岩石脆性破裂的重正化研究及数值模拟
Renormalization study and numerical simulation on brittle failure of rocks

陈忠辉[1], 谭国焕[2], 杨文柱[2]
(1. 中国矿业大学(北京校区) 资源开发系, 北京 100083; 2. 香港大学 土木工程系, 香港)

摘 要: 针对脆性岩石细观强度非均匀、离散性特征, 利用重正化群理论建立了岩石临界破坏重正化模型, 系统研究了岩石宏观临界强度和细观强度的定量关系, 采用条件概率方法处理模型中细观单元间的应力转移, 从而求得岩石临界破裂时的临界概率 P^*, 着重研究了岩石均质度与岩石峰值强度的理论关系。此外, 利用岩石破裂过程分析程序(RFPA) 模拟了岩石单轴压缩下细观破裂演化至宏观破裂的全过程。研究结果表明, 数值模拟和重正化群得到的岩石峰值强度十分吻合。

关键词: 脆性破裂; 重正化群; 数值模拟
中图分类号: TU 452; TD 315 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000- 4548(2002) 02- 0183- 05

作者简介: 陈忠辉(1969-), 男, 江苏启东人, 1990 年毕业于东北工学院, 1997 年获博士学位, 现为中国矿业大学(北京校区) 副教授, 主要从事岩石力学的教学和科研工作。

CHEN Zhong-hui[1], THAM L. G.[2], YEUNG M. R.[2]
(1. China University of Mining & Technology, Beijing 100083, China; 2. Department of Civil Engineering, The University of Hong Kong)

Abstract: In this paper, the critical failure model is established by renormalization group theory approach, and the relation between the peak strength and the mean strength of the elements is studied. The stress transfer among the elements is defined with the conditional probability method. The critical probability P^* is obtained. On the other hand, the whole process of brittle fracture of rock has also been simulated numerically from micro-fracture to macro-fracture by using the rock failure process analysis(RFPA) code. The peak strengths obtained by the numerical model agree fairly well with those obtained by the renormalization group theory.

Key words: brittle failure; renormalization group; numerical simulation

1 引 言*

岩石材料内部不可避免地存在着许多大小不一、形状各异的缺陷和损伤, 这些非均匀性对岩石宏观力学性能的影响成为当今岩石力学与工程界关注的热点问题之一[1]。目前研究岩石破裂一般从两个方面入手: 在宏观尺度上, 通过观测各种复杂应力作用下岩石试样变形、声发射、声波速度及密度等物理参数研究其破坏规律及脆性破坏的前兆信息; 在细观尺度上, 微裂纹的成核、扩展及贯通是观测和研究的重点[2,3]。然而岩石的破裂过程实质上是一个在非平衡条件下细观破裂逐渐演化至宏观破裂的非线性过程, 具有明显的跨尺度特征。因此从某种意义上讲, 只有结合岩石细观和宏观破坏两个层次, 从跨尺度的角度研究岩石整个破坏过程及临界行为, 才能真正探求岩石的破坏机制。

近来一些非线性理论, 如分形理论、混沌、灾变理论及重正化群理论等, 被广泛应用于自然和社会科学许多领域, 并取得了一系列的研究成果[4~8]。重正化群理论主要通过重正化空间格子模型来研究临界现象和行为, 利用重正化技术研究岩石力学一些临界行为已取得了一些成果。Madden 利用重正化技术把岩石宏观导电率和微裂纹群联系起来研究[9], Allegre 等则研究了岩石裂纹的合并问题[10], Smalley 等对断层的临界滑动进行了重正化研究[11], 然而他们大多只研究岩石裂纹聚合的临界行为, 而对岩石的峰值强度涉及不多。

本文利用 Weibull 统计分布把岩石设置为细观均匀而宏观非均匀的网络系统, 利用条件概率考虑应力转移问题, 进而采用重正化群理论研究岩石脆性破裂的峰值强度, 通过重正化群理论进一步探求岩石脆性破裂过程的本质。为了验证重正化技术有效性, 利用 RFPA 对同样分布的网络系统进行数值模拟, 不仅得到了岩石细观破裂的演化过程, 而且所得到的岩石峰值强度和理论结果十分吻合。

