

有限元分析的位移控制法及其应用

Displacement-controlled method in finite element analysis and its applications

郑宏¹, 李焯芬², 谭国焕², 葛修润¹

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所, 湖北 武汉 430071; 2. 香港大学土木工程系, 香港)

摘要: 对于非线性问题的有限元分析, 位移控制法(DCM)比常用的载荷控制法(LCM)有着更广泛的应用和更强的适应能力。但因DCM在求解技术上的一些难度, 限制了其在岩土力学中的应用。本文利用Sherman-Morrison定理, 使得DCM仅需很少的运算量, 对经典的LCM程序做少量的修补, 即可造就一个有良好数值特性的DCM程序。

关键词: 有限元; 位移控制法(DCM); 载荷控制法(LCM); 极限分析; 应变软化

中图分类号: TU 457; O 241. 82

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2001)01-0081-05

作者简介: 郑宏(1964-), 男, 湖北人, 1985年毕业于东北工学院机械系, 博士, 研究员, 主要从事岩土力学数值方法的研究。

ZHENG Hong¹, C. F. Lee², L. G. Tham², Ge Xiurun¹

(1. Institute of Rock and Soil Mechanics, the Chinese Academy of Science, Wuhan 430071, China; 2. Department of Civil Engineering, the University of Hong Kong, Hong Kong, China)

Abstract: For the finite element analysis of nonlinear problems, the displacement-controlled method (DCM) has a more extensive application scope and a more powerful ability than the load-controlled method (LCM) in common use. However, due to difficulties of DCM in solving procedure, the application of DCM in geomechanics has been restricted. By means of Sherman-Morrison theorem, the solving procedure of DCM needs only little computation but has very good numeric stability. Moreover, the program structure of DCM is as simple as that of LCM.

Key words: finite element; displacement-controlled method (DCM); Load-controlled method (LCM); Limit analysis; strain softening

1 引言^{*}

众所周知, 经典的LCM是在一组给定的节点载荷增量下, 求解与其相应的节点位移增量。从本质上讲, LCM无法达到或通过载荷-位移空间中平衡路径的极值点, 因而对于像求解应变软化等问题, LCM常常是无能为力的^[1]。

即使对于象求解理想弹塑性体的极限载荷这类简单问题, LCM也需要采用试凑法^[2], 即不断地改变载荷水平, 直到在两个充分接近的载荷水平下, 较低水平的载荷收敛, 而稍高一点的载荷不收敛, 就认为结构的极限载荷位于这两个载荷水平之间。显然, 这种试凑法不仅在技术上有些粗糙, 而且不收敛并不一定意味着结构已经崩溃^[1]。笔者的计算实践表明, 本构积分误差过大或载荷增量过大, 皆可能导致不收敛。

为了使计算过程能够平稳到达或通过极值点, 曾有不少学者致力于这方面的研究^[1~10], 典型的有虚拟弹簧法^[3]、位移控制法^[4]、弧长法^[5~7]等, Criesfield^[11]和江见鲸^[8]对各种方法的优缺点进行了详细的论述。

若追踪过程中, 结构无Snap-back(快速回跳?)现象^[1], 许多研究(如文献[10]等)都表明, DCM是最有效、最稳定的求解方法。事实上, Snap-back现象一般仅出现在结构的大变形分析中, 岩土工程中很少有此现象。因此, DCM可作为岩土工程非线性问题的通用

求解器。但是由于DCM的系数矩阵不再对称, 给求解过程增添了不少麻烦, 而且DCM程序设计也较LCM复杂得多, 因而DCM一直未能在岩土工程非线性分析中得到广泛的应用。

本文借助Sherman-Morrison定理, 仅需很少的运算量就可求得非对称的DCM方程组的解以及载荷-位移空间中的平衡路径, 而且此过程仅需对经典的LCM程序略作增改。特别指出的是, 本文所建议的方法, 有良好的数值稳定性, 这可从文中的说明和所附的算例得以验证。

