

平面应变条件下土坡稳定有限元分析

The slope stability analysis by FEM under the plane strain condition

张鲁渝, 时卫民, 郑颖人
(后勤工程学院军事土木工程系, 重庆 400041)

摘要: 描述岩土材料常采用摩尔-库仑准则和德鲁克-普拉格准则, 前者的计算结果较为可靠, 后者则更便于数值计算。本文基于非关联流动法则, 推导出平面应变条件下两种准则相互转化的关系式, 建立了与摩尔-库仑准则精确匹配的 D-P 准则。边坡稳定有限元分析结果表明: 与以往各 D-P 准则及摩尔-库仑等效面积圆准则相比, 本文建议的匹配 D-P 准则能更好地反映摩尔-库仑准则的实际特性, 同时, 因采用 D-P 准则的表达形式, 也方便了编程计算。

关键词: 摩尔-库仑; 德鲁克-普拉格; 屈服准则; 平面应变

中图分类号: TU 441; U 461.1

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2002)04-0487-04

作者简介: 张鲁渝(1974-), 男, 重庆万县人, 现于重庆后勤工程学院攻读博士, 主要从事岩体本构及边坡稳定分析方面的研究。

ZHANG Luyu, SHI Weimin, ZHENG Yingren

(Logistical Engineering University, Chongqing 400041, China)

Abstract: The Mohr-Coulomb and Drucker-Prager yield criteria are used widely in geotechnical engineering. Results of the former are reliable, and those of the latter are more efficient in the numerical calculation. This paper deduces the accurate equations which can transform one criterion to another under the plane strain condition. The analysis of an example of slope stability shows that the safe factors obtained from the Mohr-Coulomb criterion being a match for D-P yield criterion provided in this paper is more accurate than those from the other D-P and Mohr-Coulomb equivalent area circle criteria, moreover it is convenient to execute numerical calculation for D-P criterion.

Key words: Mohr-Coulomb; Drucker-Prager; plane strain; yield criterion

1 绪言*

边坡工程稳定性分析主要有极限平衡法、塑性极限分析法和有限元法。极限平衡法经过 70 多年的发展, 已积累了丰富的使用经验, 但由于方法本身没有考虑土体应力应变关系^[1,2], 故不能求出坡体的真实受力; 塑性极限分析法虽克服了上述不足, 能够在一定程度上考虑土体的应力应变关系, 但也只能给出假定滑移面上的应力场及速度场, 且同样不能考虑坡体变形及其对稳定性的影响。实践表明: 稳定与变形有着相当密切的关系, 坡体失稳往往伴随有较大的垂直沉降与侧向变形^[3], 有限元法的优势正在于此, 它不仅可以求出土体中各点的应力应变, 而且还能考虑土体的非线性本构关系。在世界范围内, 基于有限元法的边坡稳定分析正得到越来越广泛的应用, 它的逐步完善为准确分析此类问题提供了可能^[4,5]。

有限元法的计算精度与屈服准则的合理选择直接相关。目前岩土材料常采用摩尔-库仑准则(M-C)和德鲁克-普拉格准则(D-P)。M-C 准则较好地反映了岩土材料拉压不等的特性, 应用最为广泛, 但也存在诸多缺点, 例如, 它在三维应力空间中的屈服面存在棱角奇异点而导致数值计算不收敛。为此前人对其做了大量的修正, 总体上看, 这些修正准则在 π 平面上的屈服面是抹圆了的六角形^[6], 虽较好地解决了 M-C

准则棱角不收敛的问题, 但它们的表达式往往过于复杂, 不便应用。与 M-C 及其众多修正准则不同, D-P 准则在 π 平面上是一个圆, 且表述简单, 更利于数值计算。经典 D-P 准则可由 M-C 准则基于关联流动法则推出, 在 π 平面上, 经典 D-P 准则是 M-C 准则的内切圆, 其它 D-P 类准则还有 M-C 外角外接圆、内角外接圆以及摩尔-库仑等效面积圆^[7]。

