

平面应变条件下主应力轴旋转产生的应变

Strain due to rotation of principal stress axes under plane strain condition

史宏彦¹, 谢定义¹, 汪闻韶²

(1. 西安理工大学 岩土所, 陕西 西安 710048; 2. 中国水利水电科学研究院 岩土所, 北京 100044)

摘要: 以平面应变条件下的无粘性土为例, 提出了一个确定主应力轴旋转条件下主应变增量与主应力方向之间非共轴角的简单方法, 推导出了主应力轴旋转产生的应变增量的计算公式, 通过试验验证了方法和公式的适应性。

关键词: 无粘性土; 平面应变; 主应力轴旋转; 非共轴性; 应变

中图分类号: TU 431

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2001)02-0162-05

作者简介: 史宏彦, 男, 1962年生, 西安理工大学博士研究生, 现为汕头大学土木工程系副教授, 主要从事岩土工程方面的教学与科研工作。

SHI Hong-yan¹, XIE Ding-yi¹, WANG Wen-shao²

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. Institute of Geotechnical Engineering, China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100044, China)

Abstract: Taking cohesionless soil under plane strain condition as an example, a simple method to determine the angle of the non-coaxiality between directions of the principal strain increment and the principal stress is proposed, and the formula to evaluate the strain increments due to the rotation of principal axes is derived. At last, the applicability of the previous method and the formula is investigated based on the experimental results.

Key words: cohesionless soil; plane strain; rotation of principal stress axes; non-coaxiality; strain

1 引言^y

应力是定义在某一趋于零的微小面积上的作用力的集度。由于力是一个矢量, 因此, 应力也是一个矢量, 它具有双重作用效应: 一是数值大小的作用效应, 二是方向变化的作用效应。应力矢量的方向变化可以用主应力轴的旋转来反映。许多试验和数值模拟结果表明^[1~5], 主应力轴旋转对土的变形具有重要的影响, 是一个不容忽视的因素。然而, 在目前众多的本构关系中, 几乎均将应力状态用其三个主应力或球应力和广义剪应力(或八面体上的法向应力和剪应力等)来代表, 这些方法仅考虑了应力矢量的数量作用效应。因此, 在土的本构关系中充分考虑应力矢量的方向作用效应, 是一个具有重要理论和实际意义的问题。

另一方面, 如果某一本构模型只考虑了应力矢量的数量作用效应, 那么只要在该模型中再增加一项反映方向效应所产生的应变, 则这种修正后的本构关系就可以同时考虑应力矢量的数量和方向对变形的作用效应。鉴于此, 本文以平面应变条件下的无粘性土为例, 仅讨论应力矢量的方向作用效应, 包括应力矢量方向变化引起的非共轴角(主应变增量与主应力方向之间的夹角)和应变的计算方法。顺便指出, 本文所述的应力均指的是有效应力, 所有正应力和正应变均以受压为正。

2 应力矢量作用效应的等效分解及其本构关系的一般形式

2.1 应力矢量作用效应的等效分解

为简单起见, 暂不考虑中主应力的影响。设土中某点的应力为 $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}\}$, 大主应力 σ_1 与竖轴 Z 之间的夹角为 α , 则有

$$\sigma_{1,3} = \sigma_m \pm \sigma_m \sqrt{\left(\frac{S_{xx}}{\sigma_m}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xz}}{\sigma_m}\right)^2} \quad (1)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\tau_{xz}}{S_{xx}} = \left(\frac{\tau_{xz}}{\sigma_m}\right) / \left(\frac{S_{xx}}{\sigma_m}\right) \quad (2)$$
$$S_{xx} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}$$

式中 σ_m 为不考虑中主应力 σ_2 影响时的平均有效应力(球应力), 由下式确定:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \quad (3)$$

从式(1)~(3)可以看出:

(1) $\{\sigma\}$ 的作用效应等效于 σ_m , $\frac{S_{xx}}{\sigma_m}$ 和 $\frac{\tau_{xz}}{\sigma_m}$ 的作用效应。