DCM可被用于岩土工程有限元分析的很多场合, 如参数敏感度分析, 计算极限载荷和安全系数, 以及变形全过程分析等等, 但限于篇幅, 本文仅给出了DCM在计算极限载荷及应变软化材料的变形全过程分析中的应用。

2 不动点形式的弹塑性有限元方程

非线性有限元分析大都可归结为在给定的节点增量载荷向量 Δf_{ext} 下, 求相应的节点增量位移向量 Δu , 亦即求解非线性方程组

* 基金项目: 香港 RGC - CA99/00, EG01; 武汉市科委资助项目 (991002024)

收稿日期: 2001-02-09

$$\mathcal{F}(\Delta u) = \mathcal{F}_{\text{int}}(\Delta u) - \mathcal{F}_{\text{ext}} = 0 \quad (1)$$

式中 $\mathcal{F}(\Delta u)$ 为非平衡节点力向量, $\mathcal{F}_{\text{int}}(\Delta u)$ 是增量等效节点内力向量, 定义为

$$\mathcal{F}_{\text{int}}(\Delta u) = \sum_e \int_e B^T \Delta \sigma d\Omega \quad (2)$$

其中 B 表示应变-位移矩阵, $\Delta \sigma$ 表示任一单元 e 内的某一 Gauss 点的应力增量(依赖于节点位移增量 Δu)。

以弹塑性分析为例, 因为

$$\Delta \sigma = D(\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon_p) = \Delta \sigma_e - \Delta \sigma_p \quad (3a)$$

$$\Delta \sigma_e = D \Delta \varepsilon, \Delta \sigma_p = D \Delta \varepsilon_p \quad (3b)$$

$\Delta \varepsilon$ 和 $\Delta \varepsilon_p$ 分别表示应变增量及塑性应变增量, 它们都依赖于节点位移增量 Δu 。

将式(2), (3)代入式(1)得

$$K \Delta u = \mathcal{F}_{\text{ext}} + \mathcal{F}_p(\Delta u) \quad (4)$$

其中 K 为弹性刚度矩阵, $\mathcal{F}_p(\Delta u)$ 表示伪塑性载荷向量, 定义为

$$\mathcal{F}_p(\Delta u) = \sum_e \int_e B^T \Delta \sigma_p d\Omega = \sum_e \int_e B^T (\Delta \sigma_e - \Delta \sigma) d\Omega \quad (5)$$

定义

$$\Delta u_e = K^{-1} \mathcal{F}_{\text{ext}}, \Delta u_p = K^{-1} \mathcal{F}_p \quad (6)$$

则可写出式(4)的一个等价形式:

$$\Delta u = \Delta u_e + \Delta u_p \quad (7)$$

由于 Δu_p 非线性地依赖于 Δu , 因此节点位移增量 Δu 可被视作非线性算子 $T: R^n \rightarrow R^n$,

$$T(\Delta u) = \Delta u_e + \Delta u_p(\Delta u) \quad (8)$$

的一个不动点, 这里 n 是节点自由度总数。

将有限元方程组写成式(4)的一个直接好处是便于处理非关联流动。因为在考虑非关联流动时, 切线刚度是非对称的, 其次是便于统一处理材料非线性和接触非线性^[11], 第三是可以避免弹塑性分析中可能出现的伪卸载(Pseudo-unloading)现象^[1], 等等。

由于式(4)是 Δu 的非线性方程组, 一般情况需通过迭代来求解, 它的一个迭代格式为

$$\left| \begin{array}{l} \text{给定 } \Delta u^0, \text{ 解方程组} \\ K \Delta u^{i+1} = \mathcal{F}_{\text{ext}} + \mathcal{F}_p(\Delta u^i), i = 0, 1, \dots \end{array} \right. \quad (9)$$

其中 i 为迭代次数。显然式(9)的收敛性等价于初应力法。

3 位移控制法(DCM)