在有限元边坡稳定分析中, 笔者发现: 上述几类 D-P 准则如果均按关联流动法则 ($\Psi = \phi$, Ψ 为剪胀角, ϕ 为内摩擦角) 求解, 所得稳定系数(强度折减系数)与极限平衡法相比, 偏高甚多; 如果均采用非关联流动法则($\Psi = 0$), 当 $\phi \leq 27^\circ$, 内切圆所得结果偏小, 外接圆、内接圆仍偏大; 当 $\phi > 27^\circ$, 内切圆、内接圆偏小, 外接圆偏大。如采用摩尔-库仑等效面积圆准则并满足非关联流动法则, 则可将安全系数的计算误差控制在 6% 左右, 基本可以接受^[8], 但仍稍偏高。鉴于此, 本文推导了基于非关联流动法则的 D-P 准则, 在平面应变条件下, 该准则与 M-C 准则精确匹配, 实质上它仍属广义 Mises 准则。算例分析结果表明: 与前述各 D-P 类准则及等效面积圆准则相比, 采用本文提出的基于非关联流动法则的 D-P 准则所得边坡稳定系数更接近极限平衡法。

* 收稿日期: 2001-10-08

2 塑性增量本构理论

屈服准则、流动规则和硬化规律是塑性增量本构理论三个主要组成部分^[9]。计算塑性应变增量,首先需要确定材料的屈服条件并选取材料所服从的流动规则(关联流动还是非关联流动),以确定塑性势函数,最后还要决定材料的硬化规律。对于理想弹塑性材料其硬化参数为零。本文以理想弹塑性材料为研究对象。

2.1 屈服准则

(1) 摩尔-库仑准则(M-C)

摩尔-库仑准则在二维应力空间中可表示如下:

$$\begin{cases} |\tau| = c + \sigma_n \tan \phi \\ R^{MC} = c \cos \phi + \rho \sin \phi = \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2/4 + \tau_{12}^2} \\ \rho = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2 \end{cases} \quad (1)$$

各符合的具体含义见图 1, 平面问题中, M-C 准则符号约定以压为正。

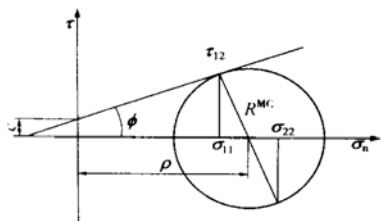


图 1 摩尔圆示意图
Fig. 1 Mohr circle

(2) 德鲁克-普拉格准则

在三维应力空间中 D-P 准则可定义为

$$F(\sigma) = a I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (2)$$

式中 I_1, J_2 分别为应力张量第一不变量, 应力偏量第二不变量; a, k 是材料参数, 当 $a = 0$ 时, 即为米赛斯准则。

2.2 流动法则

对于关联流动法则, 屈服函数与塑性势函数相同 ($F = Q$), 其流动矢量 r 可表示为(以张量表示):

$$r_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = a_{\psi} \delta_{ij} + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} S_{ij}, \text{ 其中 } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

对于非关联流动法则 ($F \neq Q$), 可取 Q 与 F 形式相同, 只需将 a_{ψ} 代替式(2)中 a_{ϕ} 即可, a_{ψ} 为材料参数, 是关于 ψ 的函数, 对于 D-P 准则有

$$r_{ij} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = a_{\psi} \delta_{ij} + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} S_{ij} \quad (3)$$

3 塑性阶段 M-C 与 D-P 准则的转换

可这样理解转换: 以平面应变为条件, 并基于非关联流动法则, 将 M-C 准则转化为等效的 D-P 准则。

理想塑性: $\epsilon^e \ll \epsilon^p \Rightarrow \epsilon^e = 0, \epsilon = \epsilon^p$; 平面应变: ϵ_{33}

