3条假设,从固体力学原理直接导出广义塑性位势理论,从而将经典塑性力学改造成更一般的塑性力学——广义塑性力学。广义塑性力学采用了塑性力学中的分量理论,能反映应力路径转折的影响,克服了塑性应变增量方向与应力增量无关的错误;要求屈服面与塑性势面对应,而不要求相等,避免了采用正交流动法则引起过大剪胀等不合理现象,也不会产生当前非关联流动法则中任意假定塑性势面引起的误差。文中给出了广义塑性力学的屈服面理论、硬化定律和应力—应变关系,并在应力增量分解的基础上,建立了考虑应力主轴旋转的广义塑性位势理论,从而可求出应力主轴旋转产生的塑性变形。通过分析屈服面的物理意义,表明屈服条件是状态参数,它与应力状态、应力历史及材性等状态量有关;同时也是试验参数,只能由试验给出。通过实际应用,表明广义塑性力学不仅可以作为岩土材料的建模理论,而且还可以应用于诸如极限分析等土力学的诸多领域,具有广阔的应用前景。

关键词:岩土塑性力学;广义塑性力学;塑性势;屈服面;本构模型

中图分类号: TU 41

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2003)01-0001-10

作者简介:郑颖人(1933-),男,后勤工程学院教授,博士生导师,中国工程院院士,从事隧道力学、岩土塑性力学、地下工程、边坡工程与区域性土研究,发表论文250篇,专著7部,获国家、部委级科技进步奖7项。

ZHENG Ying-ren

(Department of Military Civil Engineering, Logistical Engineering University, Chongqing 400041, China)

Abstract: Geotechnical plasticity plays an important role in the design of geotechnical engineering because most of them are in an elasto-plastic state. In this paper, the development of geotechnical plasticity is reviewed and some problems of applying the classic plastic mechanics to geomaterials are analyzed, and then its three hypotheses unfitting to the deformation mechanism of geomaterials are pointed out. By giving up these three hypotheses, a generalized plastic potential theory can be obtained from solid mechanics directly, and then the traditional plastic mechanics can be changed to a more generalized plastic mechanics, namely generalized plastic mechanics (GPM). The GPM adopts the component theory as theoretical base, so it can reflect the influence of transition of stress path, and eliminate the mistake that the direction of plastic strain increments is independent of the stress increment; it requires that the yield surface must correspond to but not coincide with the plastic potential surfaces, then the unreasonable phenomena such as excessive dilatancy caused by the normality of flow rule, and the error caused by the arbitrarily assumed plastic potential surfaces can be avoided. The yield surface theory, hardening rules and stress-strain relations of GPM are given. Based on the decomposition of stress increments, a GPM including the rotation of principal stress axes can be established, and the plastic deformation caused by the rotation of principal stress axes can also be calculated. It is pointed out that the yield condition is a state parameter, which is relevant to stress state and stress history as well as the properties of material. On the other hand, the yield condition is also a test parameter, and it can only be given by test. After the practical application, it is shown that the GPM can not only be applied to the modeling theory of geomaterials but also to other fields of geomechanics such as limit analysis.

Key words: geotechnical plastic mechanics; generalized plastic mechanics; plastic potential; yield surface; constitutive model

0 前言*

多数岩土工程都处于弹塑性状态,因而岩土塑性在岩土工程的设计中至关重要。早在1773年Coulomb就提出了土体破坏条件,其后推广为Mohr-Coulomb条件。1857年Rankine研究了半无限体的极限平衡,提出了滑移面概念。1903年Kotter建立了滑移线方法。Fellenius(1929)提出了极限平衡法。以后Terza-

ghi Sokolovskii又将其发展形成了较完善的岩土滑移线场方法与极限平衡法。1975年,W. F. Chen在极限分析法的基础上又发展了土的极限分析法,尤其是上限法。国内学者沈珠江也在上述领域作过不少工作。不过上述方法都是在采用正交流动法则的基础上进行的。滑移线法与极限分析法只研究力的平衡,未涉及



土体的变形与位移。上世纪 50 年代以后,人们致力于岩土本构模型的研究,力求获得岩土塑性的应力应变关系,再结合平衡方程与连续方程,从而求解岩土塑性问题。1957 年,Drucker 等人首先指出了平均应力与体应变会导致岩土材料的体积屈服,需在莫尔-库仑锥形空间屈服面上再加上一簇帽子屈服面。此后剑桥大学 Roscoe 等人提出了剑桥黏土的弹塑性本构模型,开创了岩土实用计算模型,一般认为剑桥模型的建立标志现代土力学的开端。自上世纪 60 年代至今岩土本构模型始终处于百家争鸣、百花齐放的阶段,没有统一的理论、屈服条件与计算方法。上世纪 70 年代就发现采用一个塑性势面和屈服面,很难使计算结果与实际吻合;采用正交流动法则既不符合岩土实际情况,还会产生过大的体胀。由此,双屈服面与多重屈服面模型^[1~3],非正交流动法则,在岩土本构模型中应运而生。但由于没有从塑性理论上搞清问题,澄清认识,导致 40 年来这种混乱状态延续至今。

真正的土力学必须建立在符合土本身特性的本构模型的基础上,而本构模型的建立必须有符合岩土材料变形机制的建模理论。岩土塑性力学是一门新兴学科,也是建立岩土本构模型的基础。目前的岩土塑性力学以不符合岩土材料变形机制的传统塑性位势理论为理论基础,从而导致上述的诸多混乱状态。新发展的广义塑性位势理论既适应岩土类摩擦材料,也适应金属,可以作为岩土塑性力学的理论基础^[1]。本文将针对岩土材料的变形特点,分析经典塑性力学用于岩土材料存在的问题,指出其采用的 3 个不符合岩土材料变形机制的假设。抛弃这些假设,从固体力学原理导出广义塑性位势理论,并对广义塑性力学的屈服面理论,硬化理论和应力-应变作系统的介绍。最后对广义塑性力学的实际应用与进一步的发展作了探讨。

1 经典塑性力学用于岩土材料存在的问题

1.1 岩土类材料的特点

岩土类材料是由颗粒材料堆积或胶结而成,属摩擦型材料。摩擦材料的特点是抗剪强度中含有摩擦力项,它的抗剪强度随压应力的增大而增大,因而岩土材料的屈服条件与金属材料明显不同。我们称此为岩土的压力硬化性,即随压应力的增大岩土抗剪强度与刚度增大。

岩土为多相材料,岩土颗粒间有孔隙,因而在各向等压作用下,岩土颗粒中的水、气排出,就能产生塑性体变,出现屈服。而金属材料在各向等压作用下是不会产生塑性体变的。一般称此为岩土的等压屈服特性。

由于岩土是摩擦材料,岩土体应变还与剪应力有关,即在剪应力的作用下岩土会产生塑性体变(剪胀或剪缩),一般称为岩土的剪胀性(含剪缩)。这在力学上表现为球张量与偏张量的交叉作用,即球应力会产生剪变(负值),这也是压硬性的一种表现;反之,剪应力会产生体变。显然,纯塑性金属材料是不具有这一特性的。

基于岩土是摩擦材料,因而必须采用摩擦型屈服条件,并考虑体变与剪胀性。现代岩土塑性力学必须反映这些特点,显示出岩土塑性的本色。

1.2 经典塑性力学用于岩土类材料出现的问题

岩土塑性力学脱胎于经典塑性力学,然而经典塑性力学只适应于金属材料,当用于岩土类摩擦材料时就会出现一些不符合实际的情况,理论计算结果与土工试验结果出现诸多矛盾^[2]。因而,岩土塑性力学既要吸收经典塑性力学中采用的基本解题方法,又需要对经典塑性力学进行必要的改造,使之适应岩土材料的变形机制。大量的土工试验表明,岩土类材料具有如下几点变形机制,正在成为岩土工程界的共识:

