

求解安全系数的有限元法

Finite element method for solving the factor of safety

郑宏^{1,2}, 李春光², 李焯芬³, 葛修润²

(1. 三峡大学, 湖北 宜昌 443002; 2. 中国科学院武汉岩土力学研究所, 湖北 武汉 430071; 3. 香港大学 土木工程系, 香港)

摘要: 分析了目前在利用弹塑性有限元法求解安全系数时所存在的一些问题, 指出在对强度参数折扣的同时, 必需满足 φ 和 ν 不等式: $\sin \varphi \geq 1 - 2\nu$, 才能使所求得的安全系数接近于经典的极限平衡法。

关键词: 安全系数; 有限元; 极限平衡

中图分类号: TU 457

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2002)05-0626-03

作者简介: 郑宏, 男(1964-), 博士, 三峡大学特聘教授, 中国科学院武汉岩土力学研究所研究员。1985年毕业于东北工学院机械系, 现从事岩土力学数值分析研究和软件开发。

ZHENG Hong^{1,2}, LI Chun-guang², Lee C. F.³, GE Xiurun²

(1. China Three Gorges University, Yichang 443002, China; 2. Institute of Rock and Soil Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China; 3. Department of Civil Engineering, The University of Hong Kong, Hong Kong, China)

Abstract: Some problems are analyzed in the finite element method for solving the factor of safety in this paper. It is suggested that $\sin \varphi \geq 1 - 2\nu$ should be satisfied so as to obtain the factor of safety approximate to that obtained by the classical limit equilibrium analysis.

Key words: factor of safety; finite element; limit equilibrium

1 前言*

数十年来, 虽然涌现出不少优秀的数值分析方法, 但传统的极限平衡法仍然是评价边坡和其他水工建筑物安全性的首选方法。极限平衡法中最重要的概念是安全系数, 安全系数的定义方法有多种^[1], 但目前最为工程师们所接受的还是基于强度储备概念的安全系数定义, 本文也将沿用这一概念。

从本质上讲, 若将材料视为理想弹塑性材料, 则利用有限元法可以求得结构的安全系数, 而且, 有限元法还具有传统的极限平衡法无可比拟的优势^[1~7]: 首先, 可以了解结构随强度恶化而呈现出的渐进失稳过程; 其次, 可以得到极限状态下的失效形式。

本文简述了求解安全系数的有限元方法, 分析了现有方法中的一些问题, 指出在对材料的抗剪强度参数 c 和 φ 折扣的同时, 必须按照一定的规则对材料的刚度参数 E 和 ν 作相应调整, 才能得到合理的结果, 并且以一个均质边坡为例, 说明了本文方法的合理性。

2 安全系数的有限元方法

基于强度储备概念的安全系数 f_s 的定义为: 当材料的抗剪强度参数 c 和 φ 分别用其临界强度参数 c_c 和 φ_c 所代替后, 结构将处于临界平衡状态, 其中

$$\left. \begin{aligned} c_c &= c/f_s \\ \tan \varphi_c &= (\tan \varphi)/f_s \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

在用有限元法寻找 f_s 时, 通常要求解一系列具

有下列强度参数 c_i 和 φ_i 的题目:

$$\left. \begin{aligned} c_i &= c/Z_i \\ \tan \varphi_i &= (\tan \varphi)/Z_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 Z_i 为强度折减系数。若某一问题的解接近临界平衡状态, 就将安全系数 f_s 取为对应的 Z_i 。

至于临界平衡状态的定义也有很多^[1~7], 一般认为, 对于给定的强度参数 c_i 和 φ_i , 若能在给定的迭代次数内收敛, 而对于稍低于 c_i 和 φ_i 的参数 c'_i 和 φ'_i , 在给定的迭代次数内不能收敛, 就认为结构已达到临界平衡状态。由于无法准确确定“给定的迭代次数”, 因此这一定义在使用上尚有不便, 这里, 将临界平衡状态定义为当边坡内的塑性区能够形成潜在的滑移通道时的状态。这一定义在本质上与文献[4]是一致的, 但使用上更简单, 文献[4]取临界平衡态为边坡内的广义塑性剪应变等值线由坡底至坡顶连通时的时刻。