$= \epsilon_{33} = \epsilon_{33}^e = 0$; 流动法则: $\epsilon_{ij}^e = d\lambda_{ij} = d\lambda \left[a_{\psi} \delta_{ij} + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} S_{ij} \right], r_{ij} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}$ 。其中 ϵ^e 为弹性应变, ϵ^p 为塑性应变, ϵ 为总应变增量, ϵ^p 为总塑性应变增量, ϵ_{ij}^e 为塑性应变增量的分量, $d\lambda$ 为常量系数, σ_{ij} 为应力各分量的张量表示。由以上各式可知: $S_{33} = -2a_{\psi}\sqrt{J_2}$, 且 $S_{13} = \sigma_{13} = 0, S_{23} = \sigma_{23} = 0, S_{33} = \sigma_{33} - I_1/3, \sigma_{33} = I_1 - \sigma_{11} - \sigma_{22}, J_2 = [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6\sigma_{12}^2]/6$ 。进一步可得:

$$I_1 = \frac{3}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - 3a_{\psi}\sqrt{J_2} \quad (4)$$

$$J_2 = \frac{[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2/2 + \sigma_{12}^2]}{1 - 3a_{\psi}^2} = \frac{(R^{MC})^2}{1 - 3a_{\psi}^2} \quad (5)$$

式中 R^{MC} 为摩尔圆半径。将式(4), (5)代入式(2)可得

$$\frac{3}{2}a_{\phi}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{R^{MC}(1 - 3a_{\phi}a_{\psi})}{\sqrt{1 - 3a_{\phi}^2}} - k = 0 \quad (6)$$

$$R^{MC} = \frac{\sqrt{1 - 3a_{\phi}^2}}{(1 - 3a_{\phi}a_{\psi})} \left[\frac{3a_{\phi}(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2} + k \right] \quad (7)$$

在上述推导中, 符号约定以拉为正, 即 σ_{11}, σ_{22} 为拉应力, 故此处与式(1)对应的 $\rho = -(\sigma_{11} + \sigma_{22})/2$ 。

联立式(1), (7)可得 $\sin \phi = \frac{3a_{\phi}\sqrt{1 - 3a_{\psi}^2}}{(1 - 3a_{\phi}a_{\psi})}, c \cos \phi = k \frac{\sqrt{1 - 3a_{\psi}^2}}{(1 - 3a_{\phi}a_{\psi})}$, 进一步推得 $a_{\phi} = \frac{\sin \phi}{3}(a_{\psi} \sin \phi + \sqrt{1 - 3a_{\psi}^2})^{-1}, k = c \cos \phi (a_{\psi} \sin \phi + \sqrt{1 - 3a_{\psi}^2})^{-1}$ 。

对于关联流动法则, 有 $a_{\psi} = a_{\phi}$ 得

$$a_{\phi} = \frac{\tan \phi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}}, k = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \quad (8)$$

式(8)即为经典 D-P 准则所对应的参数。对于非关联流动法则, 有 $a_{\psi} = 0$, 可得

$$a_{\phi} = \sin \phi/3, k = c \cos \phi \quad (9)$$

式(9)便为基于非关联流动法则的 D-P 准则参数。文中将满足上式的 D-P 准则称为摩尔匹配 D-P 准则, 此时塑性势函数 Q 已退化为 Von Mises 条件。由 $a_{\psi} = 0$ 可得 $\psi = 0$, 即塑性应变增量只与塑性剪应变分量有关, 而与塑性体应变分量无关, 也即塑性体应变为零。

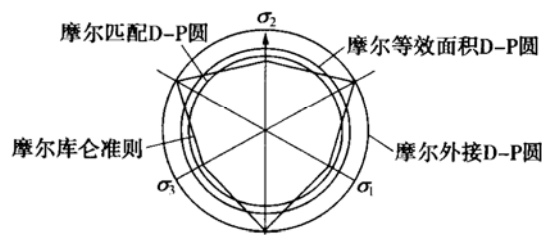


图 2 M-C 准则与 D-P 类准则在 π 平面上的曲线
Fig. 2 The curves of M-C and D-P criteria on the π plane

