

任意段变截面桩纵向振动的半解析解及应用*

A quasi-analytical solution to longitudinal vibration of pile with variable sections and its application

王 腾, 王奎华, 谢康和
(浙江大学 岩土工程研究所, 浙江 杭州 310027)

摘 要: 建立了均质土中考虑桩端和桩侧土作用的有限长桩, 在桩身存在任意段变截面时, 桩顶受纵向激励情况下的定解问题, 用拉氏变换(Laplace)求得桩顶阻抗函数和速度频率响应函数, 然后利用卷积定理和傅里叶(Fourier)逆变换求得任意激励力作用下桩顶速度响应的半解析解, 并对缩颈、扩颈等截面突变桩以及截面连续变化桩的振动特性作了进一步的研究。

关键词: 变截面桩; 纵向振动; 拉氏变换; 阻抗函数; 傅里叶逆变换

中图分类号: TU 43 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2000)06-0654-05

作者简介: 王 腾, 男, 1973年生, 现为浙江大学岩土工程专业博士生。主要从事桩基动态测试理论与应用的研究。

WANG Teng, WANG Kui-hua, XIE Kang-he

(Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: The vibration problem of finite length pile with any variable sections under exciting force is developed, in which the influence of the soil under pile toe and surrounding pile is taken into account. With Laplace transform, the transmit functions of a pile about velocity and displacement are derived. Then, by means of Fourier transform, a quasi-analytical solution for the velocity response of pile subjected to a semi-sine wave exciting force is developed. Based on the solution, the vibrant properties of pile with sharp reduced or expanded section or continuous variable sections are studied.

Key words: pile with variable sections; vertical vibration; Laplace transform; impedance function; inverse Fourier transform

1 前 言*

桩的纵向振动理论是桩各种动态测试方法的理论基础, 开展桩纵向振动理论的研究对于进一步弄清动力试桩的机理以及正确分析试桩测试曲线是非常重要的^[1]。以往的研究工作^[2~4]都是针对均质土中完整桩而言的, 而工程检测的重点是缺陷桩。缺陷桩由于成因的不同一般可分为两种类型: 一类是在桩材质量方面存在问题, 如混凝土离析、夹泥等; 另一类是在桩截面质量方面存在问题, 如桩身缩颈和扩颈。王奎华等求得了有限长桩、变阻抗桩及粘弹性变截面阻抗桩(桩身按模量不同分为三段)的解析解^[5~7]。对于在桩截面质量上存在问题的缩颈、扩颈等变截面桩的解析解则没有进展, 本文通过拉氏变换, 并巧妙地利用了阻抗函数的性质, 求得桩身截面为任意段情况下桩顶的阻抗函数, 进一步得到了半正弦脉冲激励下速度的时域响应, 并对此进行了分析, 得到了许多有意义的结论。这不仅在理论上, 而且在基桩质量检测中均有重要意义。

2 定解问题的提出

本文研究的问题简化模型如图1所示。基本假定如下:

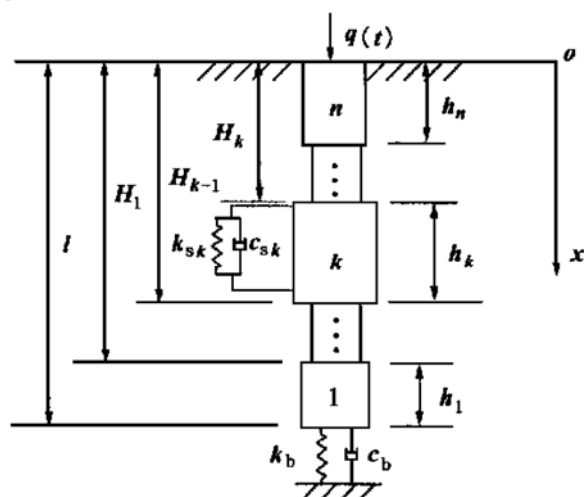


图1 计算简图

Fig. 1 Analysis of pile with variable sections

a) 桩为变截面均质杆, 总长为 l , 在桩材密度 ρ_p 及杨氏模量 E 恒定的条件下, 按桩身截面面积的不同分为 N 段, 自下而上截面积分别为 $S_1, S_2, \dots, S_n$, 相应的截面周长为 $C_1, C_2, \dots, C_n$, 每段桩的高度分别为 $h_1, h_2, \dots, h_n$ 。

b) 桩处于均质土中, 桩侧土对桩的作用简化为线性弹簧 k_s 和线性阻尼器 c_s 以并联的方式耦合。

c) 桩底土对桩的作用简化为线性弹簧 k_b 和线性阻尼器 c_b 并联的方式。

d) 桩土系统振动为小变形。

取第 k 段桩中的微单元作动力平衡分析建立基本方程:

$$c^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} - A_k \frac{\partial u_k}{\partial t} - B_k u_k - \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

