

短文

两种土体弹塑性模型三维化方法的比较研究

Study on two three-dimensional methods of elasto-plastic model for soil

孔亮^{1,2}, 张鲁渝², 郑颖人²

(1. 宁夏大学物电系, 宁夏 银川 750021; 2. 后勤工程学院军事土木工程系, 重庆 400041)

中图分类号: TU 43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2002)04-0519-03

作者简介: 孔亮(1969-), 男, 云南景东人, 宁夏大学讲师, 博士生, 研究岩土本构模型与岩土工程数值计算。

要完整地写出应力应变的关系式, 应该是

$$\epsilon_i = f_i(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6) \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (1)$$

这是一种多因素与多因素之间的关系, 无法由试验直接建立。只能在部分试验的基础上, 作某些假定及合乎规律的推理, 从而形成某种数学模型, 叫本构模型, 用于计算这种多分量应力与多分量应变之间的关系。

从弹塑性角度出发, 对式(1)的简化是降低维数并减少硬化参数, 建立主应力和主应变之间的关系, 或者3个应力不变量与3个应变不变量之间的关系。应用时再作某种假定, 将其推广到6维关系。3维应力, 3维应变, 如果再考虑3种硬化参数, 仍然很复杂, 往往还需进一步简化。通常忽略第三应力不变量的影响, 建立以 p 和 q 为变量的屈服方程, 屈服方程取一个, 硬化参数取一个, 如剑桥模型, 清华大学模型等; 也有建立两个屈服方程, 取两个硬化参数, 如椭圆-抛物线双屈服面模型, 南水双屈服面模型等。

上面论述的是本构方程建立的基本原则, 方程的具体形式还是要通过试验来建立的。真三轴试验虽然能测得三个应力分量和三个应变分量, 但该试验设备普遍化程度不高, 仅少量的专门研究机构能进行这方面的研究。最常用的试验是普通三轴试验。但由于普通三轴仪只能测得两个应力分量和两个应变分量, 所以目前大多数土的弹塑性模型的屈服方程以 p 和 q 为变量, 也只在三轴压缩应力条件下得到验证, 然后把模型直接推广到三维应力状态。用此法定义的 p 和 q 推广的三维模型, 包含着这样的假设即屈服面在 π 平面上是一个圆。也就是说, 广义Mises准则($q/p = \text{常数}$) 在模型中被作为材料的屈服与破坏条件。

然而, 大量的试验表明, 广义Mises准则过大地估计了岩土材料的拉伸强度, 也导致平面应变状态下不正确的主应力比。已有的数据证明岩土材料屈服面

1 引言*

大多数土体的本构模型是建立在三轴压缩试验结果的基础上, 得到的是以平均正应力 p 和广义剪应力 q 为变量的屈服方程。然后用 $p = \sigma_{ii}/3$ 和 $q = [3(\sigma_y - p\epsilon_y)(\sigma_y - p\epsilon_y)/2]^{1/2}$ 将这些模型推广到平面应变、真三轴等三维应力条件下, 所得的预测结果与试验结果有较大的出入, 其中的一个主要原因是用这种方法推广的三维模型, 其屈服面在 π 平面上是一个圆。但大量的试验证明, 土体屈服面在 π 平面上的形状接近莫尔-库仑破坏准则或SMP(空间滑动面)破坏准则^[1]。

为得到更符合实际的结果, 不少学者考虑了土体在 π 平面上的屈服规律, 把剑桥模型、椭圆-抛物线模型三维化, 并用于土体的变形分析^[2,3]。但这些方法对计算结果的影响程度, 适用的范围以及各自的特点仍未见报道。另外, 本构模型对土体变形的模拟很大程度上依赖于正确与完善的建模理论。在传统塑性力学基础上发展起来的广义塑性力学既适用于金属, 又适用于岩土材料, 能较好地反映岩土材料的变形机制。它的出现奠定了岩土材料建模理论的基础^[4]。本文拟在广义塑性力学的框架内, 首先剖析土体弹塑性模型三维化的实质, 然后结合殷宗泽椭圆-抛物线双屈服面模型^[5]的三维化, 介绍两种有代表性的三维化方法——广义塑性力学法和变换应力法, 最后通过一个数值算例, 分析模型三维化对土体变形的影响程度以及这两种方法的优点和不足, 以期对建立更合理的本构模型和恰当地选用本构模型有所裨益。