3 强度折减系数 Z_i 与弹性常数 E , ν 之间的关系

一般情况下, 一种岩石的强度参数 c 和 φ 越高, 其弹模 E 越高, 泊松比 ν 越低。如硬岩的弹模 E 通常以 GPa 为单位, 泊松比 ν 通常在 0.25 以下; 而软岩和土的弹模 E 通常以 MPa 为单位, 泊松比 ν 通常在 0.3 以

* 基金项目: 香港 RGC-CA99/00, EG01 及武汉市科委 991002024 资助项目

收稿日期: 2001-10-20

上。然而,迄今为止,在利用有限元法寻求安全系数时,都仅仅是对强度参数 c 和 φ 折扣,没有考虑随着强度参数的降低,应对刚度参数 E 和 ν 作相应调整。下面证明这样做是有问题的。

首先证明岩石类材料,若其满足 Mohr-Coulomb 准则,则其摩擦角 φ 和泊松比 ν 应满足不等式:

$$\sin \varphi \geq 1 - 2\nu \quad (3)$$

假定此种岩石充满了半无限空间,其中的应力场仅为自重应力场(按弹性力学的规定),则有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_2 = -K\gamma h \\ \sigma_3 = -\gamma h \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中 h 为深度; γ 为容重; K 为侧压系数, $K = \frac{\nu}{1-\nu}$ 。

顺便指出,式(4)所定义的应力场也适用于这样一个岩石圆柱:柱体的圆周面及底部被施以滑动简支约束,而上表面自由。对于上述应力场,认为应处处满足 Mohr-Coulomb 准则,即

$$(1 + \sin \varphi) \sigma_1 - (1 - \sin \varphi) \sigma_3 \leq 2c \cos \varphi \quad (5)$$

将式(4)代入式(5),同时令 $h \rightarrow \infty$,得

$$\sin \varphi \geq \frac{1-K}{1+K} = 1 - 2\nu$$

否则,若 $\sin \varphi < 1 - 2\nu$,则该半无限空间或受约岩柱内,一定深度以下的岩石都将处于塑性状态;特别地,若 $c = 0$,则整个半无限空间或岩柱都处于塑性状态,而这显然有违于实际情况。故对满足 Mohr-Coulomb 准则的岩石类材料,其摩擦角 φ 和泊松比 ν 之间必存在关系式(3)。笔者查阅的岩石大都满足式(3)。

基于以上分析,在对边坡进行有限元分析时,如果仅对强度参数 c 和 φ 折扣,很多情况下塑性区将首先出现在边坡深部而不是边帮;当 c 和 φ 值降低到一定程度时,由于深部的塑性区已经贯通了整个模型,导致计算结果不收敛,而潜在滑移通道上的塑性区却可能尚未贯通,从而使得计算出来的安全系数偏小。

在对强度参数 c 和 φ 折扣时,为了保持式(3)成立,可假定始终有如下关系式成立:

$$\sin \varphi_i = \beta(1 - 2\nu_i) \quad (6)$$

式中 φ_i 和 ν_i 对应于折减系数 Z_i ; β 为常数,则

$$\beta = \frac{\sin \varphi}{1 - 2\nu} \quad (7)$$

其中 φ 和 ν 为岩石真实的参数。由式(3), $\beta \geq 1$ 。

当 $Z_i \rightarrow \infty$ 时,必有 $\varphi_i \rightarrow 0$, $c_i \rightarrow 0$ 。由式(6)可知 $\nu_i \rightarrow 0.5$,岩石表现为无抗剪强度但又不可压缩的水,由此可见式(6)在此意义上的合理性。

随着 c_i 和 φ_i 的降低, ν_i 将增大,而 E_i 将减小,因

为式(6)已经定义了 ν_i 的变化规律。按照下式定义 E_i :

$$E_i \nu_i = E \nu = \text{Const} \quad (8)$$

式中 E 和 ν 为岩石真实的参数。需指出的是,式(8)仅是为了满足“强度越高, E 越高而 ν 越低”而建议的,尚缺乏必要的力学基础。事实上,即使不对 E 作调整,只要能确保式(3)成立,则仍然可以得到令人满意的安全系数。