2 重正化模型

重正化技术是一种模拟非均匀大系统演化过程的数学工具。它最重要的特征是系统在临界状态时尺度不变性, 也就是说, 脆性岩石在临界破坏时不同尺度下具有相同的破坏性质。从这个意义上讲, 重正化技术成为研究宏细观尺度之间的一个桥梁。

由于岩石材料形成环境的复杂性和长期的地质作用, 岩石材料可以认为是一个拥有大量细观单元的大

* **基金项目**: 国家自然科学基金资助项目(19902019; 59734090)
收稿日期: 2001- 08- 27

系统。图 1 为一个二维重正化格子模型, 本文利用此模型研究岩石材料脆性破坏的临界行为。图中显示: 4 个小格子单元组成一个大单元, 而大单元的性能具有唯一性, 它由 4 个小格子单元组合而成。同样 4 个大单元可以组成一个更大的单元, 以此类推, 这就是模型的重正化过程。图 1 中 1~ 4 分别为 4 个不同的尺度, 任何一个尺度都需要重正化。一个组合而成的大单元有 5 种可能情况: [bbbb]、[bbbu]、[bbuu]、[buuu]、[uuuu], 这里 b 表示已破坏单元, u 表示未破坏单元。由于破坏单元空间位置的差异, 大单元[bbbu]、[bbuu]和[buuu]分别有 C_4^1, C_4^2, C_4^3 种类型。如果假定单元相互独立, 那么每一种单元状态的破坏概率可用下式表示:

$$\left.\begin{array}{ll} [\mathrm{bbbb}] & P_1^4 \\ [\mathrm{bbbu}] & C_4^1 P_1^3(1- P_1) \\ [\mathrm{bbuu}] & C_4^2 P_1^2(1- P_1)^2 \\ [\mathrm{buuu}] & C_4^3 P_1(1- P_1)^3 \\ [\mathrm{uuuu}] & C_4^1 P_1^3(1- P_1) \end{array}\right| \tag{1}$$

式中 P_1 表示小单元的破坏概率。事实上即使在岩石材料的加载初期, 单元很难保持相互独立, 单元的破坏必将影响临近单元的应力状态, 也就是说, 未破坏单元要另外承受从临近破坏单元转移过来的应力。在重正化模型中, 假定应力转移范围只局限于大单元中的单元之间, 正是这样一个简单应力重分布机制将会导致岩石材料临近峰值强度时复杂的灾变性力学行为。

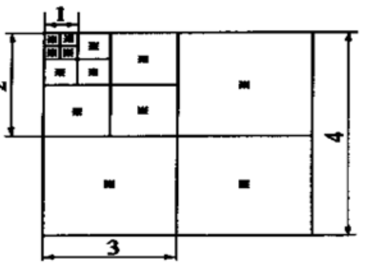

图 1 二维单元重正化示意图

Fig. 1 The sketch of two dimensional renormalization theory

模型中采用条件概率 $P_{a,b}$ 表示破坏单元对临近非破坏单元的影响。一个已承受应力 $b\sigma$ 的未破坏单元, 如果再承受临近破坏单元转移过来应力 $(a- b)\sigma$ 就破坏的条件概率定义为 $P_{a,b}$ 。对应力转移和单元破坏作如下假定: ①当大单元中所有小单元全部破坏时, 大单元才破坏; ②破坏单元先前承受的应力平均转移给临近未破坏单元。