(1) 按照经典塑性力学中的传统塑性势理论,塑性应变增量的方向唯一地取决于应力状态,而与应力增量无关。Balashablamaniam、Anandarajah^[4]、沈珠江^[5]等人通过试验证实,岩土塑性应变增量的方向不仅与应力有关,还与应力增量密切相关,如图 1 所示。表明岩土材料不具有塑性应变增量方向与应力惟一性假设,亦即不遵守传统塑性势理论。岩土材料塑性应变增量的方向不仅取决于应力状态,而主要取决于应力增量。

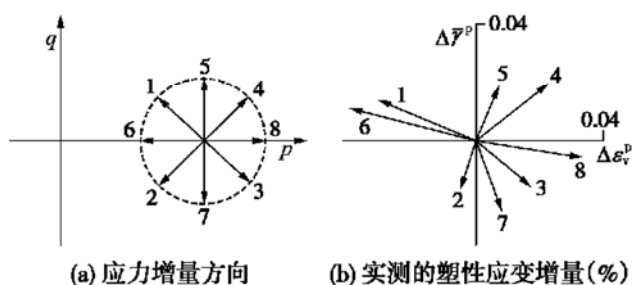


图 1 应力增量方向对岩土塑性应变增量方向的影响

Fig. 1 Relationship between directions of stress increments and plastic strain increments

(2) Poorooshasb^[6]、Frydman、Lade 等人所做的试验证实,岩土类材料不遵守关联流动法则和德鲁克公设。

(3) 基于传统塑性位势理论的单屈服面模型,当采用莫尔-库仑一类剪切屈服面作屈服面时,如果采用关联流动法则,将会导致出现远大于实际的剪胀变形。

(4) Matsouka 等人的试验证实^[7],尽管主应力的方向大小相同,但如果应力主轴发生旋转,即主应力轴方向变化也会产生塑性变形。而按经典塑性力学却是算不出这种变形的,表明经典塑性力学没有考虑应力主轴旋

转而难以适应实际岩土工程。

显然,上述岩土变形机制与经典塑性力学相矛盾,这就诱发人们追思,经典塑性力学究竟存在哪些假设条件,为何不符合岩土变形机制。

传统塑性位势理论是经典塑性力学的核心,为

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1)$$

式中 $d\epsilon_{ij}^p$ 为塑性应变增量; Q 为塑性势函数; $d\lambda$ 为一非负的比例系数。式(1)表明, $d\epsilon_{ij}^p$ 的方向始终与塑性势面正交。应用关联流动法则,屈服面就是塑性势面,因而塑性应变增量方向也与屈服面正交,由此得出塑性应变增量方向只与应力状态有关,而与应力增量无关的结论。根据式(1),对三个主方向必有

$$d\epsilon_1^p : d\epsilon_2^p : d\epsilon_3^p = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_1} : \frac{\partial Q}{\partial \sigma_2} : \frac{\partial Q}{\partial \sigma_3} \quad (2)$$

式(2)是传统塑性位势理论的基本特征,即各塑性应变增量分量存在比例关系。由此还可推证塑性主应变增量与主应力增量的关系为

$$d\epsilon_i^p = [A_p]_{3 \times 3} d\sigma_i \quad (3)$$

式中塑性矩阵 $[A_p]$ 的元素 $a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} (i = 1, 2, 3)$ 必存在如下关系:

$$a_{1i} : a_{2i} : a_{3i} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_1} : \frac{\partial Q}{\partial \sigma_2} : \frac{\partial Q}{\partial \sigma_3} \quad (4)$$

式(2)和式(4)表明,各塑性主应变增量或 $[A_p]$ 中的各行元素成比例。这也说明只需要一个势函数就可求出三个塑性主应变或 $[A_p]$, 这正是传统塑性位势理论的特点。同时,由于塑性应变增量分量互成比例,因而塑性应变增量方向不随塑性应变增量分量大小而变,导致传统塑性位势理论与岩土材料变形机制的矛盾。

其次,无论在德鲁克公设提出之后还是之前,经典塑性力学一直沿用关联流动法则,即塑性势函数与屈服函数相同。实际土工试验表明,岩土材料不服从关联流动法则。下面考虑图2中的一个简单摩擦系统,也能一定程度上说明岩土类材料不符合正交流动法则^[8]。图2中 Q 是位移矢量的方向,而 OC 相当于子午平面上的屈服面,所以位移矢量与屈服面并不正交,表明德鲁克公设不适用于岩土类材料。

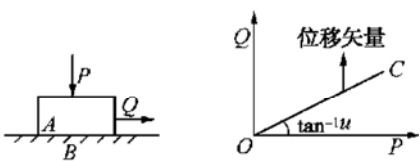


图2 岩土材料不适用正交流动法则示意图

Fig. 2 Normality of flow rule is not applicable to geomaterials

德鲁克公设一直是关联流动法则的理论支柱,但自从岩土类材料不适应德鲁克公设被证实以后,各国

学者对其适用性作了不少评述。笔者认为,德鲁克公设本来是作为弹塑性稳定材料的定义提出来的,但并非普遍的客观规律,因此不是所有客观材料的力学行为都必须满足此公设所导出的结论^[9],而是由材料的客观力学行为来判定它是否适用。大量的实践表明,金属材料适应德鲁克公设,而岩土材料不适应此公设。

再次,在经典塑性力学中,将屈服函数写成三个主应力或三个应力张量不变量的函数,这就忽略了应力增量中三个剪应力增量 $d\tau_{ij}$ 所引起的塑性变形。即经典塑性力学中不考虑应力主轴的旋转,假设应力主轴与应力增量主轴始终共轴,只有主应力增量 $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$, 而 $d\tau_{12} = d\tau_{23} = d\tau_{13} = 0$ 。实际岩土工程中,应力主轴会发生旋转,即存在主轴旋转的应力增量分量 $d\tau_{ij}$, 并由此产生相应的塑性变形。显然,不考虑应力主轴旋转也是经典塑性力学的一个假设,所以经典塑性力学无法算出应力主轴旋转产生的塑性变形。

1.3 经典塑性力学特有的三条假设

经典塑性力学属于连续介质力学范畴,一般具有各向同性、均质、连续、小变形等基本假设。此外,由上述可知,经典塑性力学还具有下面三条特有的假设:

(1) 假设应力空间中只存在一个满足式(1)的塑性势函数,导致塑性应变增量分量互成比例;塑性应变增量的方向只与应力有关,而与应力增量无关。

(2) 假设应力与应力增量主轴共轴,不考虑应力主轴旋转。

(3) 材料服从关联流动法则。

由于经典塑性力学存在上述假设,因而不适应岩土材料的变形机制。采用经典塑性力学不能反映塑性应变增量方向与应力增量的相关性,也不能合理反映岩土体的剪胀与体缩,而出现过大体胀的不合理现象。同时,也无法计入由于应力主轴旋转所产生的塑性变形。显然,消除上述假设,就可能将经典塑性力学改造成更一般的塑性力学。为区别经典塑性力学,我们称它为广义塑性力学^[10-13],它既符合岩土类材料的变形机制,也能适应金属材料的变形机制。