2 土体本构模型三维化的实质

土体的应力应变关系是很复杂的, 这种复杂性, 如剪胀性、应力路径的影响、各向异性等, 是在复杂应力状态下表现出来的。所谓复杂, 实际上是应力应变的多维性。有6个应变分量, 6个应力分量, 此外还要考虑受荷历史的影响, 也该有6个硬化参数^[4,6,7]。如果

* 基金项目: 宁夏大学科研基金资助项目(012110)

收稿日期: 2001-10-08

在 π 平面上的形状是^[1,3]: 当应力较小 (q/p 小) 时接近圆, 当应力较大 (q/p 大) 时接近摩尔-库仑破坏准则或 SMP 破坏准则。另一方面, 不少的试验表明^[8], 当应力路径为 π 平面上的圆周时 (即 p, q 不变, 纯应力洛德角 θ_0 变化), 土体产生了相当明显的塑性变形。所以, 应力洛德角对土体变形的影响是不可忽略的。

直接建立三维应力与三维应变的关系必能考虑洛德角的影响, 但很复杂也不利于实际工程应用。一种可行又实际的方法是在已有的二维模型的基础上, 通过恰当的数学变换或引入一些符合实际的假设将它们扩展为三维模型, 进而考虑应力洛德角的影响, 更好地反映土体的变形特性。这就是土体本构模型三维化的实质。

3 两种土体弹塑性模型三维化方法

本构模型三维化的方法很多, 本文引入两种有代表性的方法: 基于广义塑性力学的三维化法和变换应力法。为便于论述, 下面结合殷宗泽椭圆-抛物线双屈服面模型的三维化阐明这二种方法。

3.1 广义塑性力学法

广义塑性力学是对传统塑性力学的继承和发展, 它不再遵守传统的一个塑性势函数的假设, 也不遵守关联流动法则, 依据严密的理论推导证实对各向同性材料存在着三个线性无关的塑性势函数^[4]。若取 p, q, θ_0 为塑性势函数时, 相应的三个屈服面为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_v^p &= f_v(\alpha_y) = f_v(p, q, \theta_0) \\ \varepsilon_q^p &= f_q(\alpha_y) = f_q(p, q, \theta_0) \\ \varepsilon_{\theta}^p &= f_{\theta}(\alpha_y) = f_{\theta}(p, q, \theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 ε_v^p 为塑性体应变; ε_q^p 为 q 方向上的塑性剪应变; ε_{θ}^p 为洛德角 θ_0 方向上的塑性剪应变。式(2)中的三式分别为体积屈服面、 q 方向上剪切屈服面和洛德角 θ_0 向上的剪切屈服面。上式是三维空间屈服面的完全表达式。在目前的实际计算中, 常令 $\varepsilon_{\theta}^p = 0$ 并略去洛德角 θ_0 对 $\varepsilon_v^p, \varepsilon_q^p$ 的影响而成为不考虑应力洛德角影响的双屈服面模型, 如殷宗泽的椭圆-抛物线双屈服面模型, 沈珠江的南水双屈服面模型等。只不过殷氏模型仍采用关联流动法则。

笔者曾在殷氏模型的基础上, 以前人试验结果为依据, 建立了一个基于广义塑性力学的土体三屈服面模型^[8]。对应于式(2)的三个屈服面的具体形式为

$$\left. \begin{aligned} p + \frac{q^2}{M_1^2(p + p_r)} &= \frac{h \varepsilon_v^p}{1 - t \varepsilon_v^p} p_a \\ \varepsilon_q^p &= \frac{aq}{Gg(\theta_0)} \sqrt{\frac{q}{g(\theta_0)M_2(p + p_r)} - q} \\ \varepsilon_{\theta}^p &= \frac{Baq}{Gg(\theta_0)} \sqrt{\frac{q}{M_{2D,g}(\theta_0)} - a} + C \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 $G = Kq_a(\alpha_y/p_a)^n$; B 为新增的模型参数, 其值随 π 平面上塑性应变增量方向与应力增量方向的夹角而变化, 以反映应变方向上应力诱导的各向异性; C 为积分常数; $M_1, M_2, p_r, h, t, a, K_G$ 和 n 为殷氏模型中的土性参数; $g(\theta_0)$ 为偏平面上 q 的形状函数, 采用郑颖人等提出的形式来逼近莫尔-库仑不规则六角形, 即

$$g(\theta_0) = \frac{2K}{(1+K) - (1-K)\sin 3\theta_0 + \alpha \cos^2 3\theta_0} \quad (4)$$