4 π 平面上 M- C 与 D- P 的关系

在偏平面上, 摩尔库仑准则与 D- P 准则有如下关系, 见图 2 和表 1, 图 2 中省略了摩尔内角内接圆。

表 1 各 D- P 准则参数换算表

Table 1 The parameters transformation of D- P criteria		
D- P 准则种类	a_{ϕ}	k
摩尔外角外接	$\frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)}$	$\frac{6c\cos\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)}$
D- P 圆(DP1)	$\frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3+\sin\phi)}$	$\frac{6c\cos\phi}{\sqrt{3}(3+\sin\phi)}$
摩尔内角外接	$\frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)}$	$\frac{6c\cos\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)}$
D- P 圆(DP2)	$\frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3+\sin\phi)}$	$\frac{6c\cos\phi}{\sqrt{3}(3+\sin\phi)}$
摩尔等面积	$\frac{2\sqrt{3}\sin\phi}{\sqrt{2\sqrt{3}\pi(9-\sin^2\phi)}}$	$\frac{6\sqrt{3}c\cos\phi}{\sqrt{2\sqrt{3}\pi(9-\sin^2\phi)}}$
D- P 圆(DP3)	$\frac{\sin\phi/3}{\sin\phi/3}$	$\frac{c\cos\phi}{c\cos\phi}$
摩尔匹配		
D- P 圆(DP4)		

5 算例分析

有限元强度折减系数法正成为边坡稳定分析研究的新趋势^[10]。它的基本原理是将土体材料参数 c 、 ϕ 值除以一折减系数 F_{trial} , 得到一组新的 c' 、 ϕ' 值, 然后代入有限元进行试算, 当计算“正好”收敛时所对应的 F_{trial} 即为坡体稳定安全系数, 所谓正好收敛是指 F_{trial} 再稍大一些(数量级一般为 10^{-3}), 计算便不收敛。与极限平衡法相比, 强度折减系数法不需要任何假定, 便可自动求得任意形状的临界滑移面及其对应的最小安全系数, 同时它还可以真实反映坡体失稳及塑性区的开展过程。本文结合表 1 中各屈服准则, 采用强度折减系数法, 分别对同一边坡进行了稳定性分析, 作为对比, 本文还给出了极限平衡条分法(Spencer 法)的计算结果, 其采用的强度准则如式(1)。

某简单土质边坡, 无孔隙水, 土容重 $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$, 坡角为 45° , 坡体底边界为固定约束, 左、右边界为水平约束, 其它面为自由约束。单元选用平面四节点矩形单元, 当坡高为 20 m 时, 划分单元 1044 个, 节点 1111 个, 为保证足够的精度, 需在可能滑移面区域对单元网格进行局部加密, 网格划分如图3, 有限

元计算参数共 6 个, 见表 2。

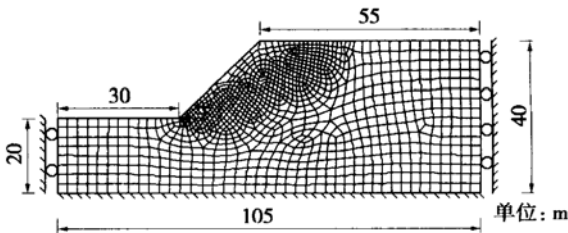


图 3 单元网格划分

Fig. 3 The mesh of FE elements

表 2 Drucker- Prager 准则有限元计算参数

Table 2 The finite element parameters for Drucker- Prager criterion					
E/kPa	ν	$\gamma/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-3})$	ϕ	c	ψ
1000	0.3	25	变量	变量	0

为避免个别特例在计算结果上存在巧合, 笔者对 9 种情况进行了对比计算, 坡高 $H(\text{m})$ 、粘聚力 $c(\text{kPa})$ 和摩擦角 $\phi(^{\circ})$ 按表 3 变化, 计算结果见表 3。

如前文所述, 极限平衡法(指 Spencer 法)虽没有考虑土体应力应变关系, 不能求出坡体中每一点的真实受力, 但因其满足全部平衡条件, 故所得安全系数是合理的。对土质比较均匀、坡角不算陡的边坡, 采用圆弧滑移面往往能得到足够的精度^[8]。表 3 列出了各种情况下的最小安全系数, Spencer 法在众多极限平衡法中公认较为精确, 本文以该法计算结果为标准, 表 3 误差定义为: 分别求出各准则与 Spencer 法所得安全系数之差再与 Spencer 法所得结果相比。