2 不计应力主轴旋转的广义塑性位势理论

广义塑性力学放弃上述三条假设,从固体力学原理直接导出广义塑性位势理论,不再作上述人为的假设。杨光华(1991)在不计应力主轴旋转情况下(此时应力主轴、应力增量主轴及塑性应变增量主轴都共轴),引入张量定律,从理论上导出了广义塑性位势理论^[14]。应力和应变都是二阶张量,按张量定律可求得

$$d\epsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^3 d\lambda_k \frac{\partial Q_k}{\partial \sigma_{ij}} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (5)$$

我们把式(5)称为不计应力主轴旋转的广义塑性位势理论, 它与传统塑性位势理论有如下区别:

(1) 广义塑性位势理论有三个塑性势面, 且三个塑性势面必须线性无关; 而传统塑性位势理论只有一个塑性势面。

(2) 广义塑性位势理论中, 塑性应变增量方向由三个塑性应变增量分量来定, 而三个分量既与塑性势面有关, 又与屈服面及应力增量有关。传统塑性位势理论是其特例, 此时塑性应变增量分量成比例, 因而可采用一个塑性势函数, 塑性应变增量方向由此势函数惟一确定, 而与应力增量无关。由此表明, 传统塑性力学中可事先确定塑性应变增量总量的势面。而广义塑性力学中, 因塑性应变增量总量方向与应力增量有关, 无法事先确定塑性应变增量总量方向(即势面)。但可事先确定塑性应变增量的三个分量方向, 亦即知道三个分量的势面。

(3) 三个塑性因子 $d\lambda_k$ ($k = 1, 2, 3$) 不要求都大于或等于零。 $d\lambda_k$ 与屈服面有关, 当屈服面与塑性势面同向, $d\lambda_k > 0$; 屈服面与塑性势面反向, 则 $d\lambda_k < 0$ 。岩土材料的体积屈服面既可与塑性势面同向(体缩), 也可与塑性势面反向(体胀)。而传统塑性力学中只有一个塑性势面, 因而 $d\lambda$ 一定大于零或等于零。

式(5)中三个塑性势函数是可任选的, 但必须保持线性无关, 最符合这一条件并应用最方便的, 是选用主应力空间中的三个坐标轴作塑性势函数, 如选 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 或 p, q, θ_0 不变量为势函数。这种情况下构造屈服面也最为方便。这说明势函数可采用任何一种形式的三个张量不变量。

当取 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的等值面为三个塑性势函数时, 即有 $Q_1 = \sigma_1, Q_2 = \sigma_2, Q_3 = \sigma_3$, 则式(5)变为

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_3 \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (6)$$

式中 $d\lambda, d\lambda_2, d\lambda_3$ 分别为相应上述三个势面的塑性因子, 将 $\sigma_1 = Q_1, \sigma_2 = Q_2, \sigma_3 = Q_3$ 代入式(6)或按其物理意义均能得到 $d\lambda = d\epsilon_1^p, d\lambda_2 = d\epsilon_2^p, d\lambda_3 = d\epsilon_3^p$, 可见 $d\lambda_k$ 具有明确的物理意义。

如果取 p, q, θ_0 为塑性势函数, 有

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_3 q \frac{\partial \theta_0}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (7)$$

同理有 $d\lambda = d\epsilon_1^p, d\lambda_2 = d\bar{\epsilon}_q^p, d\lambda_3 = d\bar{\epsilon}_{\theta_0}^p$, 其中 $d\epsilon_1^p, d\bar{\epsilon}_q^p, d\bar{\epsilon}_{\theta_0}^p$ 分别为塑性体应变增量, q 方向与 θ_0 方向的塑性剪应变增量(图3)。

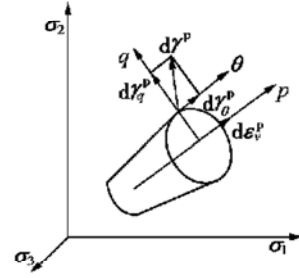


图3 塑性应变增量的方向

Fig. 3 Directions of plastic strain increment

塑性应变增量可分解为塑性体应变增量与塑性剪应变增量

$$d\epsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^3 d\lambda_k \frac{\partial Q_k}{\partial p} = d\lambda, \quad (8)$$

$$d\bar{\epsilon}^p = \sum_{k=1}^3 \left| d\lambda_k \frac{\partial Q_k}{\partial q} \right|^2 + \left| d\lambda_k \frac{1}{q} \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_0} \right|^2 \right|^{1/2}. \quad (9)$$

塑性剪应变可分为 q 方向上的塑性剪应变增量 $d\bar{\epsilon}_q^p$, θ_0 方向上的塑性剪应变增量 $d\bar{\epsilon}_{\theta_0}^p$

$$\begin{aligned} d\bar{\epsilon}_q^p &= \sum_{k=1}^3 d\lambda_k \frac{\partial Q_k}{\partial q} = d\lambda_2, \\ d\bar{\epsilon}_{\theta_0}^p &= \sum_{k=1}^3 d\lambda_k \frac{1}{q} \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_0} = d\lambda_3, \\ d\bar{\epsilon}^p &= [(d\bar{\epsilon}_q^p)^2 + (d\bar{\epsilon}_{\theta_0}^p)^2]^{1/2} = [(d\lambda_2)^2 + (d\lambda_3)^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (10)$$

从实际情况来看, 无论是岩土或金属材料, $d\bar{\epsilon}_{\theta_0}^p$ 一般不大, 可认为 $d\bar{\epsilon}_{\theta_0}^p = 0$ 。如果再假定在 $d\bar{\epsilon}_q^p$ 中忽略 θ_0 的影响, 就相当于忽略了洛德角的影响, 即有

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} = d\epsilon_1^p \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + d\bar{\epsilon}_q^p \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (11)$$

这就是国内常用的“南水”双屈服面模型^[15]。

对于金属材料, $d\epsilon_1^p = 0$, 因而式(11)变为单屈服面模型, 即有 $Q = Q_2 = q$, 此时, 在子午平面上塑性应变增量方向在 q 方向上。

3 塑性势面与屈服面的关系

塑性力学中, 塑性势面主要用来确定塑性应变增量的方向。经典塑性力学中, 塑性应变增量的方向可由一个塑性势面惟一确定; 广义塑性力学中, 塑性应变增量的方向无法事先知道, 因为它不仅与应力状态有关, 还与应力增量有关。但它可用3个分量塑性势面来确定3个塑性应变增量分量的方向。可见经典塑性力学中采用总量势面, 而广义塑性力学必须采用分量势面, 这正是两者的区别, 广义塑性力学采用了塑性力学中的分量理论。

屈服面主要用来确定塑性应变增量的大小。经典塑性力学中确定塑性因子 $d\lambda$, 广义塑性力学中确定3

个塑性因子 $d\lambda$, 亦即需要有 3 个与塑性势面相应的分量屈服面来确定 $d\lambda$ 。

塑性应变增量矢量的方向由塑性势面确定, 而大小按其相应的屈服面确定。这就表明塑性势面与屈服面必须相关, 但相关只要求两者必须相应, 不要求必须相等。例如求塑性应变增量分量 $d\epsilon_v^p$ (塑性体应变), 其塑性势面的法线方向必为 $d\epsilon_v^p$ 方向 (即应力 p 方向); 与此相应的屈服面的硬化参量必为 $d\epsilon_v^p$, 屈服面必为 $f_v(\alpha_v, \epsilon_v^p)$ 。按屈服面的定义, 它就是 ϵ_v^p 的等值面, 即 p 方向上的分量屈服面称为体积屈服面。同理, 相应 q 方向上塑性势面的屈服面为 q 方向的剪切屈服面 $f_q(\alpha_q, \bar{\gamma}_q^p)$; 相应 θ_0 方向上塑性势面的屈服面为 θ_0 方向的剪切屈服面 $f_{\theta_0}(\alpha_{\theta_0}, \bar{\gamma}_{\theta_0}^p)$ 。可见, 塑性势一旦确定, 其相应的硬化参量与屈服条件也就确定, 它们就有一一对应的关系。对于金属材料, 塑性势面与屈服面不仅相应, 而且相等, 这是一种特例。