4 算法

建议的用有限元法计算安全系数的算法如下:

- (1) 由式(7)求得参数 β ;
- (2) 给定一强度折减系数 Z_i , 由式(2)求得 c_i , φ_i ;
- (3) 由式(9)求得 E_i 和 ν_i :

$$\left. \begin{aligned} \nu_i &= \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{\sin \varphi_i}{\beta} \right| \\ E_i &= \frac{E \nu}{\nu_i} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

- (4) 以 E_i , ν_i 和 c_i , φ_i 为参数作有限元分析;

- (5) 若已达到了极限状态,取安全系数 $f_s = Z_i$, 结束分析,否则取一个新的强度折减系数 Z_i 重复(2)步。

5 算例

为了说明上述方法的合理性,下面以一个简单算例来加以说明。

图1是一均质边坡有限元模型。假定抗剪强度参数 $c = 0.05886$ MPa, $\varphi = 11.31^\circ$, 容重 $\gamma = 19.62$ kN/m³, 弹模 $E = 80$ MPa, 泊松比 $\nu = 0.43$, 材料符合 Mohr-Coulomb 准则和关联流动法则。

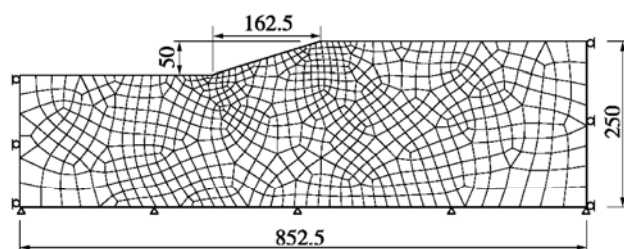


图1 均质边坡的有限元模型(单元: 698, 节点: 757)

Fig. 1 The FE model of a homogenous slope (elem: 698, node: 757)

用文献[8]建议的位移控制法(DCM)求解了本问题,与经典的载荷控制法(LCM)相比,DCM有更好的收敛性和稳定性。本构积分采用了文献[9]建议的自适应算法。

图2给出了不对 E , ν 作调整和按照式(9)对 E , ν 作调整的塑性区分布图。这里的塑性区是基于 Gauss 点的状态而绘制的,即当一个四边形单元内的任意一