由表 3 可知, 与 Spencer 法相比, DP1~ DP3 所得结果均偏大, 采用摩尔库仑等效面积圆准则计算出的安全系数误差在 6% 左右, 基本可接受, 但仍稍偏高。按本文建议的摩尔匹配 D- P 准则计算的误差除一种工况外其余 8 种工况下均为 1% 左右($\phi = 0$ 时, 结果误差较大)。结果异常与材料参数有关, 因 D- P 准则只适用摩擦型材料, 当 $\phi = 0$ 时, a_{ϕ} 、 k 均为零, 即材料本身没有强度, 任何荷载均会导致失稳, 这显然不妥, 本文取 $\phi = 1 \times 10^{-6}$, 来近似 $\phi = 0$ 的情况, 因而误差较大。

从以上分析可知, 当有限元计算模型的边界条件、

表 3 安全系数计算结果

Table 3 The comparison of calculated safe factor

计算 工况	$c/\text{kPa}(\phi = 17^\circ, H = 20 \text{ m})$			$\phi(^{\circ})(c = 42 \text{ kPa}, H = 20 \text{ m})$			$H/\text{m}(\phi = 17^\circ, c = 42 \text{ kPa})$		
	10	20	40	0	10	25	20	30	40
DP1	0.661	0.962	1.334	0.525	1.044	1.769	1.368	1.119	0.994
DP2	0.660	0.791	1.097	0.525	0.930	1.332	1.125	0.920	0.818
DP3	0.618	0.793	1.100	0.477	0.896	1.396	1.128	0.923	0.820
DP4	0.572	0.743	1.038	0.453	0.850	1.313	1.068	0.868	0.771
Spencer	0.579	0.746	1.035	0.501	0.846	1.317	1.062	0.866	0.762
(DP1- S)/S	0.142	0.289	0.289	0.048	0.234	0.343	0.288	0.293	0.305
(DP2- S)/S	0.140	0.060	0.060	0.048	0.099	0.011	0.059	0.063	0.073
(DP3- S)/S	0.067	0.063	0.063	- 0.048	0.059	0.060	0.062	0.066	0.076
(DP4- S)/S	- 0.012	- 0.004	0.003	- 0.096	0.005	- 0.003	0.006	0.002	0.012

注: DP1~ DP4 具体意义见表 1, S 指 Spencer 法。

网格划分密度、单元种类的选择等均满足计算精度要求时,本文给出的屈服准则与摩尔库仑准则等效。此外,有限元法的优越性还体现在能自动给出最危险滑移面(广义塑性应变等值线图)。根据有限元法所确定的最危险滑移面可以得出:实际边坡的最危险滑移面往往不是一条可以用简单函数描述的曲线,而应是具有一定宽度的滑移带(如图 4、5)。计算结果还表明,对于有限元法,选用不同的屈服准则得到的塑性区形状相似,所不同的是塑性应变的大小,本文只给出了摩尔匹配 D-P 准则相应的塑性区。图 6、7 是采用 Spencer 法得出的最危险的滑移面。从图 4~7 可看出,无论是采用有限元法还是极限平衡法,对于均质边坡,两者得到的最危险滑移面相似。尽管如此,极限分析法更适于存在可能滑动边坡的稳定性分析,而对于那些滑动可能性不大,但变形要求高的边坡稳定性分析则必须采用有限元法^[11]。

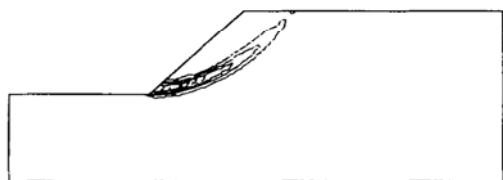


图 4 失稳时的塑性区($\phi = 17^\circ, H = 20 \text{ m}, c = 40 \text{ kPa}$)
Fig. 4 The plastic zone of instability