一般情况下, 我们可将一个增量步的载荷增量 $\mathcal{F}_{\text{ext}}$ 分解为比例加载部分 $\Delta m f_d$ 和固定部分 $\mathcal{F}_0$, 即

$$\mathcal{F}_{\text{ext}} = \Delta m f_d + \mathcal{F}_0 \quad (10)$$

其中标量 Δm 为载荷乘子 m 的增量, m 反映了结构关

于载荷分布向量 f_d 的过载能力。考虑到 m 总是从零开始变化的, 实际求解时, 我们可先求得对应于 $\mathcal{F}_{\text{ext}} = \mathcal{F}_0$ 的解后, 再求 $\mathcal{F}_{\text{ext}} = \Delta m f_d$ 的解, 因此, 可不失一般性地假定 $\mathcal{F}_0 = 0$, 并将式(10)代入式(4)得

$$K \Delta u = \Delta m f_d + \mathcal{F}_p \quad (11)$$

经典的 LCM 实际上是令 Δm 为一系列常数求解相应的 Δu , 前面已经指出了这一方法的局限。现令 Δm 待定, 为使式(11)定解, 可指定的 Δu 某一分量 Δu_j 为已知的 Δu_j , 重新排列式(11)得

$$K \Delta \hat{u} = \Delta q \quad (12a)$$

式中 K 表示用 $-f_d$ 去替换 K 的第 j 列而得的矩阵, 即

$$K = [K_1, \dots, K_{j-1}, -f_d, K_{j+1}, \dots, K_n] \quad (12b)$$

$$\Delta \hat{u} = (\Delta u_1, \dots, \Delta u_{j-1}, \Delta m, \Delta u_{j+1}, \dots, \Delta u_n)^T \quad (12c)$$

$$\Delta q = -\Delta u_j K_j + \mathcal{F}_p(j \text{ 为非求和指标}) \quad (12d)$$

$K_i (i = 1, \dots, n)$ 表示 K 的第 i 个列向量。稍后我们将看到这里仅是在 Δq 中形式上用到了 K_j , 而在程序中并不需要另外再存储 K_j 。

式(12)是关于 $\Delta m - \Delta u$ 非线性方程组, 一般情况下, 仍需采用迭代法求解

$$\left| \begin{array}{l} \text{给定 } \Delta u^0 \text{ 其中 } \Delta u_j^0 = \Delta u_j \\ K \Delta \hat{u}^{i+1} = \Delta q^i, i = 0, 1, \dots \end{array} \right. \quad (13)$$

4 解 法

由于 DCM 的系数矩阵 K 不再呈对称带状, 而且一般情况下 f_d 的数量级远低于 K 的数量级, 导致 K 的病态较 K 严重。直接求解不仅会成倍地增加计算量及存贮量, 还可能导致数值不稳定性。这些都被认为是 DCM 的严重不足^[8]。为解决这些问题, 一般需采用分步求解技术(凝聚算法)^[11], 即先通过凝聚求得 Δm , 再回代求出 Δu , 这样做可确保较好的数值稳定性, 但程序结构较 LCM 复杂得多, 且在追踪平衡路径时的运算量非常大。

为改善 DCM 的求解技术, 我们先不加证明地引入下面的定理^[12]:

Sherman Morrison 定理 设 A 为一非奇异的 n 阶方阵, s, t 是两个 n 阶向量, 如果 $1 + t^T A^{-1} s \neq 0$, 则矩阵 $A + st^T$ 也非奇异, 且

$$(A + st^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} s t^T A^{-1}}{1 + t^T A^{-1} s} \quad (14)$$

对这一定理的一个直接应用是: 如果已经求得方程组 $Ax = b$ 的解, 则在求解 $(A + st^T)y = b$ 的解时, 毋需再对 $A + st^T$ 求逆, 而仅需计算 $A^{-1}s$ 即可求得 y 。