式中 $A_k = \frac{c_s C_k}{\rho_s S_k}$; $B_k = \frac{k_s C_k}{\rho_p S_k}$; $c = \sqrt{\frac{E}{\rho_p}}$; $u_k = u_k(x, t)$, 表示桩身质点位移。

3 定解问题的求解

拉氏变换的定义为

$U(x, s) = L[u(x, t)] = \int_0^\infty u(x, t) e^{-st} dt$ (s 为复参数), $F(s) = L[f(t)]$

首先以第1段桩为研究对象, 假定第2段桩对第1段桩上截面的作用力为 $f_1(t)$, 得第1段桩上截面处的边界条件为

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=H_1} = \frac{-f_1(t)}{ES_1} \quad (2a)$$

由基本假定 c) 可以得到桩底处的边界条件为

$$\frac{k_b}{ES_1} u_1 + \frac{c_b}{E} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \quad (2b)$$

结合初始条件, 对基本方程(1)、边界条件(2a)、(2b)进行拉氏变换, 得

$$\left. \begin{aligned} c^2 \frac{d^2 U_1}{dx^2} &= (s^2 + A_1 s + B_1) U_1 \\ \frac{dU_1}{dx} \Big|_{x=H_1} &= -\frac{F_1(s)}{ES_1} \\ \frac{dU_1}{dx} + (s \frac{c_b}{E} + \frac{k_b}{ES_1}) \cdot U_1 \Big|_{x=l} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

令 $\lambda_1^2 = -(s^2 + A_1 s + B_1)$, 由式(3)可求得第1段桩上界面 $x = H_1$ 处位移阻抗函数为

$$Z_1(s) = \frac{F_1(s)}{U_1(x, s)} \Big|_{x=H_1} = -\frac{ES_1 \bar{\lambda}_1}{l} \tan(\bar{h}_1 \bar{\lambda}_1 - \beta_1) \quad (4)$$

式中 $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 \cdot T_c$, $T_c = \frac{l}{c}$; $\bar{h}_1 = \frac{h_1}{l}$; $\beta_1 = \arctan \frac{R + A_b}{\bar{\lambda}_1}$, 其中 $R = \frac{k_b}{ES_1} \cdot l$, $A_b = \frac{sc_b}{E} \cdot l$ 。

再以第2段桩为研究对象, 并假定第3段桩对第2段桩上界面处的作用力为 $f_2(t)$, 则得到第2段桩上界面处的边界条件:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=H_2} = \frac{-f_2(t)}{ES_2} \quad (5a)$$

由分界面处位移和力的连续性条件, 即 $u_2 = u_1|_{x=H_1}$ 可得第2段桩下界面处的边界条件为

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=H_1} = \frac{-f_1(t)}{ES_2} \quad (5b)$$

结合初始条件, 对基本方程、边界条件进行拉氏变换, 得

$$\left. \begin{aligned} c^2 \frac{d^2 U_2}{dx^2} &= (s^2 + A_2 s + B_2) U_2 \\ \frac{dU_2}{dx} \Big|_{x=H_2} &= -\frac{F_2(s)}{ES_2} \\ \frac{ES_2}{U_2} \frac{dU_2}{dx} \Big|_{x=H_1} &= -Z_1(s) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

令 $\lambda_2^2 = -(s^2 + A_2 s + B_2)$, 由式(6)同理可求得第2段桩上界面 $x = H_2$ 处位移阻抗函数为

$$Z_2(s) = -\frac{ES_2 \bar{\lambda}_2}{l} \tan(\bar{h}_2 \bar{\lambda}_2 - \beta_2) \quad (7)$$

式中 $\lambda_2^2 = -(s^2 + A_2 s + B_2)$; $\bar{\lambda}_2 = \lambda_2 \cdot T_c$; $\bar{h}_2 = \frac{h_2}{l}$; $\beta_2 = \arctan(\frac{Z_1(s)}{ES_2 \bar{\lambda}_2})$ 。