屈服面一般应由试验确定。在等向硬化模型情况下, 体积屈服面、 q 方向剪切屈服面与 θ_0 方向剪切屈服面可表达为如下形式

$$\left. \begin{aligned} H_v(\epsilon_v^p) &= f_v(\alpha_v) = f_v(p, q, \theta_0), \\ H_q(\bar{\gamma}_q^p) &= f_q(\alpha_q) = f_q(p, q, \theta_0), \\ H_{\theta_0}(\bar{\gamma}_{\theta_0}^p) &= f_{\theta_0}(\alpha_{\theta_0}) = f_{\theta_0}(p, q, \theta_0). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

微分式(12), 可得

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_v^p &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial f_v}{\partial p} dp + \frac{1}{A_1} \frac{\partial f_v}{\partial q} dq + \frac{1}{A_1} \frac{\partial f_v}{\partial \theta_0} d\theta_0 = d\lambda, \\ d\bar{\gamma}_q^p &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial f_q}{\partial p} dp + \frac{1}{A_2} \frac{\partial f_q}{\partial q} dq + \frac{1}{A_2} \frac{\partial f_q}{\partial \theta_0} d\theta_0 = d\lambda, \\ d\bar{\gamma}_{\theta_0}^p &= \frac{1}{A_3} \frac{\partial f_{\theta_0}}{\partial p} dp + \frac{1}{A_3} \frac{\partial f_{\theta_0}}{\partial q} dq + \frac{1}{A_3} \frac{\partial f_{\theta_0}}{\partial \theta_0} d\theta_0 = d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中 $A_1 = \partial H_v / \partial \epsilon_v^p$, $A_2 = \partial H_q / \partial \bar{\gamma}_q^p$, $A_3 = \partial H_{\theta_0} / \partial \bar{\gamma}_{\theta_0}^p$ 。

由上看出, 塑性势面与屈服面存在如下关系:

(1) 塑性势面可以任取, 但必须保证各势面间线性无关, 屈服面则不可任取, 它必须与塑性势面对应, 并有明确的物理意义。例如取 α_1 为势面, 则对应的屈服面必为塑性主应变 ϵ_1^p 的等值面。可见, 屈服面必然与塑性势面相关联, 但关联并不意味着塑性势面与屈服面相同, 而是必须保持屈服面与塑性势面对应。在特殊情况下亦可相同, 如服从米赛斯屈服条件的金属材料, 屈服面与塑性势面同为圆筒形。

(2) 取 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 或 p, q, θ_0 为塑性势面, 相应的屈服面最简单, 并具有明确的物理意义, 即为三个塑性主应变的等值面或为塑性体应变、 q 方向塑性剪切应变与 θ_0 方向塑性剪应变的等值面。

(3) 由于三个塑性势面线性无关, 则相应的三个屈服面也必然互相独立。例如体积屈服面与 q 方向上及 θ_0 方向上的剪切屈服面都各自独立。这表明体积屈服面只能用来计算塑性体积变形, 而与塑性剪切变形无关, 反之亦然。因而广义塑性力学中不能应用关联流动法则, 否则就违反了剪切屈服面与体积屈服面原有的含义。

(4) 通常所说的剪胀, 即指剪应力 dq , $d\theta_0$ 所引起的体胀, 亦即式(13)中第一式中间的第 2 项与第 3 项。

(5) 对于采用米赛斯屈服条件的金属材料, 式(13)中只保留 $(\partial f_q / \partial q) \cdot dq$ 一项, 其余各项均为零。

4 岩土材料的加载条件(屈服条件)

广义塑性力学中, 相应 3 个塑性势函数有 3 个屈服条件, 即体积屈服条件 q 及 θ_0 方向的剪切屈服条件。

4.1 体积屈服面

以 ϵ_v^p 为硬化参量的屈服面称为体积屈服面, 即 ϵ_v^p 的等值面。笔者按土性及其状态不同, 将体积屈服面分为压缩型、硬化压缩剪胀型与软化压缩剪胀型三类。

(1) 压缩型体积屈服面

松砂、正常固结土等土体, 受力后土体体积压缩。其体积屈服面常用的是椭圆型曲线(如图 4 所示), 这就是常用的修正剑桥模型。其表达式为

$$p \left[1 + \frac{1}{2} \eta M^2 \right] = p_c. \quad (14)$$

式中 $\eta = q/p$; M 为极限状态线的斜率; p_c 为加载面与 p 轴的右交点。

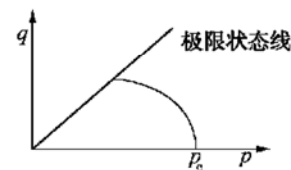


图 4 压缩型体积屈服面

Fig. 4 Volumetric yield surface of compressive type

(2) 硬化压缩剪胀型体积屈服面

中密砂、弱超固结土等土体, 应力应变曲线处于应变硬化状态, 土体体变先压缩后剪胀。这类屈服面一般应用不多, 近年来国内外都有所进展。段建立、郑颖人通过对中密砂的试验^[10], 并按屈服面的定义, 由试验拟合得出 S 形的屈服曲线(图 5)。图 5 中有条来自试验的状态变化线, 在状态变化线下方为体积压缩, 其体积屈服条件一般为类似剑桥模型的椭圆形屈服曲线; 在状态变化线上方只产生体胀, 由试验获得的屈服条件近似为一条直线。由此得出屈服曲线为两段屈服曲线组成的 S 形屈服曲线。在低剪应力状态下产生体缩, 高剪应力状态下产生体胀, 两段屈服曲线具有相反的法线方向。

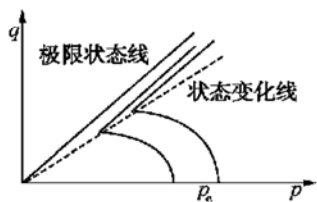


图5 中密砂三轴不排水试验所得的体积屈服曲线
(硬化压缩剪胀型)

Fig. 5 Volumetric yield surface of hardening compressive dilative type

(3) 软化压缩剪胀型体积屈服面

密砂、超固结土、岩石等岩土体, 应力应变曲线先处于应变硬化状态, 后处于应变软化状态, 其体变也是先压缩后剪胀。这类岩土体的体积屈服面目前研究不多, Hvorslev 面可认为是软化压缩剪胀型体积屈服面(见图6)。由图可见, 图上人为地把极限状态线与状态变化线合为一条, 而实际试验是两条曲线, 这是其不足之处。