(2) 由于 σ_m 是一个球应力, 具有各向同性性质, 不会引起主应力轴的旋转, 因此引起主应力轴旋转的只

能是 $\frac{S_{xx}}{\sigma_m}$ 和 $\frac{T_{xz}}{\sigma_m}$ 。令

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{S_{xx}}{\sigma_m} = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3} \\ \bar{Y} &= \frac{T_{xz}}{\sigma_m} = \frac{2T_{xz}}{\alpha_2 + \alpha_3}\end{aligned}\quad (4)$$

建立一个 $\bar{X}-\bar{Y}$ 坐标系(见图1), 设 $\{ \sigma \}$ 在该坐标系中位于点 A, 称原点 O 和点 A 构成的矢量为应力比矢量 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, 则有

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \bar{X}\bar{i} + \bar{Y}\bar{j} = |\bar{\boldsymbol{\sigma}}| \bar{r} \\ \bar{S} &= \sigma_m \bar{\boldsymbol{\sigma}}\end{aligned}\quad (5)$$

式中 $\bar{i}, \bar{j}$ 分别为 $\bar{X}, \bar{Y}$ 轴的单位矢量; $\bar{r}$ (矢径) 为 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 的单位矢量, $\bar{r} = \cos 2\alpha \bar{i} + \sin 2\alpha \bar{j}$; $\bar{S}$ 为偏应力矢量。显然, $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\bar{S}}{\sigma_m}$, $\frac{S_{xx}}{\sigma_m}$ 和 $\frac{T_{xz}}{\sigma_m}$ 的作用效应完全可以由 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 等效代换, 而 σ_m 和 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 的作用效应与 $\{ \sigma \}$ 等效。

(3) $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 的模 $|\bar{\boldsymbol{\sigma}}|$ 可以用强度发挥角 φ_{m0} 表示, 而 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 的变化量 $d\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 是由两个相互垂直的分矢量 $d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ss}$ 和 $d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{sr}$ 构成:

$$|\bar{\boldsymbol{\sigma}}| = \sqrt{\bar{X}^2 + \bar{Y}^2} = \sin \varphi_{m0} = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_3} \quad (6)$$

$$d\bar{\boldsymbol{\sigma}} = d|\bar{\boldsymbol{\sigma}}| \bar{r} + |\bar{\boldsymbol{\sigma}}| d\bar{r} = d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ss} + d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{sr} \quad (7)$$

式中 $d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ss}$ 为 $d\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 在矢径 $\bar{r}$ 上的投影; $d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{sr}$ 为 $d\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 在矢径 $\bar{r}$ 法线上的投影, 且

$$d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ss} = d|\bar{\boldsymbol{\sigma}}| \bar{r} = (\cos 2\alpha d\bar{X} + \sin 2\alpha d\bar{Y}) \bar{r} \quad (8)$$

$$d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{sr} = (-2\sin \varphi_{m0} \sin 2\alpha d\alpha) \bar{i} + (2\sin \varphi_{m0} \cos 2\alpha d\alpha) \bar{j} \quad (9)$$

分量 $d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ss}$ 和 $d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{sr}$ 分别反映了 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 的数量和方向变化, 它们的作用效应完全等效于 $d\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 的作用效应, 产生的应变增量就是 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 的数量和方向变化(即 $d\bar{\boldsymbol{\sigma}}$) 产生的应变增量。

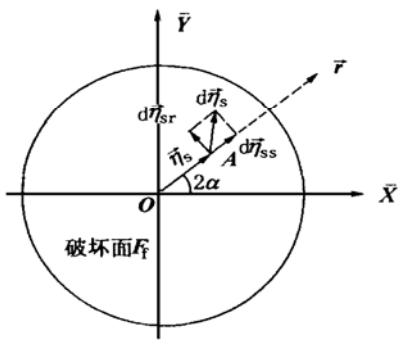


图1 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 的定义及 $d\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 的分解