依次递推, 最后可求得桩顶 $x = 0$ 处的位移阻抗函数为

$$Z_n(s) = -\frac{ES_n \bar{\lambda}_n}{l} \tan(\bar{h}_n \bar{\lambda}_n - \beta_n) \quad (8)$$

式中 $\bar{\lambda}_n = \lambda_n \cdot T_c$; $\lambda_n^2 = -(s^2 + A_n s + B_n)$; $\bar{h}_n = \frac{h_n}{l}$; $\beta_n = \arctan(\frac{Z_{n-1}(s)}{ES_n \bar{\lambda}_n})$ 。

由位移阻抗函数可得基桩桩顶速度响应的传递函数为

$$G_v(s) = \frac{s}{Z_n(s)} = -\frac{l \cdot s}{ES_n \bar{\lambda}_n} \cdot \cot(\bar{h}_n \bar{\lambda}_n - \beta_n) \quad (9)$$

令 $s = i\omega$ ($i = \sqrt{-1}$, ω 为角频率), $a_n = A_n T_c$, $b_n = B_n T_c^2$, $\theta = \omega \cdot T_c$, $A_b = i\theta \cdot a_b$, $a_b = \frac{c_b}{\rho_p c}$, $m_n^2 = \theta^2 - i a_n \cdot \theta - b_n$, 并代入式(9)中可得桩顶速度频率响应为

$$H_v(i\omega) = \frac{l \cdot i\omega}{ES_n m_n} \cdot \cot(\bar{h}_n m_n - \beta_n) \quad (10)$$

由卷积定理和傅里叶(Fourier)变换的性质知, 当桩顶作用任意激振力 $q(t)$, 其傅氏变换对为 $Q(i\omega)$, 则桩顶速度响应为

$$g(t) = IFT[Q(i\omega) \cdot H_v(i\omega)] \quad (11)$$

至此, 已求得定解问题的半解析解。从式(10)、(11)可知, 变截面桩的振动特性主要由下列无量纲变量控制: $a_k, b_k, \theta, R, a_b, S_k, \bar{h}_k$ ($k = 1, 2, \dots, h$)。其中 a_k 称为桩侧土阻尼因子; b_k 称为桩侧土刚度因子; θ 称为激振

力频率因子; R 为桩底土刚度因子; a_b 为桩底阻尼因子; $\bar{h}_k$ 为第 k 段桩的相对长度。

当对桩顶输入半正弦脉冲激励 $f(t) = Q_{\max} \sin \frac{\pi}{T} t$, $t \in (0, T)$, 其中 T 为脉冲宽度, 由式(11)可求得半正弦脉冲激励力作用下桩顶速度响应为

$$V(t) = Q_{\max} IFT \left| \frac{-l \cdot i \omega}{ES_n m_n} \frac{\pi \cdot T}{\pi^2 - T^2 \omega^2} (1 + e^{-i\omega T}) \times \cot(\bar{h}_n \cdot m_n - \beta_n) \right| \quad (12)$$

4 桩土系统的振动特性分析

由式(10), (12)可得 N 段截面桩桩顶速度导纳曲线和速度响应曲线, 本文主要研究三段变截面桩, 即取 $n=3$, 可得三段截面桩的振动特性。计算模型中的参数为: 桩长 $l=20.0$ m, 桩径为 500 mm, 截面面积比 $S_{kn} = \frac{S_k}{S_n}$ (以第 N 段桩截面为标准), 波速 $c=3500$ m/s, 脉冲宽度 $T=1.0$ ms。