注意到 K 可以表示为

$$\bar{K} = K - se_j^T \quad (15)$$

其中向量

$$s = K_j + f_d \quad (16)$$

e_j 是 n 阶单位矩阵的第 j 个列向量。由 Sherman-Morrison 定理(式(14))可得

$$K^{-1} = K^{-1} + \frac{v' e_j^T K^{-1}}{1 - v_j'} \quad (17)$$

其中 v' 是线性方程组

$$Kv' = s \quad (18)$$

的解, v' 是一常向量, 在迭代过程中保持不变。由式(16)可知, v' 可分解为 v'' 和 v 两个向量, 即

$$v' = v'' + v \quad (19)$$

而 v'' 和 v 则分别是下列两个方程组的解:

$$Kv'' = K_j \quad (20)$$

$$Kv = f_d \quad (21)$$

根据 Gram 法则可知方程组(20)的解为

$$v'' = e_j \quad (22)$$

所以 v' 为

$$v' = e_j + v \quad (23)$$

用 Δq^i 右乘式(17)两边可得方程组(13)的解为

$$\Delta \hat{u}^{i+1} = \Delta h^{i+1} + \beta^{i+1} v' \quad (24)$$

其中向量 Δh^{i+1} 是方程组

$$K \Delta h^{i+1} = \Delta q^i \quad (25)$$

的解。式(24)中的系数 β^{i+1} 定义为

$$\beta^{i+1} = \frac{\Delta h_j^{i+1}}{1 - v_j} = - \frac{\Delta h_j^{i+1}}{v_j} \quad (26a)$$

v_j 是向量 v 的第 j 个分量, 等等。

注意到方程(25)的右端 $\Delta q^i = -\Delta u_j K_j + \mathcal{A}_p^i$, 采用类似于方程(18)的处理, 可将其解表示为

$$\Delta h^{i+1} = -\Delta u_j e_j + \Delta w^{i+1} \quad (27)$$

其中向量 Δw^{i+1} 是下列方程组的解

$$K \Delta w^{i+1} = \mathcal{A}_p^i \quad (28)$$

将式(27)代入式(24), 整理得

$$\Delta \hat{u}^{i+1} = \alpha^{i+1} e_j + \beta^{i+1} v + \Delta w^{i+1} \quad (29)$$

系数 α^{i+1} , β^{i+1} 为

$$\alpha^{i+1} = \beta^{i+1} - \Delta u_j, \beta^{i+1} = \frac{\Delta u_j - \Delta w_j^{i+1}}{v_j} \quad (26b)$$

因载荷乘子 Δm^{i+1} 是 $\Delta \hat{u}^{i+1}$ 的第 j 个分量, 所以将式(26b)代入式(29)得

$$\Delta m^{i+1} = \beta^{i+1} \quad (26c)$$

通过上述分析, 迭代过程中, 我们仅需求解对称正定方程组(28)得到向量 Δw^{i+1} , 然后再通过式(29)对 Δw^{i+1} 进行修正, 即可得到式(13)的解 $\Delta \hat{u}^{i+1}$ 。由于式(28)的性态要比式(13)的性态好得多, 因此, 本文所建

议的方法在数值上也是稳定的。值得注意的是式(29)中并没有含 K_j , 所以在程序中无需象凝聚算法那样另辟数组存储 K_j 。

此外, $\bar{K}$ 非奇异要求 $v_j \neq 0$, 而这是易于满足的, 所以本文所建议的求解过程总是可行的。

5 载荷-位移空间的平衡路径

由于多数情况下都要控制结构上某些关键点的变形, 所以, 如果我们能够提供这些点的全过程变形-载荷曲线, 对于工程设计无疑是有帮助的。

记 $\xi = \begin{bmatrix} m \\ u \end{bmatrix}$ 代表 $n+1$ 维载荷-位移空间($m-u$ 空间)中的一个点。给定 $m-u$ 空间中的一个点列 ξ_k , $k=1, 2, \dots$, 如果它们满足

$$\xi_{k+1} = \xi_k + \Delta \xi_k \quad (30)$$

$\Delta \xi_k$ 是方程组(12)的解, 依次连接这些点, 将近似地绘出该结构关于载荷分布向量 f_d 的平衡路径。在由 ξ_k 过度到 ξ_{k+1} 时, 虽然最大位移增量 Δu_j 可能会变为 $\Delta u_j'$, 但我们并不需要重新形成和分解刚度矩阵 K , 而凝聚算法则需重新形成 K 并将其向第 j' 个自由度凝聚(相当于一次 LDL^T 分解)。因此本文所建议的算法在追踪平衡路径时计算量要远远低于凝聚算法。

