

# 考虑固结和流变的群桩的积分方程解法\*

## The integral equation method to solve pile group problem considering the consolidation and rheology of soil

陆建飞, 王建华, 沈为平  
(上海交通大学 建筑工程与力学学院, 上海 200030)

**摘要:** 利用半空间内部和表面作用圆形载荷时的 Biot 固结基本解, 得出了粘弹性饱和土中群桩在时间域内的第二类 Fredholm 积分方程。通过 Laplace 变换方法对上述积分方程进行简化, 对所得的积分方程进行数值求解并进行相应的逆变换即可得群桩的轴力、位移以及桩侧摩阻力随时间的变化情况。

**关键词:** 固结; 流变; 群桩; Fredholm 积分方程; 积分变换

**中图分类号:** TU 437.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2000)06-0650-04

**作者简介:** 陆建飞, 男, 1967 年生, 上海交通大学博士研究生, 从事岩土力学、断裂力学的研究。

LU Jian-fei, WANG Jian-hua, SHEN Wei-ping

(School of Civil Engineering of Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

**Abstract:** By using the fundamental solutions of circular load applied in the interior of the half space or on the surface of the half space, the second kinds of Fredholm integral equations of pile group in saturated viscoelastic soil are established in the paper. The integral equations can be simplified by means of Laplace transforms methods. By the the numerical solution of the integral equations and the corresponding inverse integral transforms, the displacement, axial force and the shear stress of the piles groups are obtained.

**Key words:** consolidation; rheology; pile group; Fredholm integral equation; integral transforms

## 1 引言\*

弹性理论方法<sup>[1,2]</sup>和有限元方法<sup>[3,4]</sup>是群桩计算的有效方法。弹性理论方法由于其简单、理论上可靠而得到工程界的广泛应用,但是弹性理论方法很难考虑土的固结和流变的特性。有限元方法虽然要比弹性理论方法适用性广,但是对于群桩在粘弹性饱和土中的变形特性问题,由于要对时间和空间进行离散,因而计算量太大,很难实际应用。因此,建立一种能考虑土的固结和流变的群桩计算方法对于理论和实际都有重要意义。文献[5]应用积分方程方法对于在半空间饱和土中的轴向受荷桩进行了研究,但该文献只研究了该问题的初值和终值,而没有研究任意时刻桩的变形特性。

本文的目的是要解决考虑固结和流变的饱和粘弹性土中的群桩的变形特性问题。为了解决该问题首先利用圆形载荷作用下的 Biot 固结<sup>[6]</sup>基本解,根据对应原理<sup>[7]</sup>就可以得出考虑固结和流变的圆形载荷基本解。然后利用基本解和桩、土的变形协调条件<sup>[8]</sup>,得出了该问题时间域内的第二类 Fredholm 积分方程。对该积分方程进行 Laplace 变换,可得该问题 Laplace 变换域内的 Fredholm 积分方程。对该积分方程再进行数值求解,并进行 Laplace 逆变换,即可以得出群桩的沉降、轴力以及孔压等物理量。

## 2 基本解

在本文的计算方法中需要半空间饱和土在圆形载荷作用下的(图 1) Biot 固结基本解。基本解包括应变、位移、应力等。利用文献[9]得出的圆形载荷基本解,根据对应原理<sup>[7]</sup>可得出粘弹性饱和土的圆形载荷基本解。实际上,只要把 Biot 固结基本解中的土骨架参数  $E_s$  变换为  $1/(\mathcal{J}(s))$ , 然后进行 Laplace 逆变换则可得到粘弹性饱和土的基本解<sup>[10]</sup>, 其中  $s$  为 Laplace 变换参数,  $\mathcal{J}(s)$  则为土骨架蠕变柔量的 Laplace 变换。本文计算中土骨架的流变模型采用图 2 所示的 Merchant 模型, 则

$$J(t) = 1/E_0 + (1/E_1)(1 - e^{(-E_1/\eta_1)t}) \quad (1)$$

其他流变模型的解答可类似地得到。

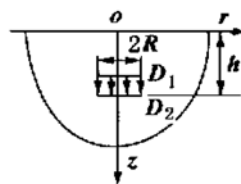


图 1 半空间饱和土内作用圆形均布载荷

Fig. 1 Circular uniform load applied in the interior of saturated soil

\* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59879012); 国家教委博士点基金资助项目(98024832)