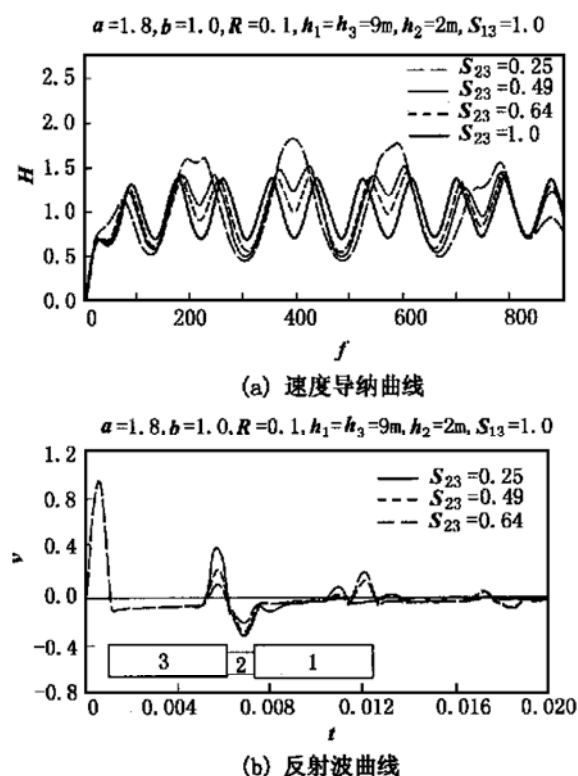


图2 缩颈桩的速度导纳曲线和反射波曲线

Fig. 2 The velocity mobility curves and the reflecting wave curves of a reduced pile

图2是缩颈桩的速度导纳曲线及反射曲线。由图2(a)可见, 与正常桩相比, 缩颈桩的导纳曲线存在大峰夹小峰循环的特征, 且导纳曲线的峰值点随桩身缩颈程度的增大而增大。当桩缩颈程度很大时, 其导纳曲线上只有大的峰值循环, 近似反映了缺陷的位置。从

图2(b)可见, 在截面突变处波形上凸, 出现了与入射脉冲同向特征的反向信号, 而且随着缩颈程度的增大, 缺陷处的特征反射信号越来越显著。当缩颈程度严重时, 此时应注意到曲线1在桩底处反射信号很微弱, 但在缩颈两倍深度处有缩颈的二次特征反射, 这说明了桩缩颈严重时, 入射脉冲只在缩颈截面上段桩中形成来回反射, 透射到缩颈下段桩中的波很小。在工程检测中应注意应力波在缩颈截面的多次反射, 不要把缩颈截面二倍深度处的二次反射判为该处截面为缩颈。同时, 还应注意到, 从入射波峰值点到上凸波形峰值点的传播时间 $\Delta t = 5.0$ ms, 由关系式 $h = c \cdot \frac{\Delta t}{2}$, 可判断出桩截面突变的具体位置。

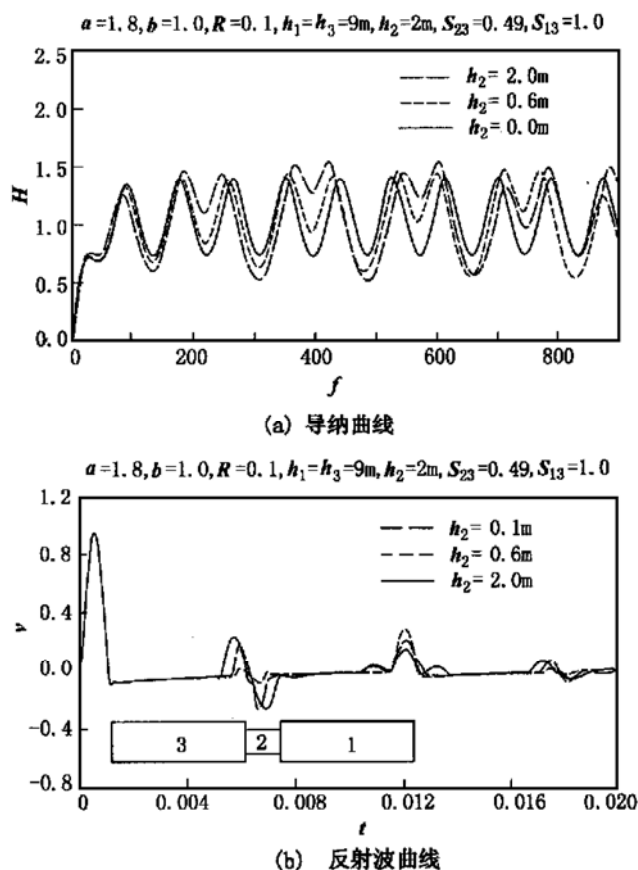


图3 缺陷长度对速度导纳及反射波曲线的影响

Fig. 3 The influence of the defective length to the mobility curves and reflecting wave curves

图3反映了缩颈段长度对速度导纳及反射波曲线的影响。从图3(a)可见, 随着缺陷段长度的减小, 其导纳曲线大峰夹小峰的特征逐渐减弱, 曲线向正常桩导纳曲线靠近, 缺陷特征变得越来越不明显, 当缩颈长度很小时, 从导纳曲线上将难以正确判定桩身质量的好坏。从图3(b)可见, 随着缺陷段长度的减小, 其反射波曲线上缺陷处的特征反射也逐渐减弱, 当缺陷段长度较小时, 其特征反射已变得微弱。其原因是当缺