式中 $K = (3 - \sin \varphi)/(3 + \sin \varphi)$; $\alpha = 0.2 \sim 0.4$, 其值由上式通过计算机作图使其逼近莫尔-库仑的几何图形而确定。

这样, 利用广义塑性力学原理, 仅新增一个参数就把殷氏模型三维化。

3.2 变换应力法

文献[2]基于 SMP 准则, 利用变换应力法也将殷氏模型三维化。变换应力法的详细情况可参阅文献[3], 这里仅介绍其基本原理。为了在土体的弹塑性模型中简单地采用 SMP 准则, 把 π 平面上的 SMP 曲线变成在变换应力空间 π 平面 (简称 $\tilde{\pi}$ 平面) 上的圆, 引入变换应力张量

$$\tilde{\sigma}_y = p \delta_y + \frac{q_c}{q} (\alpha_y - p \delta_y) \quad (5)$$

其中

$$q_c = \frac{2I_1}{3 \sqrt{(I_1 I_2 - I_3)/(I_1 I_2 - 9I_3)} - 1} \quad (6)$$

式中 I_1, I_2, I_3 为应力张量的第一、第二和第三不变量。应力 α_y 给定后, 即可由式(5)求得变换应力 $\tilde{\sigma}_y$ 。这样, SMP 准则在变换主应力 ($\tilde{\sigma}_i$) 空间是以坐标原点为顶点, 空间对角线 ($\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_3$) 为轴的圆锥形。众所周知, 广义米赛斯准则在主应力空间呈圆锥形, 利用这两者的相似性, 可对已有的弹塑性模型 (包括双屈服面弹塑性模型在内) 进行合理的三维化。用变换应力张量 $\tilde{\sigma}_y$ 代替应力张量 α_y , 就可将殷氏模型三维化, 即

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}_v &= \tilde{p} + \frac{\tilde{q}^2}{M_1^2(\tilde{p} + p_r)} - \frac{h \varepsilon_v^p}{1 - t \varepsilon_v^p} p_a = 0 \\ \tilde{f}_q &= \frac{a\tilde{q}}{G} \sqrt{\frac{\tilde{q}}{M_2(\tilde{p} + p_r)} - \tilde{q}} - \varepsilon_q^p = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中所有参数均与原模型相同。

3.3 两种方法的比较与分析

从式(2)可看出, 应力洛德角 θ_0 对土体变形的影响包括两方面。一是在体积屈服面和 q 方向上剪切屈服面 (即通常的剪切屈服面) 中考虑洛德角的影响; 二是考虑洛德角 θ_0 方向上剪切屈服面对土体变形的影响。殷氏模型令 $\varepsilon_{\theta}^p = 0$ 并略去洛德角 θ_0 对 $\varepsilon_v^p, \varepsilon_q^p$ 的影响即是不考虑应力洛德角影响的双屈服面模型。

经广义塑性力学法扩展的殷氏三维模型综合考虑了这两方面的影响;文献[2]中经变换应力法扩展的殷氏三维模型考虑了第一方面的影响,但仍然没有考虑第二方面的影响。由此可见,广义塑性力学法是一种完全的方法,但增加了土性参数,也较为复杂;变换应力法是一种新的三维化方法,不增加任何土性参数,简单明了,但没有完全考虑应力洛德角对土体变形的影响。

4 算例分析

算例为两侧及底部约束,顶部施加均布荷载 q_0 、偏荷载 q_1 的平面应变问题。该模型长20 m,高15 m。载荷分为三类:土体自重,容重为 18.487 kN/m^3 ;顶部均布荷载 $q_0 = 200 \text{ kPa}$;偏荷载 $q_1 = 1.0 \text{ MPa}$ 。土质为梯敦贝(Teton)粉砂,所需的模型参数由常规三轴试验确定,更详细的过程参见文献[5]。据实验结果, π 平面上塑性应变增量方向与应力增量方向的夹角变化不大^[8],为简便起见,式[3]中的参数 B 取为常值。具体取值为: $K_G = 75$, $n = 0.21$, $p_r = 80 \text{ kN/m}^2$, $M_1 = 0.89$, $M_2 = 0.89$, $h = 154$, $t = 3.5$, $a = 0.33$, $B = 0.23$ 。对其进行有限元离散,单元剖分及边界条件如图1所示。