收稿日期: 2000-01-31

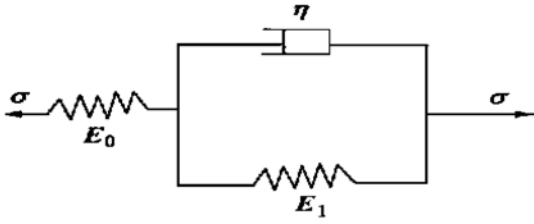


图2 土骨架模型(Merchant 模型)

Fig. 2 The model of soil skeleton(Merchant model)

### 3 饱和土中群桩 Fredholm 积分方程的建立

下面考虑如图3所示的半空间饱和土中的 \$n\$ 根直径为 \$d\_1, \dots, d\_n\$ (\$d\_i = 2R\_i\$); 长度为 \$L\_1, \dots, L\_n\$; 弹性模量分别为 \$E\_{p1}, \dots, E\_{pn}\$ 的群桩问题。\$n\$ 根桩受轴向载荷分别为 \$Q\_1(t), \dots, Q\_n(t)\$。半空间为各向同性的粘弹性饱和土体, 且半空间表面透水, 假定桩的透水性和土一样, 这个假定适合于细长桩。根据 Muki 的方法<sup>[8]</sup>, 图3所示的问题可以看成是半空间的粘弹性饱和土和 \$n\$ 根虚拟桩的叠加。\$n\$ 根虚拟桩的弹性模量分别为

$$E_{pi}^* = E_{pi} - E_s, \dots, E_{pn}^* = E_{pn} - E_s \quad (2)$$

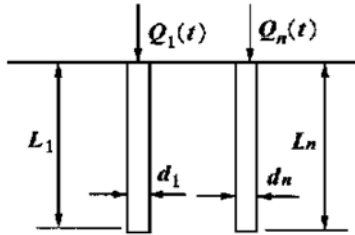


图3 粘弹性饱和土中的轴向受荷群桩

Fig. 3 Axially loaded piles group in visco-elastic saturated soil

式中 \$E\_{p1}, \dots, E\_{pn}\$ 为真实桩的弹性模量; \$E\_{pi}^\*, \dots, E\_{pn}^\*\$ 为虚拟桩的弹性模量; \$E\_s\$ 为土骨架的弹性模量。由于本文采用 Schapery 的 Laplace 逆变换方法, 所以对于本文的粘弹性饱和土必须用 \$1/(\mathcal{J}(s))\$ 来代替 \$E\_s\$。图4(a)的半空间饱和土, 受如下荷载的作用: 半空间表面 \$\Pi\_0\$ 处受 \$Q\_i(t) + N\_i^\*(t, 0), i = 1, \dots, n\$ 的作用, 在原桩身处(即图4(a)的虚线内)受到 \$q\_i(t, z), i = 1, \dots, n\$ 的作用, 在半空间原桩身底面 \$\Pi\_{Li}\$ 处受到 \$N\_i^\*(t, L\_i), i = 1, \dots, n\$ 的作用。半空间粘弹性饱和土体的土骨架的模型如图2所示, 可按照 Biot 固结理论和对应原理来进行计算。图4(b)所示的虚拟桩可以按照材料力学杆的计算方法来计算。为了分析问题的方便, 取 \$n\$ 根桩中的第 \$i\$ 根进行研究。\$i\$ 根虚拟桩受到端部集中力 \$N\_i^\*(t, 0), N\_i^\*(t, L\_i)\$ 和轴向分布载荷 \$q\_i(t, z)\$ 的作用, 轴力为 \$N\_i^\*(t, z)\$, 沿桩轴线的分布载荷为 \$q\_i(t, z)\$。第 \$i\$ 根虚拟桩的轴力和沿轴线的分布载荷满足 \$q\_i(t, z)\$ 以下关系

$$\partial N_i^*(t, z) / \partial z = -q_i(t, z) \quad (3)$$

式中 \$t\$ 表示时间; \$z\$ 表示位置。第 \$i\$ 根桩的桩顶载荷、轴力以及分布载荷 \$Q\_i(t), N\_i^\*(t, z), q\_i(t, z)\$ 随着时间的变化可表示为

$$\left. \begin{aligned} Q_i(t) &= Q_i(0) + \int_0^t \frac{\partial Q_i(\tau)}{\partial \tau} d\tau, i = 1, \dots, n \\ q_i(t, z) &= q_i(0, z) + \int_0^t \frac{\partial q_i(\tau, z)}{\partial \tau} d\tau, i = 1, \dots, n \\ N_i^*(t, z) &= N_i^*(0, z) + \int_0^t \frac{\partial N_i^*(\tau, z)}{\partial \tau} d\tau, \\ &i = 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