Fig. 1 Definition of $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ and decomposition of $d\bar{\boldsymbol{\sigma}}$

2.2 本构关系的一般形式

如果用 $\{ \epsilon \} = \{ \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xz} \}$ 表示土中某点的应变, S_p 表示土的性质, S_h 表示应力历史, 则当不考虑荷载的

速率效应时, 有

$$\{ \epsilon \} = F(S_p, S_h, \{ \sigma \})$$

注意到 $\{ \sigma \}$ 的作用效应等效于 σ_m 和 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 的作用效应, 对上式两边微分并将式(7)代入, 有

$$d\{ \epsilon \} = \frac{\partial F}{\partial S_p} dS_p + \frac{\partial F}{\partial S_h} dS_h + \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} d\sigma_m + \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ss} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{sr}$$

在一个微小的加载过程中, 将土性 S_p 的变化隐含在土性参数变化中, S_h 的影响用先期平均有效应力记忆面和先期应力记忆面反映^[6], 上式可简化为

$$d\{ \epsilon \} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} d\sigma_m + \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ss} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{sr}$$

上式右边三项分别反映了 σ_m 的变化、 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 的数值变化和方向变化(即主应力轴旋转)所产生的应变增量, 依次用 $\{ d\epsilon \}$, $\{ d\epsilon \}$ 和 $\{ d\epsilon \}$ 表示, 有

$$d\{ \epsilon \} = \{ d\epsilon \} + \{ d\epsilon \} + \{ d\epsilon \} \quad (10)$$

式(10)表明, 应力状态的变化所产生的应变增量, 等于平均有效应力 σ_m 的变化、应力比矢量 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 的数量变化和主应力轴旋转各自产生的应变增量之和, 而且前两项和后一项分别反映了应力矢量的数量变化和方向变化对变形的作用效应。由此可见, 如果某一本构模型仅考虑了应力矢量的数量变化所产生的应变, 那么, 只要在该模型中再增加一项反映应力矢量的方向变化所产生的应变, 则这种修正后的本构模型就可以同时考虑应力矢量的数量和方向对变形的作用效应。

应当指出的是, 由于中主应力 $\alpha_2 = \alpha_3$ 方向固定不变, 仅有大、小主应力轴的旋转, 并且小主应力方向角 $\bar{\alpha} = \alpha + 90^\circ$, 因此 α 和 $\bar{\alpha}$ 中只有一个是独立的, $\{ d\epsilon \}$ 仅由 $d\alpha$ 或 $d\bar{\alpha}$ 产生。此外, 根据微分理论, 计算 $\{ d\epsilon \}$ 时 σ_m 和 $|\bar{\boldsymbol{\sigma}}|$ 均应保持不变, 因此, 这里的主应力轴旋转也就是通常所说的主应力轴纯旋转。

3 非共轴角的确定

试验及数值模拟结果表明^[2~5], 土在受荷变形过程中, 除在主应力条件下外, 主应力、主应力增量与主应变、主应变增量的方向一般是不相同的。这种特性通常简称为非共轴性。非共轴性在数量上常用主应变增量与主应力方向之间的夹角(称为非共轴角)来反映, 它是土在变形过程中表现出的一种基本性质。只有正确考虑了该性质的本构模型才能真实反映土的实际变形特性。

3.1 破坏面 F_f

对于均质各向同性无粘性土, 可以证明, 不论是否考虑中主应力的影响, 破坏面的方程均可表示为^[6]

$$\bar{X}^2 + \bar{Y}^2 = R_f^2 \quad (11)$$

式中 R_f 为破坏面的半径。若不考虑 α_2 的影响, R_f

$= \sin \varphi$; 反之, $R_f = \sin \varphi_{ps} \approx \sin(9\varphi/8)$, φ_{ps} 和 φ 分别为考虑和不考虑中主应力影响时土的有效内摩擦角。