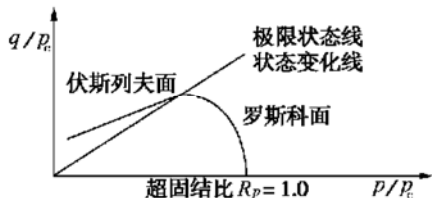


图6 软化压缩剪胀型体积屈服面

Fig. 6 Volumetric yield surface of softening compressive dilative type

4.2 剪切屈服面

剪切屈服面是以 $\bar{v}^p$ 为硬化参量的屈服面, 也就是等 $\bar{v}^p$ 的一簇空间曲面。剪切屈服面的表达式一般可写成二次曲线

$$\Phi_i(p, q, \theta_0, \bar{v}^p) = \beta \bar{v}^{p^2} + \alpha_1 p + \bar{\alpha}_+^n - k. \quad (15)$$

式中 β, α_1, k 为与 $\bar{v}^p$ 有关的系数; $n = 2$ 或 1 ; $\bar{\alpha}_+ = \sqrt{J_2}/g(\theta_0)$; $g(\theta_0)$ 为偏平面上 q 的形状函数。

从试验结果看, 多数岩土体的剪切屈服曲线在子午平面上是双曲线或抛物线。当加载面 Φ_i 发展到与 $\bar{v}^p$ 无关时, 加载面就成为破坏面 F_v , 式(15)中的系数与 $\bar{v}^p$ 无关。文献[1]给出了 14 种常用的破坏准则, 给出了相应的 β, α_1, k 及 $g(\theta_0)$ 。

4.3 θ_0 方向与 q 方向的剪切屈服面

θ_0 方向的剪切屈服面以 $\bar{v}_0^p$ 为硬化参量, 它用来求 θ_0 方向的塑性应变增量 $d\bar{v}_0^p$ 。由于以往岩土塑性力学中通常略去 θ_0 方向的塑性变形, 所以极少有人来研究 θ_0 方向的剪切屈服面。直接通过试验拟合 θ_0 方向的剪切屈服面有一定困难, 但可通过真三轴试验得出塑性应变增量在 θ_0 方向的偏离程度, 由此求得 $d\bar{v}_0^p$ 与 $d\bar{v}^p$ 的关系, 亦即求得剪切屈服面 F_v 与 θ_0 方向剪切屈服面的关系, 由此求得 F_0 。

陈瑜瑶、郑颖人^[17]通过对重庆红黏土的真三轴试

验指出, 应力水平低时塑性应变增量方向与应力增量方向不发生偏离, 如同弹性情况一样; 但应力水平高时, 两者出现偏离(图7), 但偏离不大。这一试验结果与国外的一些试验结果^[18]及国内李广信的试验结果^[19]基本一致, 表明土体在 θ_0 方向存在塑性应力增量 $d\bar{v}_0^p$ 。由此可近似认为偏离角是常量, 即 q 方向的塑性剪应变与 θ_0 方向的塑性剪应变近似成比例, 即:

$$d\bar{v}_0^p = \tan \alpha \cdot d\bar{v}_q^p = \sin \alpha \cdot d\bar{v}^p, \quad (16)$$

式中 α 为偏离角。

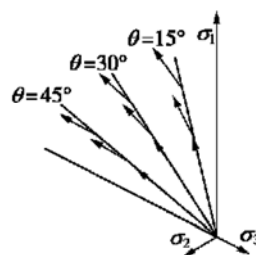


图7 试验所得应力增量与塑性应变增量的偏离状况

Fig. 7 Directions of plastic strain increments in π plane

上式意味着 Φ_i, Φ_q, Φ_0 都成比例, 由此可得

$$\Phi_0 = \sin \alpha \cdot \Phi_i = \tan \alpha \cdot \Phi_q, \quad (17)$$

$$\Phi_q = \cos \alpha \cdot \Phi_i, \quad (18)$$

由式(17), (18)可得 θ_0 方向与 q 方向的剪切屈服面。

在实际计算中, 还有一种常用的近似方法, 即把 α 角视为零, 亦即略去 θ_0 方向的塑性应变增量, 而增大 q 方向的塑性应变增量, 使 $d\bar{v}_q^p = d\bar{v}^p$ 。这是一种等代的方法, 即采用 $\Phi_q = \Phi_i, \Phi_0 = 0$, 从而使计算简化, 目前采用的双屈服面就属这种情况。

5 广义塑性力学中的硬化定律

在传统塑性力学中, $d\lambda$ 与硬化参量的函数有关, 即

$$d\lambda = \frac{1}{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_q} d\alpha_q, \quad (19)$$

式中 A 称为硬化函数或硬化模量, 它与硬化参量有关。建立硬化模量 A 的表达式称为硬化定律, 应用何种硬化参量来建立硬化定律, 就称为某种硬化参量的硬化定律。在等向强化情况下, 引用相容性条件或一致性条件, 可得

$$A = - \frac{\partial \Phi}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \epsilon_p^p} \frac{\partial Q}{\partial \alpha_q}. \quad (20)$$

研究硬化定律, 首先应当正确选择硬化参量, 它应当表征材料的硬化程度, 充分反映材料硬化的历史。金属材料不产生体积应变, 因而可选用塑性剪应变 γ^p , 塑性总应变 ϵ^p 或塑性功 W^p 作硬化参量。广义塑性力学采用分量塑性势面与分量屈服面, 各屈服面都有各自的硬化参量, 它们都可以各自表征各分量的硬

化历史。因而体积屈服面, 剪切屈服面, q 方向与 θ_0 方向剪切屈服面都应采用各自硬化参量的硬化定律。

(1) ε_v^p 硬化定律

设 $H = H(\varepsilon_v^p)$ 或 $H = \varepsilon_v^p$, 则有

$$A = - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial \varepsilon_v^p}{\partial \sigma} \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_v^p} \delta_{ij} \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial Q}{\partial p}, \quad (21)$$

其矩阵形式为

$$A = - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_v^p} \{ \delta \}^T \frac{\partial Q}{\partial \sigma}. \quad (22)$$

式中 $\{ \delta \}^T = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$; 广义塑性力学中, 如 $\Phi = -\varepsilon_v^p$, $Q = p$, 则 $A = 1$; 如 $\Phi = -H(\varepsilon_v^p)$, $Q = p$, 则 $A = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_v^p}$ 。

(2) $\bar{\gamma}_q^p$ 硬化定律

设 $H = H(\bar{\gamma}_q^p)$ 或 $H = \bar{\gamma}_q^p$, 则有

$$A = - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\gamma}_q^p} \frac{\partial Q}{\partial q}, \quad (23)$$

广义塑性力学中, 如 $\Phi = -\bar{\gamma}_q^p$, $Q = q$, 则 $A = 1$; 如 $\Phi = -H(\bar{\gamma}_q^p)$, $Q = q$, 则 $A = \frac{\partial H}{\partial \bar{\gamma}_q^p}$ 。

(3) $\bar{\gamma}_\theta^p$ 硬化定律

同理, 设 $H = H(\bar{\gamma}_\theta^p)$, 或 $H = \bar{\gamma}_\theta^p$, 则有 $A = - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\gamma}_\theta^p} \frac{\partial Q}{\partial \theta_0}$ 。广义塑性力学中, 如 $\Phi = -\bar{\gamma}_\theta^p$, $Q = \theta_0$, 则 $A = 1$;

如 $\Phi = -H(\bar{\gamma}_\theta^p)$, $Q = \theta_0$, 则 $A = \frac{\partial H}{\partial \bar{\gamma}_\theta^p}$ 。

(4) ε_i^p 硬化定律

同理, 广义塑性力学中, 如 $\Phi = -\varepsilon_i^p$, $Q = \sigma_i$, 则 $A = 1$; 如 $\Phi = -H(\varepsilon_i^p)$, $Q = \sigma_i$, 则 $A = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_i^p}$ 。