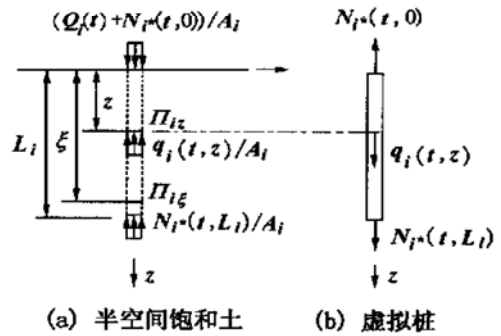


图4 粘弹性饱和土中的轴向受荷桩的计算模型

Fig. 4 The model of axially loaded piles group in visco-elastic saturated soil

假定在上述荷载作用下的半空间饱和土原桩身截面 \$\Pi\_z\$ 处的变形和虚拟桩的变形协调, 在本文中用 \$z\$ 向应变来表示协调条件。则半空间 \$\Pi\_z\$ 处的 \$z\$ 向应变应等于相应的虚拟桩上的轴向应变。为了简化计算用半空间 \$\Pi\_z\$ 圆心处的 \$z\$ 向应变 (\$0 \leq z \leq L\_i\$) 和第 \$i\$ 根虚拟桩相应位置处的应变相等来作为协调条件。根据上述的协调条件可得第 \$i\$ 根桩的积分方程为

$$\begin{aligned} & Q_i(0) \varepsilon_i(t, 0, z) + \int_0^t \frac{\partial Q_i(\tau)}{\partial \tau} \varepsilon_i(t - \tau, 0, z) d\tau + \\ & N_i^*(0, 0) \varepsilon_i(t, 0, z) + \int_0^t \frac{\partial N_i^*(\tau, 0)}{\partial \tau} \varepsilon_i(t - \tau, 0, z) d\tau - \\ & N_i^*(0, L_i) \varepsilon_i(t, L_i, z) - \int_0^t \frac{\partial N_i^*(\tau, L_i)}{\partial \tau} \varepsilon_i(t - \tau, L_i, z) d\tau - \\ & \int_0^{L_i} q_i(0, \xi) \varepsilon_i(t, \xi, z) d\xi - \int_0^t \int_0^{L_i} \frac{\partial q_i(\tau, \xi)}{\partial \tau} \varepsilon_i(t - \tau, \xi, z) d\tau d\xi + \\ & \sum_{j=1}^{n(j \neq i)} Q_j(0) \varepsilon_j(t, 0, z) + \int_0^t \frac{\partial Q_j(\tau)}{\partial \tau} \varepsilon_j(t - \tau, 0, z) d\tau + \\ & N_j^*(0, 0) \varepsilon_j(t, 0, z) + \int_0^t \frac{\partial N_j^*(\tau, 0)}{\partial \tau} \varepsilon_j(t - \tau, 0, z) d\tau - \\ & N_j^*(0, L_j) \varepsilon_j(t, L_j, z) - \int_0^t \frac{\partial N_j^*(\tau, L_j)}{\partial \tau} \varepsilon_j(t - \tau, L_j, z) d\tau - \\ & \int_0^{L_j} q_j(0, \xi) \varepsilon_j(t, \xi, z) d\xi - \int_0^t \int_0^{L_j} \frac{\partial q_j(\tau, \xi)}{\partial \tau} \varepsilon_j(t - \tau, \xi, z) d\tau d\xi \\ & = \frac{N_i^*(t, z)}{E_{pi}^* A_i}, 0 \leq z \leq L_i, i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $A_i$  为第  $i$  根桩的截面面积;  $\xi_i(t, \xi, z)$  指 0 时刻在图 4(a) 半空间第  $i$  根桩的任意截面  $\Pi_\xi$  处作用均布单位力时在图 4(a) 半空间第  $i$  根桩的截面  $\Pi_\xi$  处的圆心处所产生  $t$  时刻的  $z$  向应变; 而  $\xi_i(t, \xi, z)$  则表示 0 时刻在半空间第  $j$  根桩的任意截面  $\Pi_\xi$  处作用均布单位力时在半空间第  $i$  根桩的截面  $\Pi_\xi$  处的圆心处所产生  $t$  时刻的  $z$  向应变。对式(5)进行 Laplace 变换及分部积分, 并考虑到  $\tilde{\xi}_i(s, \xi, z)$  在  $z$  处的间断性可得