在数学上条件概率 $P_{a,b}$ 可用概率 P_a 和 P_b 表示:

$$P_{a,b} = \frac{P_a - P_b}{1- P_b} \tag{2}$$

利用条件概率的定义, 可以得到所有由于应力转移造成大单元破坏的条件概率:

$$\left.\begin{array}{lll} [\mathrm{bbbu}] \to [\mathrm{bbbb}] & P_{4,1} \\ [\mathrm{bbuu}] \to [\mathrm{bbbb}] & [P_{2,1}^2 + 2P_{2,1}(1- P_{2,1})]P_{4,2} \\ [\mathrm{buuu}] \to [\mathrm{bbbb}] & P_{4/3,1}^3 + 3P_{4/3,1}^2(1- P_{4/3,1})P_{4,4/3} + \\ \multicolumn{2}{l}{\quad 3P_{4/3,1}(1- P_{4/3,1})^2[P_{2,4/3}^2 + 2P_{2,4/3}(1- P_{2,4/3})P_{4,2}]} \end{array}\right| \tag{3}$$

式中 $P_{4,1}, P_{2,1}, P_{4,2}, P_{4/3,1}, P_{4,4/3}$ 和 $P_{2,4/3}$ 都是条件概率。如 $P_{4/3,1}$ 含义为在一个大单元中由于三个未破坏单元平均承受一个破坏单元转移来的应力而全部破坏的概率。结合式(1)、(3), 可得一个大单元破坏的概率为

$$\begin{aligned} P_1^{(2)} = {} & P_1^4 + 4P_1^3(1- P_1)P_{4,1} + 6P_1^2(1- P_1)^2 \cdot [P_{2,1}^2 + \\ & 2P_{2,1}(1- P_{2,1})P_{4,2}] + 4P_1(1- P_1)^3 \cdot \{P_{4/3,1}^3 + \\ & 3P_{4/3,1}^2(1- P_{4/3,1})P_{4,4/3} + 3P_{4/3,1}(1- P_{4/3,1})^2 \cdot \\ & [P_{2,4/3}^2 + 2P_{2,4/3}(1- P_{2,4/3})P_{4,2}]\} \end{aligned} \tag{4}$$

式中 $P_1^{(2)}$ 为大单元破坏概率, 而 P_1 为小单破坏概率。两个大小单元是重正化过程中临近的尺度。

为了求解式(4), 首先要假定概率 P_1 的具体函数形式。针对岩石的二维情况, 可以把岩石分成许多相当细观程度的单元, 此时所有的岩石细观单元都可以认为只具有线弹性性质, 但宏观力学性态仍为非线性。由于每个单元所含的缺陷不一样, 细观单元强度也不一样, 所含缺陷越多, 细观单元强度越小。引入统计学理论假定这些细观单元强度符合某种统计分布, 一般 Weibull 统计分布通常可以作为岩石材料强度的一种分布[12], 即

$$P_a = 1- \exp[- (a\sigma/\sigma_0)^m] \tag{5}$$

式中 P_a 为单元破坏强度小于应力 $a\sigma$ 的概率; σ_0 为单元平均强度; a 为系数, 代表 Weibull 分布形态差别; m 为概率分布的形态系数, 反映单元强度的非均匀性, 因此也可作为岩石的均质度参数, m 越大表示岩石材料越均匀。当 $a = 1$, 就是标准的 Weibull 分布, 即

$$P_1 = 1- \exp[- (\sigma/\sigma_0)^m] \tag{6}$$

结合式(5)、(6), 得到 P_a 和 P_1 的关系式为

$$P_a = 1- (1- P_1)^{am} \tag{7}$$

当 $m = 2$, 把式(2)和式(7)代入式(4), 得到单元只有一个参数 P_1 的破坏概率, 虽然以上推导过程只局限于尺度 1 和 2 中, 但对于更高尺度也具有普适性。对于尺度 r, 具有如下关系:

$$\begin{aligned} P_1^{(r+1)} = {} & (P_1^{(r)})^4 + 4(P_1^{(r)})^3[1- P_1^{(r)} - (1- P_1^{(r)})^8] + \\ & 6(P_1^{(r)})^2[1- P_1^{(r)} - (1- P_1^{(r)})^4]^2 + 12(P_1^{(r)})^2 \cdot \\ & [1- P_1^{(r)} - (1- P_1^{(r)})^4][(1- P_1^{(r)})^4 - (1- P_1^{(r)})^8] + \\ & 4P_1^{(r)}[1- P_1^{(r)} - (1- P_1^{(r)})^{8/3}] + 12P_1^{(r)}[1- P_1^{(r)} - \\ & (1- P_1^{(r)})^{8/3}]^2[(1- P_1^{(r)})^{8/3} - (1- P_1^{(r)})^8] + 12P_1^{(r)} \cdot \\ & [1- P_1^{(r)} - (1- P_1^{(r)})^{8/3}][(1- P_1^{(r)})^{8/3} - (1- P_1^{(r)})^4]^2 + \\ & 24P_1^{(r)}[1- P_1^{(r)} - (1- P_1^{(r)})^{8/3}] \cdot [(1- P_1^{(r)})^{8/3} - \\ & (1- P_1^{(r)})^4][(1- P_1^{(r)})^4 - (1- P_1^{(r)})^8] \end{aligned} \tag{8}$$

根据重正化群理论的尺度不变性假定, 岩石临界破坏时所有尺度单元的破坏概率相同, 即 $P_1^{(r+1)} = P_1^{(r)}$, 这样上式只有一个未知数 $P_1^{(r)}$, 但由于方程十分复杂, 利用解析方法仍难于求得方程的解, 只得借助数值迭代方法。显然 0 和 1 是方程两个稳定解, 而 $P_1^{(r+1)} = P_1^{(r)} = P^* = 0.1707$ 为方程不稳定解, 它是系统失稳破坏区域和稳定变形区域的临界点。若 $P_1 < P^*$, 系统迭代的最后破坏概率 $P_1^{\infty} = 0$, 表明系统没有破坏; 相反, 若 $P_1 > P^*$, $P_1^{\infty} = 1$, 表明系统已经破坏。把临界概率代入式(6), 得到岩石的峰值强度 σ^* 为,

$$\sigma^* = 0.4327\sigma_0 \tag{9}$$

式(9)表明: 岩石的峰值强度值和岩石细观单元的平均强度 σ_0 密切相关, 且小于 σ_0。此结果可能由细观单元强度的离散性和破坏过程中的应力转移造成。

以上所有分析都基于细观单元强度 Weibull 分布中形态参数 $m = 2$ 的假定, 显然均质度参数 m 也是岩石峰值强度重要影响因素之一。文献[16]利用数值计算方法(RFPA)详细研究了参数 m 对岩石峰值强度的影响规律, 均质度参数 m 越大, 岩石峰值强度越高。也就是说, 岩石越均匀, 岩石峰值强度越高。结合式(7)和式(8), 可以得到迭代方程的一般函数形式:

$$\begin{aligned} P_1^{(r+1)} = {} & (P_1^{(r)})^4 + 4(P_1^{(r)})^3[1 - P_1^{(r)} - (1 - P_1^{(r)})^{4m}] + \\ & 6(P_1^{(r)})^2[1 - P_1^{(r)} - (1 - P_1^{(r)})^{2m}]^2 + 12(P_1^{(r)})^2 \cdot \\ & [1 - P_1^{(r)} - (1 - P_1^{(r)})^{2m}][(1 - P_1^{(r)})^{2m} - \\ & (1 - P_1^{(r)})^{4m}] + 4P_1^{(r)}[1 - P_1^{(r)} - (1 - P_1^{(r)})^{4m/3}] + \\ & 12P_1^{(r)}[1 - P_1^{(r)} - (1 - P_1^{(r)})^{4m/3}]^2[(1 - P_1^{(r)})^{4m/3} - \\ & (1 - P_1^{(r)})^{4m}] + 12P_1^{(r)}[1 - P_1^{(r)} - (1 - P_1^{(r)})^{4m/3}] \cdot \\ & [(1 - P_1^{(r)})^{4m/3} - (1 - P_1^{(r)})^{2m}]^2 + 24P_1^{(r)}[1 - P_1^{(r)} - \\ & (1 - P_1^{(r)})^{4m/3}][(1 - P_1^{(r)})^{4m/3} - (1 - P_1^{(r)})^{2m}] \cdot \\ & [(1 - P_1^{(r)})^{2m} - (1 - P_1^{(r)})^{4m}] \end{aligned} \tag{10}$$