6 广义塑性力学的应力—应变关系

广义塑性力学中的应力—应变关系, 通常可先求出弹塑性柔度矩阵 $[C_{ep}]$, 然后求逆得到弹塑性刚度矩阵 $[D_{ep}]$ 。采用等值面硬化规律也可直接导出 $[D_{ep}]$ 的一般表达式, 推导详见文献[12]。广义塑性力学中, 应力—应变关系为

$$\{d\sigma\} = \left[[D] - [D] \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right]_{6 \times 3} \left[\alpha_{kl} \right]_{3 \times 3}^{-1} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right]_{3 \times 6}^T [D] \{d\varepsilon\}. \quad (24)$$

式中 $\left[\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right]_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial \sigma} & \frac{\partial Q_2}{\partial \sigma} & \frac{\partial Q_3}{\partial \sigma} \end{bmatrix}$; $\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right]_{3 \times 6}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \sigma} \end{bmatrix}^T$; $[\alpha_{kl}]_{3 \times 3}$ 矩阵中元素 $\alpha_{kl} =$

$$\left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial \sigma} \right]^T [D] \left[\frac{\partial Q_l}{\partial \sigma} \right] + \delta_{kl} A_k, \text{ 其中 } \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k=l \\ 0 & k \neq l \end{cases}, A_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial \varepsilon_k^p} \left[\frac{\partial H_k}{\partial \varepsilon_k^p} \right]^T \left[\frac{\partial Q_k}{\partial \sigma} \right] \quad (k=1, 2, 3). \text{ 即有}$$

$$[D_{ep}] = [D] - [D] \left[\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right]_{6 \times 3} [\alpha_{kl}]_{3 \times 3}^{-1} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right]_{3 \times 6}^T [D]. \quad (25)$$

单屈服面情况下, 式(25)即变化为传统塑性力学中的弹塑性矩阵表达式。这也说明传统塑性力学是广义塑性力学的一个特例。

7 考虑应力主轴旋转的广义塑性位势理论^[20, 21]

适用岩石的广义塑性力学应考虑应力主轴的旋转, 即考虑剪切应力分量 $d\tau_{ij}$ 引起的应力主轴旋转。为此, 文献[20]导出 $d\tau_{ij}$ 与应力主轴旋转角增量 $d\theta_i$ 的关系式

$$d\tau_{ij} = d\theta_i (\sigma_i - \sigma_j), \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j). \quad (26)$$

同时把应力增量分解为与应力主轴共轴部分 $d\sigma_c$ 和使应力主轴旋转的部分 $d\sigma_r$, 分解式为

$$\begin{aligned} d\sigma &= d\sigma_c + d\sigma_r = d\sigma_c + d\sigma_{r1} + d\sigma_{r2} + d\sigma_{r3} \\ &= T \begin{bmatrix} d\sigma_1 & d\theta_1(\sigma_1 - \sigma_2) & d\theta_1(\sigma_1 - \sigma_3) \\ d\theta_1(\sigma_1 - \sigma_2) & d\sigma_2 & d\theta_2(\sigma_2 - \sigma_3) \\ d\theta_1(\sigma_1 - \sigma_3) & d\theta_2(\sigma_2 - \sigma_3) & d\sigma_3 \end{bmatrix} T^T. \end{aligned} \quad (27)$$

式中 $d\theta_1, d\theta_2, d\theta_3$ 分别表示旋转应力增量 $d\sigma_{r1}, d\sigma_{r2}, d\sigma_{r3}$ 引起的绕第三、一、二主应力轴旋转的旋转角增量; T 为变换矩阵, 即

$$[T] = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & 2l_1l_2 & 2l_2l_3 & 2l_3l_1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & 2m_1m_2 & 2m_2m_3 & 2m_3m_1 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 & 2n_1n_2 & 2n_2n_3 & 2n_3n_1 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

式中的矩阵元素分别为三主应力轴方向余弦的组合。

包含应力主轴旋转在内的广义塑性位势也可分解为两部分。共轴部分的塑性势公式, 与未考虑应力主轴旋转的情况相同。旋转部分需用 6 个势函数(一般取应力分量作势函数), 则位势理论可写成

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_{ijc}^p + d\varepsilon_{ijr}^p = \sum_{k=1}^3 d\lambda_k \frac{\partial Q_k}{\partial \sigma_{ij}} + \sum_{kr=1}^6 d\lambda_{kr} \frac{\partial Q_{kr}}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (29)$$

式中 $d\varepsilon_{ijc}^p$ 为共轴应力增量 $d\sigma_c$ 引起的塑性应变增量; $d\varepsilon_{ijr}^p$ 为旋转应力增量 $d\sigma_r$ 引起的塑性应变增量; $d\lambda_{kr}$ 为与应力主轴旋转相关的 6 个塑性系数, 可采用试验数据拟合的方法得到, 但这方面的研究目前还不成熟。

表 1 不同力学状态下的应力—应变关系及其参数的影响因素

Table 1 Stress-strain relation and influencing factors of parameter under various mechanical states

力学状态	应力—应变关系	力学参数	参数的影响因素
线弹性	单轴情况下: $\varepsilon_i = (1/E) \sigma_i$	E (弹性模量)	材性
非线性弹性	单轴情况下: $\varepsilon_i = (1/E_i) \sigma_i$	E_i (切线弹性模量)	材性与应力状态
经典塑性	$d\varepsilon_y^p = \frac{1}{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_y} d\sigma_y$; $A = -\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_y^p}$	Φ (加载面)	材性、应力状态 与应力历史
广义塑性	分量应力—应变关系: $d\varepsilon_y^p = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{A_k} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_y} d\sigma_y$; $A_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial \varepsilon_y^p}$ ($k=1, 2, 3$)	Φ_k (分量加载面)	材性、应力状态 与应力历史

8 岩土屈服条件的确定

力学的解题方法,首先是依据符合实际情况的假设,按照力学的一般原理形成力学理论,给出计算公式;其次依据试验获得计算所需的参数。在线弹性情况下,计算参数就是弹模与泊松比;而在塑性情况下,需要给出其屈服条件及其参数。岩土材料极其复杂,不同的土性常有不同的屈服条件。而目前岩土屈服条件的确定,多数是依据建模者的经验,屈服条件中的参数也只有部分依据试验获得。由于建模者的经验不同,提出了五花八门的本构模型,导致计算结果的不惟一性。

首先来分析屈服条件的物理意义。弹性力学基本方程与塑性力学基本方程的差别在于应力—应变关系。给出这一关系的目的,在于已知应力或应力增量的方向与大小的情况下获得应变或应变增量的方向与大小。表 1 中列出了不同力学状态下的应力—应变关系及其参数的影响因素,由此进一步明确屈服条件在塑性力学中的物理意义。

图 8 图示出了线弹性、非线性弹性、经典塑性与广义塑性的应力—应变曲线。线弹性情况下是条直线,非线性弹性情况下是条曲线,由此即可确定 E 与 E_i ;经典塑性情况下是一组曲线,广义塑性情况下是几组曲线,需要按屈服面定义将试验曲线转换为屈服曲线。