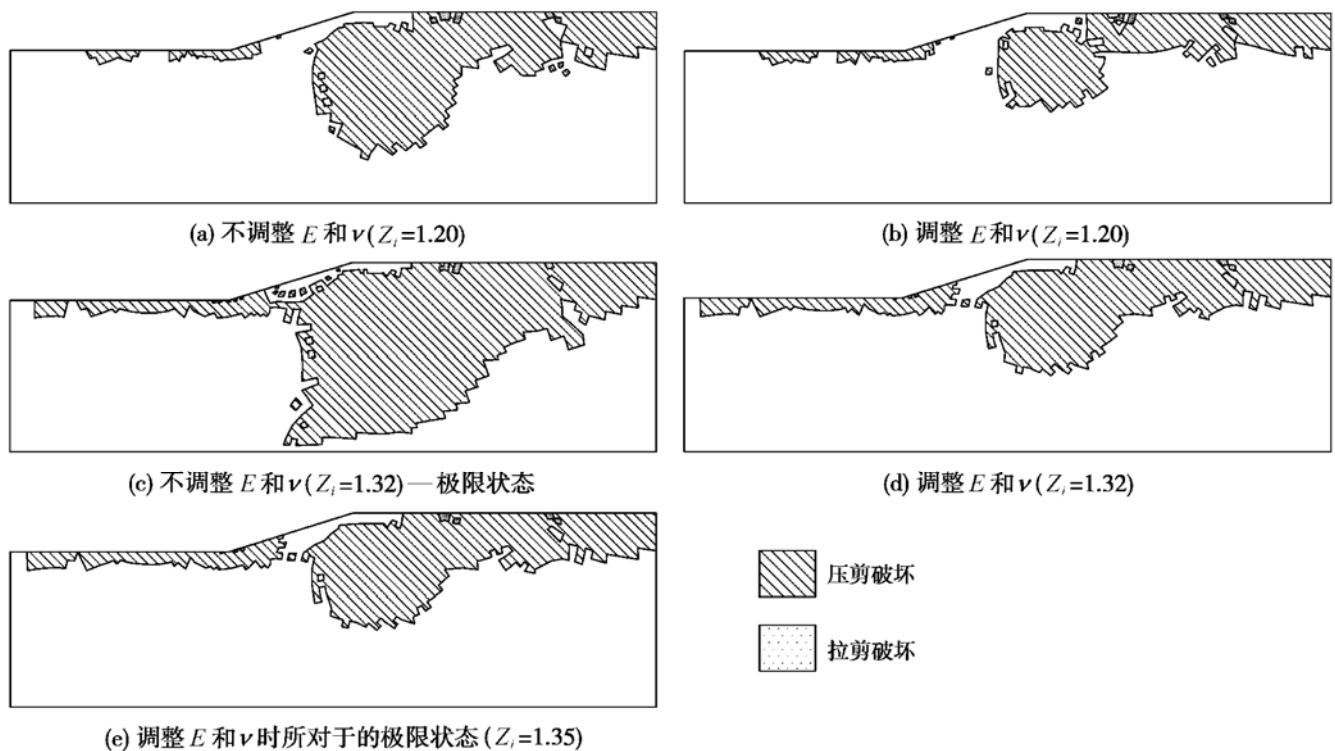


图2 塑性区分布图

Fig. 2 Distribution of plastic zone

个 Gauss 点(共 2×2 个)处于塑性状态时,就将其所在的 $\frac{1}{4}$ 单元画上相应的阴影线。一共有两种破坏类型:压剪破坏和拉剪破坏。各图上的拉剪破坏区也清楚地标明了潜在滑动面的拉力缝的位置。

如果不对 E , ν 进行调整,当折减系数达到 1.32 时,边坡内的塑性区就已经形成滑移通道;如果对 E , ν 作调整,当折减系数达到 1.35 时,才能形成滑移通道,这个结果更接近于文献[10]用简化 Bishop 法算得的安全系数 1.36。

从计算结果中还可以看出,如果不对 E , ν 进行调整,所算得的塑性区显然偏大。

值得指出的是坡顶和坡底那些成片的塑性区是由于边界约束效应引起的,属于低应力水平的破坏。在用其他软件时,也会得到类似的结果。如果在计算中引入无拉应力调整,或许会减少坡顶的塑性区,但这同时也可能导致程序收敛性的降低^[11]。

6 结 语

利用现有的弹塑性有限元程序可以求得非常接近于经典的极限平衡法的安全系数,但前提是在对 c , φ 值折扣的同时,必须对 ν 进行相应的调整。调整的策略是始终保持不等式 $\sin \varphi \geq 1 - 2\nu$ 成立。算例表明,本文所建议的调整 E , ν 的算法是简单有效的。

参考文献:

- [1] 史恒通,王成华. 土坡有限元稳定分析若干问题的探讨[J]. 岩土力学, 2000, 22(2): 152-155.
- [2] Duncan J M. State of the art: limit equilibrium and finite element analysis of slopes[J]. J Geotech Engrg Div, ASCE, 1996, 122(7): 577-596.
- [3] Smith I M, Griffiths D V. Programming the finite element method[M]. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 1998.
- [4] 连锁营,韩国城,孔宪京. 强度折减有限元法研究开挖边坡的稳定性[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(4): 406-411.
- [5] 宋二详. 土工结构安全系数的有限元计算[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(2): 1-7.
- [6] Matsui T, San K C. Finite element slope stability analysis by shear strength reduction technique[J]. Soils and Foundations, 1992, 32(1): 59-70.
- [7] Dawson E M, Roth W H, Drescher A. Slope stability analysis by strength reduction[J]. Geotechnique, 1999, 49(6): 835-840.
- [8] 郑宏,李焯芬,谭国焕,等. 有限元分析的位移控制法及其应用[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(1): 81-85.
- [9] 郑宏. 岩土力学中的几类非线性问题[D]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 2000.
- [10] 邓建辉. CAD 技术在边坡稳定性分析中的应用[D]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 1992.
- [11] Owen D J R, Hinton E. Finite element in plasticity: theory and practice [M]. Swansea: Pineridge Press, 1980.