令 $P_1^{(r+1)} = P_1^{(r)}$, 和求解方程(9)过程一样, 利用迭代方法求得 m 为 1.5, 3, 5 和 10 时系统临界破坏概率 P^* 分别为 0.2286, 0.1154, 0.0672 和 0.0313。图 2 为不同 m 条件下求解系统破坏概率的迭代过程。同样可以求得不同 m 岩石的峰值强度, 见表 1。结果表明: 岩石峰值强度随着均质度 m 的增加而逐渐增加, 这一趋势和文献[16]的结果完全一致。

表 1　具有不同 m 的岩石峰值强度

Table 1　The peak strength of rocks with different m

m	P^*	σ^*/σ_0
1.5	0.2286	0.4067
2	0.1707	0.4327
3	0.1154	0.4968
5	0.0672	0.5869
10	0.0313	0.7083

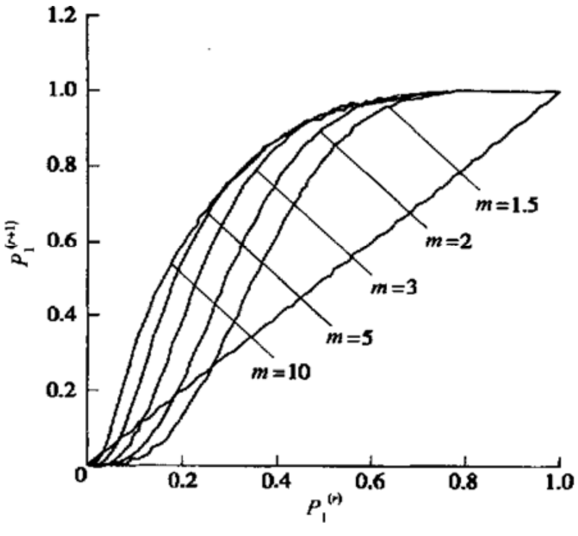

图 2　求解临界概率 P^* 的迭代过程

Fig. 2　The iterative process of the critical probability P^*

3　数值模拟

随着计算机软硬件的快速发展, 数值模拟已成为揭示脆性岩石材料变形和破坏重要手段之一。由东北大学唐春安教授领导的课题组独自开发的专门模拟岩石破坏过程的数值模拟软件 RFPA(rock failure process analysis code)[13~18], 它通过赋予单元强度和弹性模量一个 Weibull 统计分布函数来实现岩石材料的非均匀性, 这种材料单元的赋值原理和分布与重正化群模型一样。

模型由 150 × 150 个单元组成, 尺寸为 100 mm × 100 mm。为了模拟实验室里试样和加载板之间的摩擦效应, 在试样的两个端部加了加载板, 加载板的尺寸为 10 mm × 100 mm。尽管细观尺度上单元非常均匀, 只有一种材料参数, 但宏观尺度上试样具有非均匀性。单元强度的门槛值在宏观上是一种统计分布, 但对于确定的单元而言是固定不变的。

RFPA 采用位移加载方法。当试样端部位移一步步增加时, 一些单元将逐渐破裂, 同时模型中的应力和变形将重新分布以达到模型的应力平衡, 破裂单元强度只有先前单元强度的 10%。随着破裂单元的增多, 试样经历了一个连续破坏过程。从某种意义上讲, RFPA 模拟了岩石细观破裂演化直至宏观破裂的过程, 同时破裂单元可以作为微破裂源。