6 算例

本文所建议的算法已被嵌入岩土工程实用分析软件 Geocad, 它是由香港赛马会边坡中心和武汉市科委共同资助的开发项目, 并由以下三个程序组成:

(1) 功能强劲的建模器 Builder, 对于任意复杂区域和节理网络, Builder 都可全自动地生成高质量的网格而无需添加任何辅助线。

(2) 稳定高效的内核 Kernel, 可求解弹塑性接触问题^[13], 应变软化问题, 液固耦合问题等等。特别指出的是对于令人头疼的不收敛问题, Kernel 已经有了一整套较为成熟的解法。

(3) 灵活方便的后处理器 Viewer, 可多方位地满足用户不同层次的需求。

Geocad 已被成功地用于求解三峡工程的船闸边坡、坝体一基础的稳定性计算, 香港地区的滑坡分析等工程问题, 其中一些问题是在设计单位使用其它部分商用软件求解失败后承接的。以后我们将陆续发表 Geocad 所求解的一些极具挑战性的工程算例。

例1 极限载荷

对理想弹塑性材料, 若平衡路径上的一区间 $[\xi_k, \xi_{k+1}]$ 满足

$$\left| \frac{\alpha \Delta m_k}{\Delta t_{ij}} \right| < \eta \quad (31)$$

ξ_{k+1} 可以被认为是一极值点, 相应地 m_{k+1} 为极限载荷乘子。这里 η 是给定的误差, 可取为 $10^{-2} \sim 10^{-5}$, α 是一量纲为长度单位的常量, 本文取

$$\alpha = \|v\|_{\infty} = \max_i |v_i| \quad (32)$$

v 由式(21)给出。

设一受均布内压 $p_d = 10 \text{ N/mm}^2$ 作用的厚壁圆筒的内外半径分别为 $a (= 10 \text{ m})$ 和 $b (= 10 \text{ m})$, 弹模 $E = 8.67 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$, 泊松比 $\nu = 0.3$ 。假设材料符合 Tresca 准则, 抗拉强度为 $\sigma_s = 17.32 \text{ N/mm}^2$, 将问题视作平面应变。图 1 显示了有限元网格及约束条件, 所有单元均为四边形协调元。由文献[14]可知圆筒的极限内压为 $p_s = \sigma_s \ln \frac{b}{a} \approx 12.01 \text{ N/mm}^2$ 。取 $\eta = 10^{-3}$, 本构积分采用文献[11]所建议的自适应方法, 按照本文所建议的方法求得的极限载荷为 12.03 N/mm^2 , 误差很小。本例和我们所做的其它一些数值实验都表明, 结构的极限分析对网格很不敏感。图 2 给出了内径上 A 点的径向位移-内压曲线。

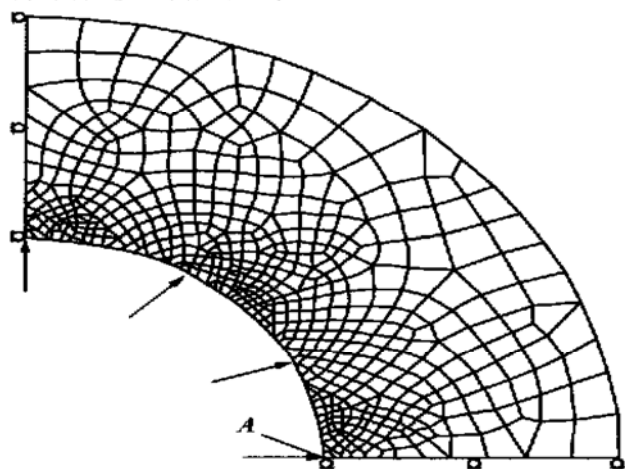


图 1 厚壁圆桶问题的网格(例 1)

Fig. 1 The mesh of the cylinder problem(Example 1)