陷长度很小时, 入射脉冲在缩颈截面处反射波和扩颈截面处的反射波互相叠加削弱, 使缺陷特征反射不明显。此外, 上述影响还与缺陷的程度和激励脉冲宽有着密切的关系, 如果桩发生断裂, 即使很小的裂缝在曲线上也有明显的反映; 如果想提高缺陷特征反射的分辨率, 可使入射脉冲宽度小一些, 使缩颈处反射和扩颈处反射叠加成分少一些。

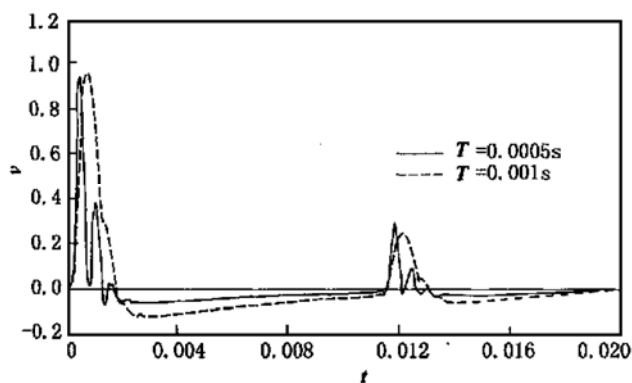


图4 脉冲频率对速度响应曲线的影响

Fig. 4 The influence of the impulsive frequency on the reflecting wave curves

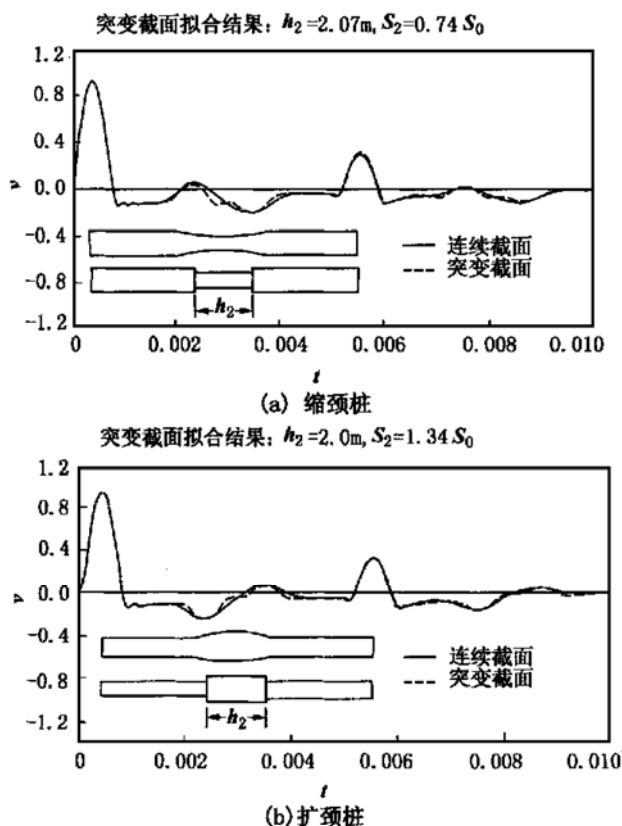


图5 连续截面桩反射波曲线

Fig. 5 The reflecting wave curves of a pile with a continuously variable section

图4则反映了激励脉冲频率因子对反射波曲线的影响。在激励频率一定时, 在桩身中部的缺陷的反射

信号特征是明显的。但是当缺陷的埋深小到一定的程度(或缺陷的埋深接近于桩底)时, 其缺陷的特征反射被入射波脉冲(或桩底反射)所掩盖, 信号变得越来越不明显, 以致于从曲线上很难分辨, 如曲线2所示。此时为了提高分辨能力, 以便对桩的完整性作出正确的判断, 必须提高激励频率, 即使敲击脉冲宽度减小。故现场测试时, 为了测得浅部缺陷, 一般采用较硬的敲击设备如铁锤等, 而不能用木棒等材质较软的敲击设备。