天然沉积的无粘性土一般具有水平-垂直正交各向异性, 抗剪强度的最弱面接近于水平面, 其破坏面方程可近似表示为

$$(\bar{X} - \bar{X}_f)^2 + \bar{Y}^2 = R_f^2 \quad (12)$$

$\bar{X}_f$ 反映了抗剪强度在竖向和水平向的差异, 若 $\bar{X}_f = 0$, 则表示土是均质各向同性的。

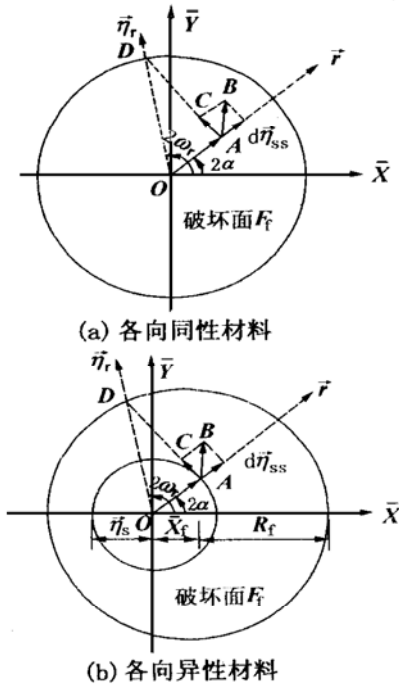


图 2 $\vec{n}_r$ 的确定

Fig. 2 Determination of $\vec{n}_r$

3.2 非共轴角的确定方法

设主应力方向变化 $d\bar{\pi}_{sr}$ 产生的应变增量 $\{d\epsilon\} = \{d\epsilon_x, d\epsilon_z, d\gamma_{xz}\}$, 大主应变增量 $d\epsilon_1$ 与竖轴 Z 之间的夹角为 ω , 则相应于 $d\epsilon_1$ 作用方向的单位矢量 $\vec{n}_r$ 为

$$\vec{n}_r = \cos 2\omega \vec{i} + \sin 2\omega \vec{j}$$

试验资料分析整理发现, 对于各向同性及水平-垂直正交各向异性的土, $\vec{n}_r$ 均可用如下简单方法确定: 如图 2, 设 t 和 $t + \Delta t$ 时刻的应力状态分别位于点 A 和 B , $\overrightarrow{AC} = d\bar{\pi}_{sr}$, $\overrightarrow{AB} = d\bar{\pi}_{ss}$, $\overrightarrow{AC}$ 与破坏面 F_f 交于 D 点。连接 O 点和 D 点, 则矢量 $\overrightarrow{OD}$ 的方向就是 $\vec{n}_r$ 的方向, $d\epsilon_1$ 与 σ_1 之间的非共轴角 β 为

$$\beta = \omega - \alpha \quad (14)$$

根据上述方法可以推出 $\vec{n}_r$ 的计算公式。例如对于各向同性材料, 由图 2(a) 有

$$\sin 2\omega = \frac{|\bar{\pi}_{ss}| \sin 2\alpha + \Theta \cos 2\alpha \sqrt{R_f^2 - |\bar{\pi}_{ss}|^2}}{R_f} \quad (15)$$

$$\cos 2\omega = \frac{|\bar{\pi}_{ss}| \cos 2\alpha - \Theta \sin 2\alpha \sqrt{R_f^2 - |\bar{\pi}_{ss}|^2}}{R_f} \quad (16)$$

$$\tan 2\beta = \Theta \sqrt{\frac{R_f^2}{|\bar{\pi}_{ss}|^2} - 1} \quad (17)$$

式中 当 $d\alpha > 0$ 时, $\Theta = 1$; $d\alpha < 0$ 时, $\Theta = -1$ 。对于水平-垂直正交各向异性材料, 从图 2(b) 同样可以推出 $\vec{n}_r$ 和 β 的计算公式, 在此略。