图 3 为模型 $m = 2$ 时在不同加载步中破坏单元的分布, 同时它也表示试样在加载过程中微破裂的空间分布演化情况。每一个圆圈代表一个微破裂, 其直径代表微破裂释放能量的大小, 圆圈越大, 微破裂释放的能量也越多。白圆圈表示当前步拉破坏的微破裂, 灰圆圈表示当前步压缩破坏的微破裂单元, 而黑圆圈则为所有先前产生的微破裂。模拟结果发现, 微破裂演化可分成三

个阶段: 初始阶段 (图 3(a) 、(b)) , 微破裂随机孤立地分布于整个试样中, 试样均匀变形, 微破裂之间的相互作用并不明显; 第二阶段(图 3(c) 、(d)) , 微破裂开始聚集在某些区域, 这种微破裂的丛集现象随着变形的增加越来越强烈, 其本质原因就是微破裂的相互作用; 当荷载接近试样的峰值强度时, 就进入第三阶段(图 3(e)) , 此时微破裂集中出现在两个共轭断面上, 试样发生宏观破裂。值得注意的是: 尽管对试样施加的是单轴压缩荷载, 但临近宏观破裂时微破裂大多表现为拉伸破坏, 随后微破裂沿着断面产生(图 3(f)) 。

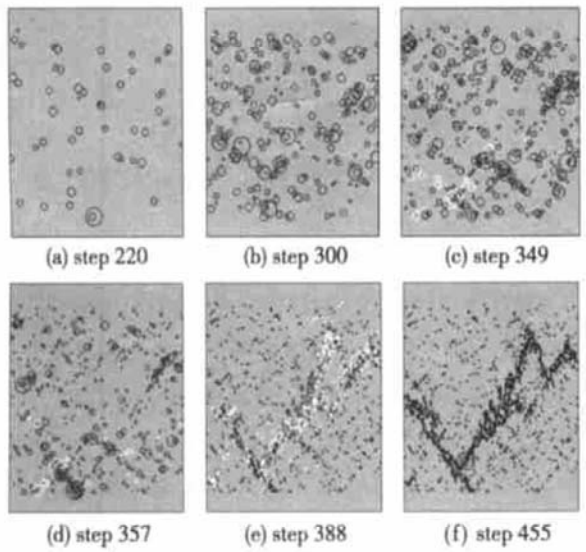

图 3 $m = 2$ 试样加载过程中微破裂演化的数值模拟结果

Fig. 3 The numerical results of micro-fractures of rock failure with $m = 2$

图 4 为试样全应力应变曲线的数值模拟结果($m = 2$) 。峰值强度 75% 之前应力应变曲线基本保持线性, 随后曲线进入非线性阶段, 当试样发生宏观破裂时, 出现一个较大的应力降, 并且伴随着大量微破裂的出现, 产生应力降的原因实质上是试样内部宏观裂纹急速扩展所致。

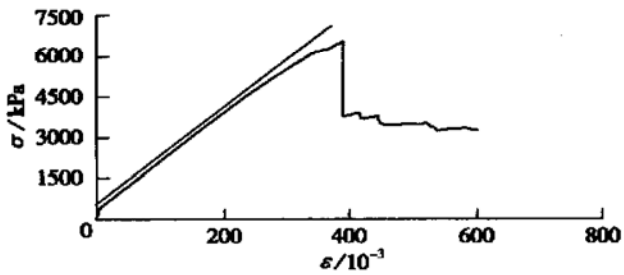

图 4 $m = 2$ 试样应力应变曲线的数值模拟结果

Fig. 4 The numerical results of the stress- strain curve of rocks with $m = 2$

图 5 为 $m = 10$ 试样在不同加载步中微破裂空间分布的演化情况。而图 6 为试样全应力应变曲线的数值模拟结果($m = 10$) 。数值结果表明: $m = 10$ 时, 试样的应力应变曲线几乎完全线性, 而且在试样宏观破裂以前很少有微破裂的产生。因此对于十分均匀的岩石材料而言, 一个或几个微破裂将导致试样宏观破裂。