工程中的钻孔灌注桩的缩颈、扩颈截面往往是连续变化的, 因此当 N 取得足够大, 即变截面间距取得足够小时, 由式(12)可近似求得截面连续变化桩的速度响应曲线。本文用 $r(x) = r_0 \exp(k \cdot x(x - h_0))$ 来模拟桩径连续变化的缩颈桩, 用 $r(x) = r_0 \exp(-k \cdot x(x - h_0))$ 来模拟桩径连续变化的扩颈桩, 其中 r_0 为桩身正常部分的桩径, h_0 为桩身截面变化部分的长度, k 为系数。计算模型中, 桩长为 9 m, $r_0 = 500$ mm, $l_0 = 3$ m, $k = 0.1$, 由此可知均匀桩截面积 $S_0 = 0.2$ m², 缩颈桩最小截面积 $S_{\min} = 0.638S_0$, 扩颈桩最大截面积 $S_{\max} = 1.568S_0$ 。

图5(a)反映了截面连续变化缩颈桩的反射波曲线与截面突变形式拟合曲线的比较。由图5(a)可见, 与截面突变桩相比, 连续截面桩在缺陷段的反射波曲线变得宽缓平滑, 更接近于实测曲线。由拟合结果可见, 截面突变拟合的缩颈截面积 $S_{\text{fit}} = 0.74S_0$, 比缩颈最小截面积 $S_{\min}$ 偏大, 其比值为 1.16, 而且拟合的缺陷段的长度为 2.07 m, 也比实际缺陷长度有所减小。

图5(b)反映了截面连续变化扩颈桩的速度响应与截面突变形式拟合曲线的比较。由拟合结果可见, 突变形式拟合的扩颈截面积 $S_{\text{fit}} = 1.34S_0$, 比扩颈最大截面积 $S_{\max}$ 偏小, 其比值为 0.85, 而且拟合的缺陷段的长度为 2 m, 也比实际长度有所减小。所以在实际工程检测中, 对缩颈桩用截面突变桩拟合时, 应对拟合的桩径适当减小, 对扩颈桩用截面突变桩拟合时, 应对拟合的桩径适当增大, 对拟合的缺陷段长度也应适当增大。且从反射波曲线上, 只能近似判定连续截面桩缺陷的位置。

5 工程应用

为验证计算模型的合理性及解的正确性, 将模型桩实测曲线与理论计算求得的速度响应曲线进行比较。图6(a)是一预制桩模型的实测曲线与拟合结果的比较。该桩混凝土标号为C30, 长为 10 m, 反射波实测得到 $T_c = 2.31$ ms, 测试波速 $c = 4328$ m/s。从图6(a)可见, 理论计算曲线与实测曲线符合较好。从拟合结果可知, 该桩在 4.75 m 处有一处扩颈, 其扩颈程度, 即正常桩身与变截面声阻抗比值为 $1/S_{23} = 0.526$ 。其