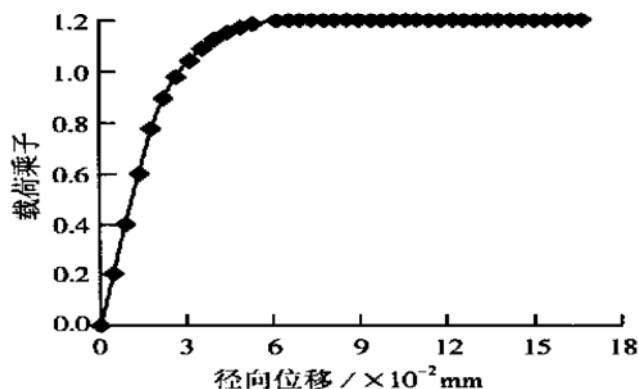


图 2 A 点的径向位移-载荷乘子

Fig. 2 The radial displacement vs. the load multiplier at the point A

例 2 应变软化问题

当结构中含有应变软化材料时, 应充分关注结构的失稳问题。为了预报失稳载荷, 很多学者给出了各种各样的稳定性判定条件, 如文献[17]等。显然全过程的平衡路径提供了判断结构是否稳定的最客观的标准。

图 3 显示了一受均布压力 $p_d = 10 \text{ N/mm}^2$ 作用的地基的有限元网格及其约束条件(利用了对称性条件)。假设地基为 Mohr-Coulomb 线性软化材料, 并服从关联流动法则。初始弹性段的弹性常数 $E = 1.8 \times 10^4 \text{ MPa}$, $\nu = 0.25$; 软化段的弹模 E' 分别取为 $-5\%E$ 和 $-10\%E$ 。峰值强度参数 $c_0 = 1.0 \text{ MPa}$, $\varphi_0 = 30^\circ$; 残余强度参数 $c_r = 20\%c_0$, $\varphi_r = \varphi_0$ 。

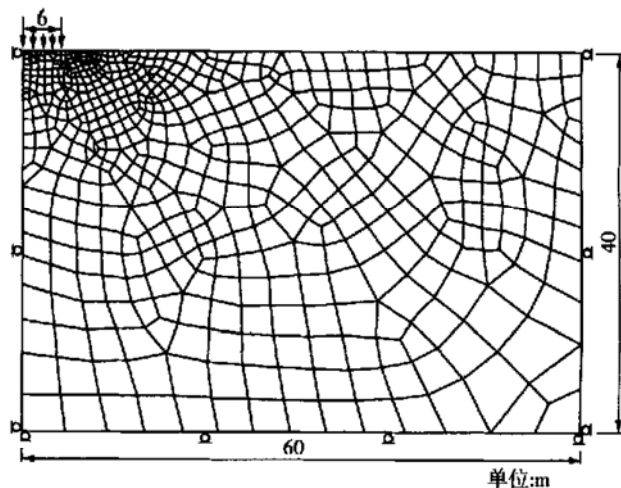


图 3 地基问题的条件图(例 2)

Fig. 3 The condition of the foundation problem(Example 2)

本例没有考虑因引入应变软化模型而导致的应变局部化和网格依赖性问题, 因为这些问题目前尚处在研究阶段, 还没有一个公认合理的求解方案。最新的关于应变局部化和网格依赖性问题的论文可参阅文献[15]。