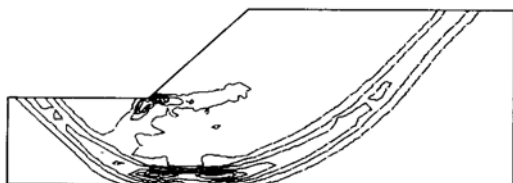


图 5 失稳时的塑性区($\phi = 0^\circ, H = 20 \text{ m}, c = 42 \text{ kPa}$)
Fig. 5 The plastic zone of instability

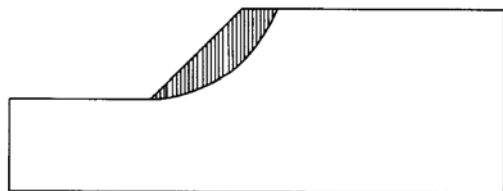


图 6 极限平衡法给出的滑移面(计算参数与图 4 相同)
Fig. 6 The slip surface by limit equilibrium method

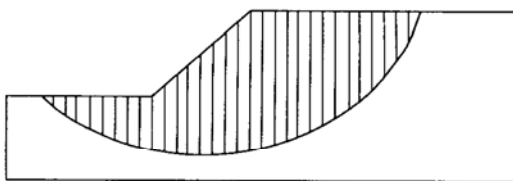


图 7 极限平衡法给出的滑移面(计算参数与图 6 相同)
Fig. 7 The slip surface by limit equilibrium method

(1) 本文基于非关联流动法则建立了与经典的摩尔-库仑准则相匹配的等效 D-P 准则,在平面应变的条件下,如果忽略体积变形,可得到 D-P 参数 a_ϕ, k 。边坡稳定分析的算例表明:与各 D-P 准则及等效面积圆准则相比,该摩尔匹配 D-P 准则所得稳定系数更接近常规极限平衡法。

(2) 有限元法确定的最危险滑移面与极限平衡法不同,它往往不是一条可以用简单函数描述的曲线,而应是具有一定宽度的滑移带。

(3) 对于有限元法,选用不同的屈服准则并结合强度折减技术得出的塑性区形状很相似,不同的是塑性应变的大小。无论是采用有限元法还是极限平衡法,对于均质边坡,两者得到的最危险滑移面形状相似。

(4) 有限元法的优点不仅仅在于求出折减系数,如果选用的屈服准则合理,对于具有复杂地质地貌的边坡也可自动求出较为符合实际的临界滑移面,并能模拟土坡失稳及施工开挖的自然过程,这是传统极限平衡法无法做到的。当然就有限元法本身来说,其计算精度不仅受边界条件、网格划分密度、单元种类的影响,还与具体问题的分析方法及数值收敛性的处理有关,这些问题还有待进一步深入研究。

参考文献:

- [1] James Michael Duncan. State of the art: limit equilibrium and finite element analysis of slopes[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1996, 122(7): 577-596.
- [2] JIANG G-L, MAGNAN J-P. Stability analysis of embankments: comparison of limit analysis with methods of slices[J]. Geotechnique, 1997, 47(4): 857-872.
- [3] 钱家欢,殷宗泽. 土工计算原理[M]. 第 2 版. 北京:中国水利水电出版社, 1996.
- [4] Griffiths D V, Lane P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. Geotechnique, 1999, 49(3): 387-403.
- [5] Dawson E M, Roth W H, Drescher A. Slope stability analysis by strength reduction[J]. Geotechnique, 1999, 49(6): 835-840.
- [6] 郑颖人,沈珠江. 广义塑性理论——岩土塑性力学原理[M]. 重庆:中国人民解放军后勤工程学院, 1998.
- [7] 徐干成,郑颖人. 岩土工程中屈服准则应用的研究[J]. 岩土工程学报, 1990, 12(2): 93-99.
- [8] 龚晓南. 土工计算机分析[M]. 北京:中国建筑工业出版社, 2000.
- [9] 章根德. 土的本构模型及其工程应用[M]. 北京:科学出版社, 1995.
- [10] 连锁营,韩国城,孔宪京. 强度折减有限元法开挖边坡的稳定性[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(4): 407-411.
- [11] 崔政权,李 宁. 边坡工程——理论与实践最新发展[M]. 北京:中国水利水电出版社, 1999.

6 结 论