4 主应力轴旋转产生的应变增量 $\{d\epsilon\}$

4.1 三种应力-剪胀关系

松岗元 (Matsuoka) Rowe 和笔者分别基于强度发挥面理论、最小能比原理和能量守恒原理^[6-8], 推出了三种应力-剪胀关系 (分别称为松岗元、Rowe 和能量平衡应力-剪胀关系)。它们可以统一表示为

$$d\epsilon_{x,z} = 0.5(R_v \pm \cos 2\omega) d\epsilon_1 \quad (18)$$

$$d\epsilon_1 = \frac{d\gamma_{xz}}{\sin 2\omega} = \sqrt{(d\epsilon_z - d\epsilon_x)^2 + d\gamma_{xz}^2} \quad (19)$$

对于松岗元应力-剪胀关系

$$R_v = \sin \varphi_{m0} - \frac{2(\bar{\pi}_{ss} - \mu)}{\lambda} \cos \varphi_{m0}$$

对于 Rowe 应力-剪胀关系

$$R_v = \frac{\tan^2(45^\circ + 0.5\varphi) - \tan^2(45^\circ + 0.5\varphi_{m0})}{\tan^2(45^\circ + 0.5\varphi) + \tan^2(45^\circ + 0.5\varphi_{m0})}$$

对于能量平衡应力-剪胀关系

$$R_v = \sin \varphi - \sin \varphi_{m0} \cos 2\beta$$

其中 β 为非共轴角, $\beta = \omega - \alpha$; ω 为大主应变增量 $d\epsilon_1$ 与竖轴 Z 之间的夹角, 当主应力轴纯旋转时, $\beta = \beta_r$, $\omega = \omega_r$; φ 为相态转换角; λ 和 μ 是两个材料参数; $\bar{\pi}_{ss}$ 取值^[6]: 若不考虑中主应力的影响, $\bar{\pi}_{ss} = \tan \varphi_{m0}$; 反之 $\bar{\pi}_{ss} = \frac{2\sqrt{(1+2\cos \varphi_{m0})(1-\cos \varphi_{m0})}}{3\cos \varphi_{m0}}$ 。

4.2 应变增量 $\{d\epsilon\}$ 的计算公式

$\{d\epsilon\}$ 是由应力矢量的方向变化 $d\bar{\pi}_{sr}$ (主应力轴旋转) 产生的。从式 (9) 可知, $d\bar{\pi}_{sr}$ 在 $\bar{X}$ 轴和 $\bar{Y}$ 轴上的投影分量分别为 $-2\sin \varphi_{m0} \sin 2\alpha d\alpha$ 和 $2\sin \varphi_{m0} \cos 2\alpha d\alpha$, 因 $\bar{X}$ 轴和 $\bar{Y}$ 轴分别与应变增量 $(d\epsilon_z - d\epsilon_x)$ 和 $d\gamma_{xz}$ 相对应, 因此可以假定

$$\begin{aligned} d\epsilon_z - d\epsilon_x &= -\frac{2\sin \varphi_{m0} \sin 2\alpha d\alpha}{G_r} \\ d\gamma_{xz} &= \frac{2\sin \varphi_{m0} \cos 2\alpha d\alpha}{G_r} \end{aligned} \quad (20)$$

式中 G_r 为主应力轴旋转时的剪切模量。可以严格证明^[6,9], 式 (20) 中的 2α 应替换为 $2\alpha - (90^\circ - 2\beta) = 2(\alpha + \beta) - 90^\circ = 2\omega - 90^\circ$, 式 (20) 修改为

$$\begin{aligned} d\epsilon_z - d\epsilon_x &= \frac{2\sin \varphi_{m0} \cos 2\omega d\omega}{G_r} \\ d\gamma_{xz} &= \frac{2\sin \varphi_{m0} \sin 2\omega d\omega}{G_r} \end{aligned} \quad (21)$$