图 4 显示了两种不同软化速率所对应的载荷-沉降曲线。

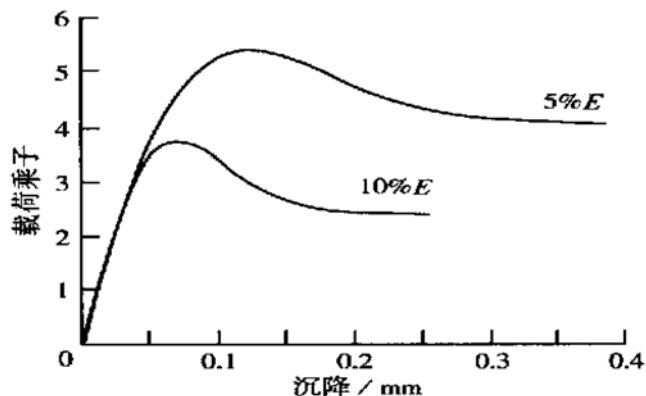


图 4 两个不同软化速率下的沉降-载荷曲线

Fig. 4 The curve of settlement vs. load multiplier with two softening rates

顺便指出,经典塑性理论对软化速率是有限制的,当软化速率较大时,应将其视为弹脆性材料,文献[16]已对这类材料建立了完整的本构理论和相应的数值方法。

7 结 论

本文所建议的 DCM 方程组的求解技术可以在远小于常规的凝聚算法运算量的前提下,稳定高效地追踪平衡路径,而且该方法的程序结构比凝聚算法简捷得多。

利用 DCM 进行极限分析时,对网格的划分通常都不敏感。

参考文献:

- [1] Criesfield M A. Nonlinear finite element analysis of solids and structures[M]. New York: John Wiley & Sons, 1991.
- [2] Smith I M, Griffiths D V. Programming the finite element method[M]. New York: John Wiley & Sons, 1998.
- [3] Wright E W, Gaylord E H. Analysis of unbraced multistory steel rigid frames[J]. J struct div ASCE, 1968, **94**(6): 1141– 1163.
- [4] Batoz J L, Dhatt G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems[J]. Int J Numer Methods Eng, 1979, **14**(8): 1262– 1267.
- [5] Riks E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems[J]. Int J Solids Struct, 1979, **15**(7): 529 – 552.
- [6] Criesfield M A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”[J]. Comput struct, 1981, **13**(1): 55 – 62.
- [7] 苏先樾, 王颖坚, 武际可, 等. 含参数的非线性方程组的数值解法[J]. 计算结构力学及其应用, 1988, **5**(3): 1– 9.
- [8] 江见鲸. 钢筋混凝土结构非线性有限元分析[M]. 西安: 陕西科技出版社, 1994.
- [9] 张宏, 殷有泉. 岩体渐进破坏有限元分析及 NOLM 程序[J]. 固体力学学报, 1983, **4**(2): 219– 225.
- [10] Meek J L, Tan H S. Geometrical nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique[J]. Comput Methods Appl Mech Eng, 1984, **47**(2): 261– 282.
- [11] 郑宏. 岩土力学中的几类非线性问题[D]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 2000.
- [12] Hager W W. Updating the inverse of a matrix[J]. SIAM Review, 1989, **31**(2): 221– 239.
- [13] 郑宏, 葛修润, 李焯芬. 界面问题的混合有限元法[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, **21**(1): 1– 8.
- [14] 王仁, 黄文彬, 黄筑平. 塑性力学引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1992.
- [15] Barja R I, Regueiro R A, Lai T Y. FE modeling of strain localization in soft rock[J]. J Geotech Geoenviron Eng, ASCE, 2000, **126**(4): 335– 343.
- [16] 郑宏, 葛修润, 李焯芬. 脆塑性岩体的分析原理及其应用[J]. 岩石力学与工程学报, 1997, **16**(1): 8– 21.
- [17] 殷有泉, 张宏. 断裂带内介质的软化特性和地震的非稳定模型[J]. 地震学报, 1984, **6**(2): 135– 145.

杭州地下工程研究中心组建成立

21 世纪是地下空间的世纪, 又是我国进入 WTO, 经济建设将进一步飞跃发展的时期。为了适应新的形势和历史条件, 按照国家有关政策和法规, 一个具有独立法人资格的非企业、非赢利性的新型科研机构——杭州地下工程研究中心于最近组建成立。

杭州地下工程研究中心主要从事的业务包括: 各类地下工程和环境岩土工程技术的研究、开发、咨询; 各种危难岩土工程

案例的处理; 外商台商资金与技术的引进; 国内国际技术合作; 学术技术交流; 人才培养、组织会议展览等业务。

该中心下设科研、开发、咨询三职能部, 以及环境岩土工程研究所、施工新技术研究所等专业所。中心的最高决策机构是由沪、杭、宁等地岩土工程及地下工程领域的知名专家学者组成的理事会, 并设学术委员会为学术领导机构。

该中心已与国内外若干高校和科研院所建立了合作关系。

(杭州地下工程研究中心办公室 供稿)