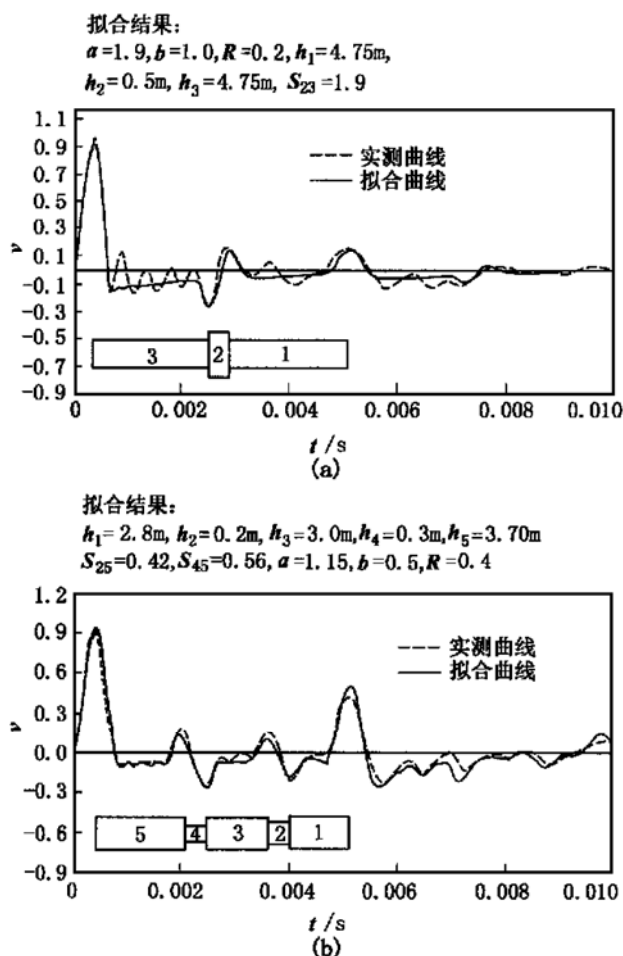


图6 实测曲线与拟合曲线的比较

Fig. 6 Comparison of the measured curve and the fitted curve
 扩颈段长为0.5 m, 而该桩的实际情况是, 该桩在4.8 m埋深处有一扩颈, 其扩颈程度为0.5, 两者与实际情况均比较接近。图6(b)是另一根预制模型桩的实测曲线与拟合曲线的比较。该桩混凝土标号为C30, 长度为10 m, 反射波实测得到 $T_c=2.326\text{ ms}$, 测试波速 $c=4300\text{ m/s}$ 。从拟合结果可知, 该模型桩在3.7 m和7.0 m分别有一缩颈缺陷, 其缺陷程度分别为1.82, 2.4, 缺陷段长度为0.3, 0.2 m, 而该桩的实际情况是在3.75 m和7.1 m处分别有一缩颈缺陷, 两处的缺陷程度分别为1.78, 2.37。可见, 拟合结果与实际模型桩比较接近, 基本反映了桩截面的实际情况。所以, 本文所建立的计算模型及求解过程是正确的。

6 结 论

(1) 本文建立了任意段变截面桩纵向振动的定解问题, 并用拉氏变换和傅里叶变换求得了其速度响应的半解析解, 发展了桩的振动测试基本理论, 使精确求解截面连续变化桩的速度响应成为可能。

(2) 绘制了三段变截面桩的速度导纳和反射波曲线, 给出了根据导纳曲线和波形曲线判别基桩缺陷、缺陷的程度和位置的一般方法。

(3) 分析了缺陷段长度对桩顶速度导纳及反射波曲线的影响, 指出当缩颈段长度很小时, 导纳曲线和反射波曲线上的特征反射很微弱。

(4) 为判别基桩浅部埋深的缺陷, 应减小脉冲宽度, 以提高对浅部缺陷的分辨能力。

(5) 比较了突变截面桩及连续变化截面桩反射波曲线的不同, 用突变形式的截面来拟合截面连续变化桩的反射波曲线时, 对缩颈桩应对拟合桩径适当减小, 对扩颈桩则应适当增大拟合桩径。

(6) 将理论解与反射波法实测曲线拟合比较, 发现两者符合较好, 而且拟合结果也与桩的实际情况相符。

参考文献:

- [1] 徐攸在, 刘兴满. 桩的动测新技术[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1986.
- [2] Korten H Van, Middendorp P, Brederode P Van. An analysis of dissipative wave propagation in a pile[A]. Intl Seminar on the Application of Stress-Wave Theory on Piles[C]. Stockholm, 1980.
- [3] Gouth W, Richards J P G, Williams R P. Vibration and waves [M]. New York: Halsted press of John Wiley & Sons, 1983.
- [4] 张阿舟, 赵淳生. 桩基故障诊断理论分析(一)——理想桩的自由振动特性[J]. 振动测试与诊断, 1991, 11(1): 1~8.
- [5] 王奎华, 谢康和, 曾国熙. 有限长桩受迫振动问题解析解及其应用[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(6): 27~35.
- [6] 王奎华, 谢康和, 曾国熙. 变截面阻抗桩受迫振动问题解析解及其应用[J]. 土木工程学报, 1998, 31(6): 545~551.
- [7] 王奎华. 考虑桩体粘性的变阻抗桩受迫振动问题的解析解[J]. 振动工程学报, 1999, 12(4): 513~520.

本刊简讯征稿启事

本刊自1998年第1期改版以来, 增加了载文量, 受到广大读者的欢迎。为增加本刊信息量, 欢迎广大读者向本刊提供简讯文稿:

1. 本刊主办学会的有关通知及活动预告或报道。
2. 海内外岩土工程学术动态预告或报道(英文稿请译成中文, 下同)。

3. 海内外重大工程报道(规划、开工、竣工等技术信息)。
4. 岩土工程新技术、新仪器、新设备、新材料简介, 发明专利及其它成果报道。
5. 重要论著及其它出版信息报道。

以上文稿请自留底稿。文稿刊用后赠送本刊1~2期。

本刊编辑部