联立式(18)~(21), 求得应变增量的各个分量为

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_{x,x} &= 0.5R_1/R_v \pm \cos 2(\alpha + \beta_r) d\alpha \\ d\gamma_{xz} &= R_1 \sin 2(\alpha + \beta_r) d\alpha \end{aligned} \right| \quad (22)$$

式中

$$R_1 = \frac{2\sin \varphi_{m0}}{G_r} \quad (23)$$

剪切模量 G_r 具有以下特性: ①没有量纲; ②当应力状态趋于破坏面(即 $\frac{\sin \varphi_{m0}}{R_f} \rightarrow 1$) 时应趋于零。因此 G_r 可取为

$$G_r = \bar{G}_0(1 - \frac{\sin \varphi_{m0}}{R_f}) \quad (24)$$

式中 $\bar{G}_0 = \frac{G_0}{\sigma_m}$, $G_0 = kP_a(\frac{\sigma_m}{P_a})^n$, k 和 n 为两个材料参数, P_a 为大气压力。

将上述方法推广应用于粘性土时, 式(3)的平均有效应力 σ_m 应修正为 $\tilde{\sigma}_m$

$$\tilde{\sigma}_m = \sigma_m + \sigma_0 = \sigma_m + c \cot \varphi \quad (25)$$

式中 σ_0 为粘结应力^[10], $\sigma_0 = c \cot \varphi$, c 及 φ 为土的有效抗剪强度指标。

5 试验验证

5.1 非共轴角确定方法的验证

(1) 验证 1

试样由直径 1.6, 3.0 mm、长 50 mm 的铝棒混合堆积而成。试验过程中通过调节应力分量 σ_x , σ_z 和 τ_{xz} , 使大、小主应力和应力比矢量的模 $|\bar{\tau}_s^*|$ (即 φ_{m0}) 始终不变, 从而形成仅有主应力轴纯旋转的圆形应力路径。共进行了 3 个试验^[9], 实测的 β_r 的平均值约为 30° , 该材料的 $\varphi = 24^\circ$ 。因在该类试验中沿铝棒长度方向的 $\sigma_2 = \sigma_y = 0$, 故不考虑中主应力的影响。3 个试验的应力条件以及根据式(17)计算出的 β_r 见表 1。显然, 按照本文方法计算出 β_r 的平均值 $\bar{\beta}_r = 28^\circ$ 与试验值 (30°) 非常接近。

表 1 主应力轴纯旋转条件下 β_r 的计算结果

Table 1 Calculated values of β_r for pure rotation of principal stress axes

试验编号	σ_1 /kPa	σ_3 /kPa	$ \bar{\tau}_s^* $	β_r /($^\circ$)
1	48	32	0.20	30.3
2	50	30	0.25	26.1
3	52	28	0.24	27.0

(2) 验证 2

图 3 为水平-垂直正交各向异性 Toyoura 砂 ($D_r = 70\% \sim 75\%$) 主应力轴纯旋转试验的部分结果^[11]。在该类试验中始终保持 φ_{m0} 为常数, $\sigma_m = 98$ kPa, 中主应

力系数 $b = 0.5$, 仅改变主应力角 α 。 φ_{m0} 分别为 20° , 25° , 30° , 35° , 40° 和 45° , 共进行了 6 个试验。这类试验只反映了 $d\bar{\tau}_s^*$ 的作用效应, 其应力路径为圆。在图 3 中, $X = 0.5(\sigma_z - \sigma_0)$, $Y = \tau_{x0}$ (σ_z , σ_0 和 τ_{x0} 分别为竖向、径向正应力和剪应力)。显然, 这里的 X 和 Y 与式(4)定义的 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$ 具有相同的物理意义。

图 3 所示的破坏面完全可用式(12)描述。其中 $\bar{X}_f = 0.11$, $R_f = 0.74$ 。实测的 $\omega - \alpha$ 关系见图 4。根据前述确定 $\bar{n}_r^*$ 方法的计算结果(实线)与实测结果的比较见图 4, 显然两者能够很好地吻合。