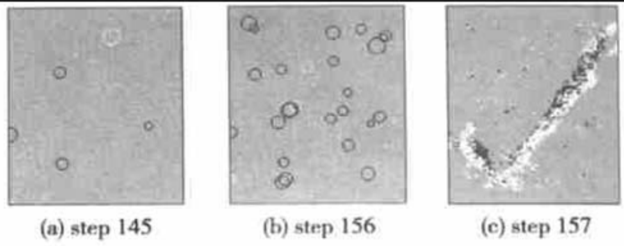

图 5 $m = 10$ 试样加载过程中微破裂演化数值模拟结果

Fig. 5 The numerical results of micro-fractures of rock failure with $m = 10$

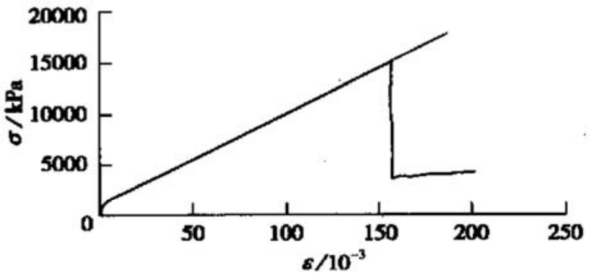

图 6 $m = 10$ 试样应力应变曲线的数值模拟结果

Fig. 6 The numerical results of the stress- strain curve of rocks with $m = 10$

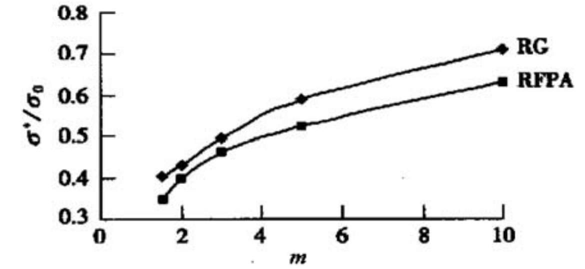

图 7 两种方法得到的岩石峰值强度比较

Fig. 7 The comparison of the peak strengths between the two models

4 讨 论

尽管 RFPA 模拟岩石脆性破裂的原理和重正化群理论完全不同, 但他们也有一些共同之处: 首先岩石材料都被假定为单元强度符合 Weibull 统计分布的平面网络模型; 其次都考虑了单元之间的相互作用和应力转移, 但方法有所区别。在重正化群模型中, 通过引入条件概率来实现从破坏单元到非破坏单元的应力转移, 而在 RFPA 数值模拟中, 通过应力平衡来实现单元之间的应力转移。

对重正化群理论和数值模拟方法 RFPA 得到的岩石材料峰值强度进行比较见图 7。图中显示两种方法得到的岩石峰值强度极其接近, 而且变化趋势也相同, 都随均质度参数 m 增大而增大。从图 7 中还发现: 岩

石试样的峰值强度都低于细观单元的平均强度, m 越大, 两者越接近。

本文所提出的重正化模型进行了许多简化假定, 研究也仅局限于脆性破裂的临界行为, 它不能预测岩石稳定变形直至脆性破裂的整个过程。RFPA 不仅能模拟岩石脆性破裂的临界行为, 而且也能模拟微破裂稳定演化至试样的宏观脆性破裂全过程。显然利用重正化群理论得不到岩石临界破坏的前兆信息, 但它对理解脆性岩石破裂的灾变现象具有十分重要的意义。

5　结　　论

(1) 基于重正化群理论的尺度不变性原理提出了一个岩石脆性破裂的平面网络模型, 模型中单元之间的相互作用和应力转移是岩石脆性破坏的根本原因。利用重正化技术获得了细观单元平均强度和试样宏观峰值强度的定量关系, 从而定性解释了岩石材料强度尺度效应现象。单元的临界破坏概率 P^* 和峰值强度 σ^* 与材料的均质度密切相关, 随着岩石材料均匀性的增大, 细观单元临界破坏概率逐渐减小, 而岩石宏观的峰值强度却逐渐增加。