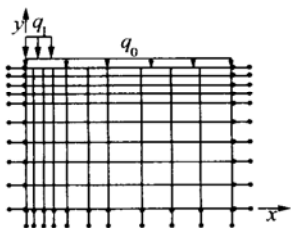


图1 单元剖分及边界条件示意图

Fig. 1 Finite element mesh and boundary conditions for example

为了便于分析模型三维化对土体变形带来的影响以及两种三维化方法的优点和不足,一共设计了四种计算方案:①按殷氏双屈服面模型计算;②按变换应力法三维化的殷氏模型即式(7)计算;③按广义塑性力学法三维化的殷氏模型,但引入 $\lambda_0 = 0$ 的假设,即按式(3)中的前两式计算;④按广义塑性力学法三维化的殷氏模型即式(3)计算。四个方案均按非关联流动法则计算,计算结果列于表1。

由表1可见,在均布荷载作用下地基表面处的沉降变形:方案②的计算结果比方案①增加12%;方案③的计算结果比方案①增加4%;方案④的计算结果比方案①增加24%。当偏载与均载共同作用下,在最大变形处的沉降变形:方案②的计算结果比方案①增加4%;方案③的计算结果比方案①增加4%;方案④的计算结果比方案①增加15%。方案④为完全符合广义塑性力学原理的三屈服面模型,综合考虑了应力洛德角 θ_0 对土体变形的影响,所得的沉降量最大是合

理的。如果以方案④的计算结果为准,殷氏模型的计算误差约为18%;按变换应力法三维化后的殷氏模型的计算误差约为11%;考虑应力洛德角影响的双屈服面模型的计算误差约为15%。计算结果与理论分析是相符的。

表1 各种计算方案所得的地基表面沉降量

Table 1 Settlements of foundation calculated by different models m

方案	均 载 作用下	所有荷载作用下				
		$x = 0.5$	$x = 2.5$	$x = 6.0$	$x = 11$	$x = 17$
①	0.25	1.13	0.90	0.45	0.29	0.23
②	0.28	1.18	0.93	0.49	0.33	0.26
③	0.26	1.23	0.93	0.46	0.29	0.24
④	0.31	1.30	1.03	0.55	0.37	0.31

5 结 论

(1) 土体本构模型三维化的实质是进一步地考虑应力洛德角 θ_0 对土体变形的影响。

(2) 变换应力法是一种数学变换方法,简单明了,在不考虑 λ_0 时,仍有计算误差。

(3) 广义塑性力学法有坚实的理论基础,是一种完全的方法,但较为复杂。

(4) 如果以基于广义塑性力学的三屈服面模型为准,殷氏模型的计算误差约为18%;按变换应力法三维化的殷氏模型的计算误差约为11%,可根据不同的场合选用。

参考文献:

- [1] 郑颖人,龚晓南.岩土塑性力学基础[M].北京:中国建筑工业出版社,1989.
- [2] 孙德安,姚仰平,殷宗泽.基于SMP准则的双屈服面弹塑性模型的三维化[J].岩土工程学报,1999,21(5):631-634.
- [3] 姚仰平,罗汀.新的变换应力空间及其应用[A].第七届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集[C].大连:大连理工大学出版社,2001.16-22.
- [4] 郑颖人,孔亮.塑性力学的分量理论——广义塑性力学[J].岩土工程学报,2000,22(3):269-274.
- [5] 殷宗泽.一个土体的双屈服面应力应变模型[J].岩土工程学报,1988,10(4):64-71.
- [6] 杨光华.土的本构模型的数学理论及其应用[D].北京:清华大学水电系,1999.
- [7] 殷宗泽.复杂应力状态下土体的变形[A].第三届华东地区岩土力学学术讨论会暨21世纪的岩土力学专题讨论会论文集[C].武汉:华中理工大学出版社,1995.28-33.
- [8] 孔亮,郑颖人,王燕昌.一个基于广义塑性力学的土体三屈服面模型[J].岩土力学,2000,21(2):108-112.