应当指出的是, 由于在砂土的变形中绝大部分为不可恢复的塑性变形(如图 3, 实箭头所示的塑性应变增量矢量与虚箭头所示的总应变增量矢量基本重合), 因此, 将本文方法与仅考虑应力矢量数量变化的弹塑性本构关系相结合时, 上述确定总应变条件下非共轴角的方法, 也可近似用于确定塑性应变条件下的非共轴角。

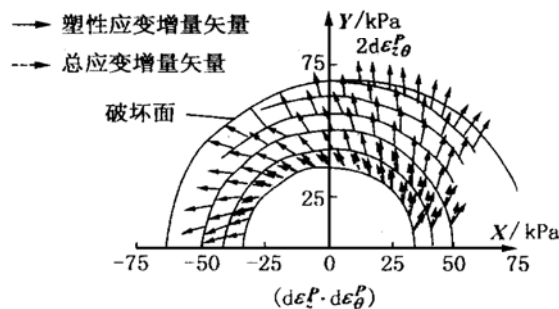


图 3 Toyoura 砂主应力轴纯旋转部分试验结果

Fig. 3 Experimental results on the Toyoura sand for pure rotation of principal stress axes

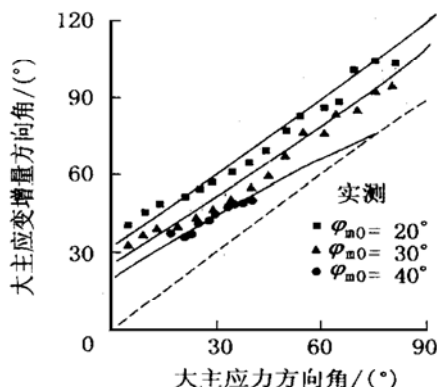


图 4 计算与实测的 ω 比较

Fig. 4 Comparison of calculated and measured ω

5.2 应变增量 $d\epsilon$ 计算公式的验证

试验为表 1 所述的前两个试验 ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$)。如果假定主应力轴旋转过程中 β_r 基本不变, 对式(22)积分, 则可得到如下应变分量的解析解:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{x,x} &= 0.5R_1/R_v \alpha \pm \cos(\alpha + 2\beta_r) \sin \alpha \\ \gamma_{xz} &= R_1 \sin(\alpha + 2\beta_r) \sin \alpha \end{aligned} \right| \quad (26)$$