由表 1 可看出,无论是弹性还是塑性,弹性参数与屈服条件都是材料的状态参数,这就是屈服条件的物理含义。由图 8 可见,弹性参数与屈服条件都应由试验确定,尽量减少确定屈服条件的随意性。尤其是各地岩土的性质差异很大,只有用当地土获得屈服条件,才能提高计算的准确度。而且,目前土的常规三轴试验已经十分普遍,经济上也是合算的。文献[17]中给出了如何通过试验资料建立屈服面的思路,并以重庆红黏土与福建标准砂的试验结果为依据,拟合出了相应的体积屈服面与剪切屈服面。

9 广义塑性力学的实际应用

9.1 岩土建模方面

以广义塑性力学为理论基础,建立符合土体实际

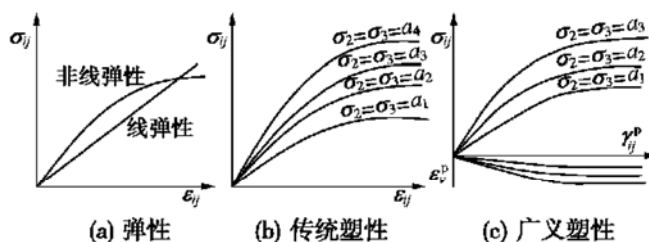


图 8 线弹性、非线性弹性、传统弹塑性、广义弹塑性应力—应变关系

Fig. 8 Linear elastic, non linear elastic, classic plastic and generalized plastic stress-strain curves

变形特性的本构模型是广义塑性力学最主要的应用之一。文献[22]以广义塑性力学为建模理论,建立了一个能考虑应力洛德角影响的土体的三屈服面模型;文献[23]建立了一个基于广义塑性力学的硬化剪胀土模型;文献[17]以试验结果为依据,拟合出了重庆红黏土与福建标准砂的体积屈服面和剪切屈服面;文献[24]通过试验拟合,求得 3 个塑性主应变等值面为屈服面。

按广义塑性力学,分别建立 3 个分量塑性势面与相应的 3 个屈服面,构成了土体本构模型。如果略去洛德角方向的塑性应变增量分量,就将上述 3 屈服面模型简化为双屈服面模型。若进一步略去塑性体应变,就可简化为单屈服面模型。为了便于分析不同屈服面对土体变形的影响程度,表 2 给出了几种基于广义塑性力学的土体模型的计算结果。表 2 中屈服函数的具体表达式以及算例的详细情况参见文献[9]和[22]。

从表 2 可见,在均布荷载作用下地基表面处的沉降变形: q 方向上剪切变形引起的沉降占总沉降中的 64.5%; θ_0 方向上剪切变形引起的沉降占总沉降的 16.1%; 总剪切变形引起的沉降占总沉降的 80.6%; 体积变形引起的沉降占总沉降的 19.4%。采用剪切单屈服面模型时,变形计算误差可达 35.5%,当不计 θ_0 影响时计算误差可增至 38.7%,采用双屈服面模型时,变形计算误差可达 16%,当不计 θ_0 影响时计算误差可增至 19.4%。当偏载与均载共同作用下,在最大变形处的沉降变形: q 方向剪切变形引起的沉降占总沉降中的 80.5%; θ_0 方向上剪切变形引起的沉降占总沉降的 5.4%; 总剪切变形引起的沉降占总沉降的 85.9%; 体积变形引起的沉降占总沉降的 14.1%。采

表 2 几种基于广义塑性力学的土体模型及其计算所得的地基表面沉降量^[9, 22]

Table 2 Several soil models based on generalized plastic mechanics and the calculated settlements of foundation

m

方案	屈服函数与塑性势函数	均载作用下	所有荷载作用下				
			$x = 0.5$	$x = 2.5$	$x = 6.0$	$x = 11$	$x = 17$
1	$f = f_q(p, q); Q = q$	0.19	0.94	0.73	0.35	0.22	0.17
2	$f = f_q(p, q, \theta_0); Q = q$	0.20	1.11	0.86	0.37	0.22	0.17
3	$f_1 = f_v(p, q), f_2 = f_q(p, q); Q_1 = p, Q_2 = q$	0.25	1.13	0.90	0.45	0.29	0.23
4	$f_1 = f_v(p, q), f_2 = f_q(p, q, \theta_0); Q_1 = p, Q_2 = q$	0.26	1.23	0.93	0.46	0.29	0.23
5	$f_1 = f_v(p, q), f_2 = f_q(p, q, \theta_0), f_3 = f_\theta(q, \theta_0); Q_1 = p, Q_2 = q, Q_3 = \theta_0$	0.31	1.30	1.03	0.55	0.37	0.31

用剪切单屈服面模型时, 变形计算误差可达 19.5%, 当不计 θ_0 影响时误差可增至 27.7%。采用双屈服面模型时, 变形计算误差可达 5.4%; 当不计 θ_0 影响时, 变形计算误差可增至 13.1%。

9.2 极限分析方面

当前岩土材料的滑移线理论都采用经典塑性理论中的关联流动法则, 由此得出应力特征线与速度滑移线一致。而试验得知, 岩土材料并不服从关联流动法则, 因而应力特征线与速度滑移线不可能重合。广义塑性力学的出现, 从理论上证明了塑性势面与莫尔-库仑屈服面之间成一定的角度, 因而应按非关联流动法则来研究速度滑移线。文献[25]中导出了基于广义塑性力学(非关联流动法则)的速度滑移线方程, 它与莫尔-库仑屈服条件无关, 但应力特征线与莫尔库仑屈服条件有关, 并证明了速度滑移线与应力特征线之间处处都成 $\varphi/2$ 角。对于金属材料, 速度滑移线与应力特征线一致(如图 9 所示), 它们与 x 轴或 y 轴的夹角均为 $\pi/4$, 因而滑移线与特征线的夹角为 0。对于岩土材料, 速度滑移线与莫尔-库仑特征线成 $\varphi/2$ 夹角。在图 10 所示的简单应力场中, 速度滑移线是圆弧线, 应力特征线是对数螺旋线, 在同一点上滑移线与特征线比成 $\varphi/2$ 角。文中以平顶钝角楔体的 Prandtl 解为例, 给出了基于非关联流动法则的速度解, 并指出当 $\varphi = 0$ 时, 本解答与正交解一致, $\varphi \neq 0$ 时, 则两者有较大差异。

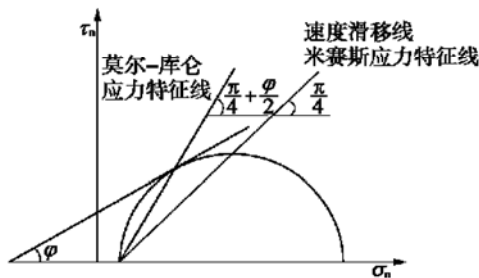


图 9 速度滑移线与应力特征线的关系

Fig. 9 Relationship between velocity slip line and stress characteristic line

基于传统塑性理论的极限分析方法, 广泛应用于金属材料并获得了成功, W. F. Chen^[8] 等人又将其推广应用到岩土工程领域。由于金属材料与岩土材料的特性不同, 尽管导出的岩土材料极限分析上界法的最终

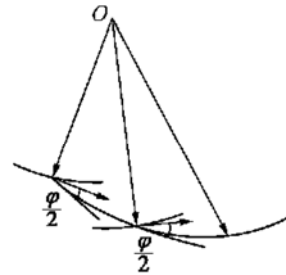


图 10 简单应力场中速度滑移线与应力特征线的关系

Fig. 10 Relationship between velocity slip line and stress characteristic line in simple stress field