(2) 利用 RFPA 软件模拟了岩石细观破裂演化直至宏观脆性破裂的全过程, 在试样的加载初期, 细观破裂随机均匀地分布于整个试样, 随着荷载的逐渐加大, 细观破裂产生丛集现象, 最后在临界状态时它们突然全部集中在一个宏观的破裂面上, 形成试样的宏观破裂。对于不同均质度的岩石材料, 由重正化群理论和数值模拟分别得到的峰值强度都非常吻合, 从而说明重正化技术研究岩石脆性破裂临界行为的可靠性。

参考文献:

[1] 卢春生. 无序介质的破坏理论[J]. 力学与实践, 1996, **18**(3): 8- 12.

[2] Wawersik W R, Fairhurst C A. A study of brittle rock failure in laboratory compression experiments[J]. Int J Rock Mech Min Sci, 1970, **7**(4): 561- 575.

[3] Lonkner D A, Byerlee J D. Fault growth and acoustic emissions in confined granite[J]. Appl Mech Rew, 1992, **45**(3): 165- 173.

[4] Xie H. Fractals in Rock Mechanics[M]. Rotterdam: A A Balkema, 1993.

[5] Turcotte D L. Fractals and Chaos in Geology and Geophysics [M]. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 1997.

[6] Hirata T, Satoh T, Ito K. Fractal structure of spatial distribution of microfracturing in rock[J]. Geophys J R Astr Soc, 1987, **90**(9): 369- 374.

[7] Fisher M E. The renormalization group in the theory of critical behavior[J]. Res Mod Phys, 1974, **46**(7): 597- 616.

[8] Binney J J, Dowrick N J, Fisher A J. The Theory of Critical Phenomena: an Introduction to the Renormalization Group[M]. Oxford: Clarendon Press, 1992.

[9] Allegre C J, Mouel J L Le, Provost A. Scaling rules in rock fracture and possible implications for earthquake prediction[J]. Nature, 1982, **297**: 47- 49.

[10] Madden T R. Microcrack connectivity in rocks: a renormalization group approach to the critical phenomena of conduction and failure in crystalline rocks[J]. J Geophys Res, 1985, **88**(B1): 585- 592.

[11] Smalley R F, Turcotte D L, Sara A Solla. A renormalization group approach to the stick-slip behavior of faults[J]. J Geophys Res, 1987, **90**(B2): 1894- 1900.

[12] Hudson J A, Fairhurst C. Tensile strength, Weibull's theory and a general statistical approach to rock failure[A]. The Proceedings of the Southampton 1969 Civil Engineering Materials Conference[C]. 1969. 901- 914.

[13] Tang C A, Kaiser P K. Numerical simulation of cumulative damage and seismic energy release during brittle rock failure(Ⅰ): fundamentals[J]. Int J Rock Mech Min Sci, 1998, **35**(2): 113- 121.

[14] Tang C A. Numerical simulation of progressive rock failure and associated seismicity[J]. Int J Rock Mech Min Sci, 1997, **34**(2): 249- 261.

[15] Chen Z, Tang C, Huang R. A double rock sample model for rockbursts[J]. Int J Rock Mech Min Sci, 1997, **34**(6): 991- 1000.

[16] Tang C A, Liu H, Lee P K K, et al. Numerical studies of the influence of microstructure on rock failure in uniaxial compression (Ⅰ): effect of heterogeneity[J]. Int J Rock Mech Min Sci, 2000, **37**(7): 555- 569.

[17] Tang C A, Tham L G, Lee P K K, et al. Numerical studies of the influence of microstructure on rock failure in uniaxial compression(Ⅱ): constraint, slenderness and size effect[J]. Int J Rock Mech Min Sci, 2000, **37**(7): 571- 583.

[18] Tang C A. A new approach to numerical method of modeling geological processes and rock engineering problems[J]. Engineering Geology, 1998, **49**(5): 207- 214.