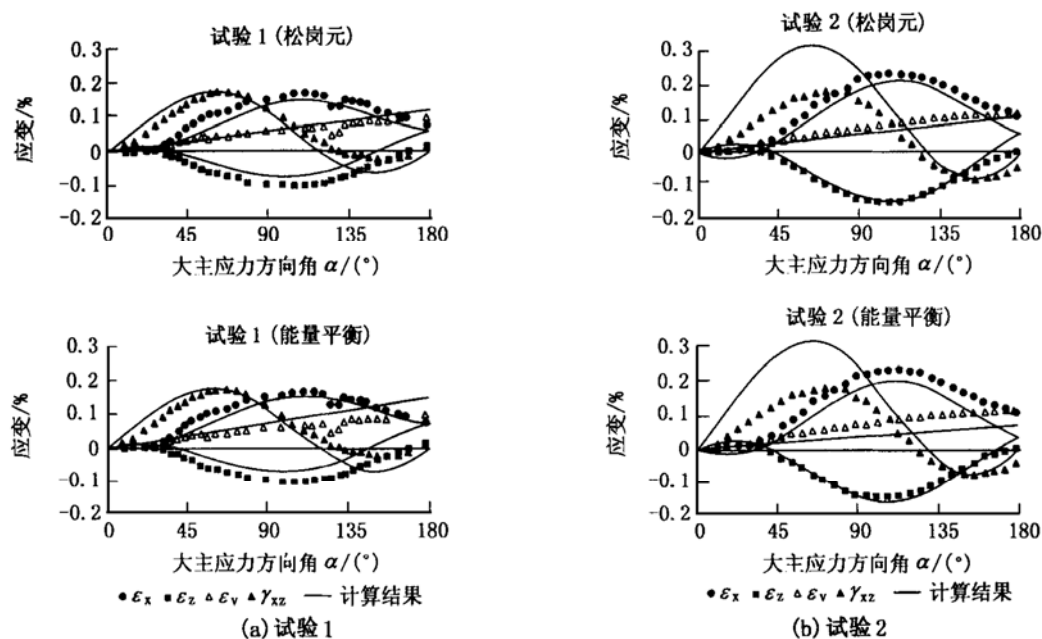


图5 主应力轴纯旋转条件下计算与实测应变的比较

Fig. 5 Comparison of calculated and measured strains for pure rotation of principal stress axes

式中 β_i 及 R_1 分别由式(17)和(23)确定。材料参数为^[6,9]: $\bar{G}_0 = 322.6$, $\lambda = 0.8$, $\mu = 0.19$, $\varphi = 24^\circ$, $\varphi_i = 17.57^\circ$ 。采用松岗元和能量平衡两种应力-剪胀关系的计算结果(实线)与试验结果的比较见图5。从图5可以看出,除试验2起始阶段的剪应变与实测值有一定差别外,其它情况下模型预测结果与试验结果均能较好地吻合。

6 结 语

应力作为一个矢量,除了数值大小的作用效应外,还应包括方向变化的作用效应,但后者正是绝大多数本构关系无法或没有考虑的。鉴于此,本文以平面应变条件下的无粘性土为例,通过分析应力矢量方向变化(即主应力轴旋转)过程中土的变形特性,提出了一个计算该种条件下应变增量的方法。试验结果表明,该方法不仅简单易行,而且能够考虑主应变增量与主应力方向之间的非共轴性。此外,利用本文所提出的方法,还可以对不能考虑应力矢量方向变化的本构关系加以修正,使其同时考虑应力矢量的数值和方向变化对变形的作用效应。

参考文献:

- [1] Arthur J R F, et al. Principal stress rotation: a missing parameter[J]. J of Geotechnical Engineering, 1980, **106**(4): 419~433.
- [2] Miura K, et al. Deformation behavior of anisotropic dense sand

under principal stress axes rotation[J]. Soils and Foundations, 1986, **26**(1): 36~52.

- [3] Yukio N, et al. Flow deformation of sands subjected to principal stress rotation[J]. Soils and Foundations, 1998, **38**(2): 115~128.
- [4] Chang C S, et al. Micromechanics modeling for stress-strain behavior of granular soils(I: Theory)[J]. J of Geotechnical Engineering, 1992, **118**(12): 1959~1974.
- [5] Chang C S, et al. Micromechanics modeling for stress-strain behavior of granular soils(II: Evaluation)[J]. J of Geotechnical Engineering, 1992, **118**(12): 1975~1992.
- [6] 史宏彦. 无粘性土的应力矢量本构模型[D]. 西安: 西安理工大学, 2000.
- [7] Mtsuoka H. On the significance of the "Spatial Mobilized Plane"[J]. Soils and Foundations, 1976, **16**(1): 91~100.
- [8] Rowe P W. The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact[J]. Proc Roy Soc A, 1962, **269**: 500~527.
- [9] Matsuoka H, Sakakibara K. A constitutive model for sands and clays evaluating principal stress rotation[J]. Soils and Foundations, 1987, **27**(4): 73~89.
- [10] Mtsuoka H, Sun D H. Extension of Spatial Mobilized Plane (SMP) to frictional and cohesive materials and its application to cemented sands[II]. Soils and Foundations, 1995, **35**(4): 63~72.
- [11] Marte Gutierrez. Flow theory for sand under rotation of principal stress direction[J]. Soils and Foundations, 1991, **31**(4): 121~132.