计算结果是合理的, 但理论上却存在多种矛盾, 如假设应力滑移线与速度滑移线相同, 但在分析中却采用速度方向与应力滑移线成 φ 角; 传统塑性理论中假设体积不变, 但计算中却出现远大于实际的体积剪胀变形; 实际土体破坏时, 破坏面上同时存在着剪切力 τ_n 和正应力 σ_n , 但在计算中却反映不出摩擦功; 假设塑性势面与屈服面相同, 而实验证明, 对于岩土材料两者并不相同, 这些矛盾影响着岩土塑性理论的进一步发展。文献[26]建立了基于广义塑性力学的极限分析上限法, 尽管其计算结果与现行方法的计算结果一致, 但它消除了现行上限法在理论上存在的种种矛盾。不过这种解法要求出摩擦功, 从而使求解的难度增大, 它比较适用于上限法的数值方法。

另外, 广义塑性力学还会对岩土动力模型, 运动强化模型及各种新的岩土本构模型产生影响。甚至有些已被人们认可的方法也会受到影响而需进行某些改造。

10 结 论

(1) 广义塑性力学消除了经典塑性力学中的传统塑性势假设、正交流动法则假设与不考虑应力主轴旋转的假设, 从固体力学原理直接导出了广义塑性位势理论。

(2) 广义塑性力学是基于分量塑性势面与分量屈服面的理论, 能反映应力路径转折的影响, 即应力增量对塑性应变增量的影响。

(3) 广义塑性力学中的塑性势面是已知的, 因而它不会产生当前非关联流动法则中任意假定塑性势面

引起的误差。

(4) 广义塑性力学中要求屈服面与塑性势面对应, 而不要求相等, 避免了采用正交流动法则引起过大剪胀等不合理现象。由于它对屈服面硬化参量的选定有严格的规定, 保证了岩土材料在一定应力路径下求解的惟一性。

(5) 广义塑性力学中, 按土性及其状态不同, 体积屈服面可分为压缩型、硬化压缩剪胀型与软化压缩剪胀型三类, 并依据试验首次提出了压缩剪胀型土体的体积屈服面, 可以科学地考虑土体的压缩与剪胀。剪切屈服面分为 q 方向及 θ_0 方向的剪切屈服面, 一般情况下可略去 θ_0 方向的剪切屈服面而只考虑 q 方向的剪切屈服面。

(6) 广义塑性力学采用分量塑性势面与分量屈服面, 各屈服面都有各自与塑性势面相应的硬化参量。文中给出了广义塑性力学的硬化定律和应力—应变关系。

(7) 在应力增量分解的基础上, 建立了考虑应力主轴旋转的广义塑性位势理论, 从而可求出应力主轴旋转产生的塑性变形。

(8) 通过分析屈服面的物理意义, 表明屈服条件是状态参数, 它与应力状态、应力历史及材性等状态量有关; 同时也是试验参数, 只能由试验给出。

(9) 广义塑性力学不仅可以作为岩土材料的建模理论, 而且还可以应用于诸如极限分析等土力学的诸多领域, 具有广阔的应用前景。

广义塑性力学反映了我国学者郑颖人及其学生、沈珠江、杨光华等诸多学者的研究成果, 为岩土塑性力学打下了良好的理论基础, 但目前仍处于起步阶段, 研究范围只限于静力模型与应变硬化阶段, 尚有大量的后续工作要做。文中难免还有一些不成熟乃至错误的地方, 敬请各位批评指正。

参考文献:

- [1] 郑颖人, 沈珠江, 龚晓南. 广义塑性力学——岩土塑性力学原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002.
- [2] 郑颖人, 龚晓南. 岩土塑性力学基础[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989.
- [3] 殷宗泽. 一个土体的双屈服面应力—应变关系[J]. 岩土工程学报, 1988, 6(4): 24–40.
- [4] Anandarajah A, Sobhan K, Kuganenthira N. Incremental stress-strain behavior of granular soil[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1995, 121(1): 57–68.
- [5] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000.
- [6] Poorooshasb H B. Description of flow of sand using state parameters[J]. Computers and Geotechnics, 1989, 7(8): 195–218.
- [7] Matsuoka H, Sakakibara K. A constitutive model for sands and clays evaluating principal stress rotation[J]. Soils and Foundations, 1987, 27(14): 73–78.
- [8] 陈惠发(美). 极限分析与土体塑性[M]. 北京: 人民交通出版社, 1995.
- [9] 郑颖人, 孔亮. 塑性力学的分量理论——广义塑性力学[J]. 岩土工程学报, 2000, 22(3): 269–274.
- [10] Zheng Yingren, Liu Yuanxue. Development of plastic potential theory and its application in constitutive models[A]. In: Yuan, ed. Computer Methods and Advances in Geomechanics[C]. Rotterdam: Balkema, 1997. 941–946.
- [11] 郑颖人. 广义塑性力学讲座(1)——广义塑性力学理论[J]. 岩土力学, 2000, 21(2): 188–191.
- [12] 郑颖人, 段建立, 陈瑜瑶. 广义塑性力学讲座(2)——广义塑性力学中的屈服面与应力应变关系[J]. 岩土力学, 2000, 21(3): 305–308.
- [13] 郑颖人, 陈瑜瑶, 段建立. 广义塑性力学讲座(3)——广义塑性力学的加卸载准则与土的本构模型[J]. 岩土力学, 2000, 21(4): 426–429.
- [14] 杨光华. 土的本构模型的数学理论及其应用: [博士学位论文][D]. 北京: 清华大学水电系, 1999.
- [15] 沈珠江. 土的弹塑性应力应变关系的合理形式[J]. 岩土工程学报, 1980, 2(2): 11–19.
- [16] 段建立. 砂土的剪胀型及其数值模拟研究: [博士学位论文][D]. 重庆: 后勤工程学院土木工程系, 2000.
- [17] 郑颖人, 陈瑜瑶. 岩土屈服条件的确定[A]. 栾茂田. 第七届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集[C]. 大连: 大连理工大学出版社, 2001. 1–7.
- [18] Sun D A, Matsuoka H. An elastoplastic model for $c-\phi$ materials under complex loading[A]. In: Yuan, ed. Computer Methods and Advances in Geomechanics[C]. Rotterdam: Balkema, 1997. 887–892.
- [19] 李广信. 土的三维本构关系的探讨与验证: [博士学位论文][D]. 北京: 清华大学水电系, 1985.
- [20] 刘元雪. 含应力主轴旋转的土体的应力应变关系: [博士学位论文][D]. 重庆: 后勤工程学院土木工程系, 1997.
- [21] 刘元雪, 郑颖人, 陈正汉. 含应力主轴旋转的土体的应力应变关系[J]. 应用数学与力学, 1998, 19(5): 407–414.
- [22] 孔亮, 郑颖人, 王燕昌. 一个基于广义塑性力学的土体三屈服面模型[J]. 岩土力学, 2000, 21(2): 108–112.
- [23] 段建立, 郑颖人. 一种基于广义塑性力学的硬化剪胀土模型[J]. 岩土力学, 2000, 21(4): 360–362.
- [24] Zheng Yingren, Yan Dejun. Multi-yield surface model for soils on the basis of test fitting[J]. Computer Methods and Advances in Geotechnics, 1994, (1): 97–104.
- [25] 郑颖人, 王敬林. 关于岩土材料滑移线理论中速度解的讨论[J]. 水利学报, 2001, (6): 1–7.
- [26] 王敬林, 林丽, 郑颖人. 关于岩土材料极限分析上限法的讨论[J]. 岩石力学与工程学报, 2001, 20(Supp. 1): 886–889.