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{N}_i^*(s, z)}{E_{pi} A_i} + s \tilde{N}_i^*(s, z) [\tilde{\xi}_{ii}(s, z^+, z) - \tilde{\xi}_{ii}(s, z^-, z)] + \\ & \int_0^{L_i} s \tilde{N}_j^*(s, \xi) \frac{\partial \tilde{\xi}_{ji}(s, \xi, z)}{\partial \xi} d\xi + \sum_{j=1}^{n(j \neq i)} \int_0^{L_j} s \tilde{N}_j^*(s, \xi) \frac{\partial \tilde{\xi}_{ji}(s, \xi, z)}{\partial \xi} d\xi \\ & = \sum_{j=1}^n \tilde{Q}_j(s) \tilde{\xi}_{ji}(s, 0, z) \quad 0 \leq z \leq L_i, i = 1, \dots, n \quad (6) \end{aligned}$$

式中  $\tilde{\xi}_{ii}(t, z^-, z)$ ,  $\tilde{\xi}_{ii}(t, z^+, z)$  分别表示半空间内载荷作用平面  $\Pi_\xi$  分别从上侧和下侧无限趋近  $\Pi_\xi$  截面时所引起的  $\Pi_\xi$  处圆心的  $z$  向  $t$  时刻应变  $\xi_{ii}(t, z^-, z)$ ,  $\xi_{ii}(t, z^+, z)$  的 Laplace 变换。式(6)中带有  $\sim$  的变量表示该变量是在 Laplace 变换域内的量。式(6)即为考虑固结和流变时群桩受轴向载荷的积分方程。

对于绝对柔性承台下的群桩有下面的补充方程, 即

$$Q_1(t) = Q_2(t) = \dots = Q_n(t) = Q_T(t)/n \quad (7)$$

式中  $Q_T(t)$  为承台所受的总载荷。

对于绝对刚性的承台下的群桩积分方程(6)有下面的补充方程

$$Q_1(t) + Q_2(t) + \dots + Q_n(t) = Q_T(t) \quad (8)$$

式中  $Q_T(t)$  为承台所受的总载荷, 显然这时桩顶载荷  $Q_i(t)$ ,  $\dots$ ,  $Q_n(t)$  也是未知函数。此外, 在每个时刻  $n$  根桩的桩顶位移应相等, 即

$$w_1(t, 0) = w_2(t, 0) = \dots = w_i(t, 0) = \dots = w_n(t, 0) \quad (9)$$

式中  $w_i(t, 0)$  为第  $i$  根桩  $t$  时刻的桩顶位移。为了得到用桩顶反力  $Q_i(t)$ ,  $\dots$ ,  $Q_n(t)$  和虚拟桩轴力  $N_1^*(t, z)$ ,  $\dots$ ,  $N_n^*(t, z)$  表示的位移补充方程, 下面建立求解第  $i$  根桩任意截面上的位移的方程。利用式(4)和圆形载荷基本解并运用 Laplace 变换方法, 得到变换域内的位移表达式

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i(s, z) = & \sum_{j=1}^n \int_0^{L_j} s \tilde{Q}_j(s) \tilde{k}_{ji}(s, 0, z) - \\ & \int_0^{L_j} s \tilde{N}_j^*(s, \xi) \frac{\partial \tilde{k}_{ji}(s, \xi, z)}{\partial \xi} d\xi \\ & 0 \leq z \leq L_i, i = 1, \dots, n \quad (10) \end{aligned}$$

式中  $\tilde{k}_{ji}(t, \xi, z)$  为在第  $j$  根桩的  $\Pi_\xi$  截面 0 时刻作用单位力时在第  $i$  根桩的  $\Pi_z$  中心所引起的  $t$  时刻的位移的 Laplace 变换。对式(9)进行 Laplace 变换, 并把式(10)中的  $z$  用 0 来代替, 代入经过变换的式(9)即可得

变换域内用虚拟桩轴力和桩顶反力表示的位移补充方程。第  $i$  根真实桩的任意截面上的轴力是图 4(a)  $\Pi_\xi$  截面的  $z$  向合力加上虚拟桩的轴力  $N_i^*(t, z)$ , 在变换域内可表示为

$$\begin{aligned} \tilde{N}_i(s, z) = & \sum_{j=1}^n \int_0^{L_j} s \tilde{Q}_j(s) \tilde{f}_{ji}(s, 0, z) - \\ & \int_0^{L_i} s \tilde{N}_i^*(s, \xi) \frac{\partial \tilde{f}_{ii}(s, \xi, z)}{\partial \xi} d\xi - \\ & \sum_{j=1}^{n(j \neq i)} \int_0^{L_j} s \tilde{N}_j^*(s, \xi) \frac{\partial \tilde{f}_{ji}(s, \xi, z)}{\partial \xi} d\xi \\ & 0 \leq z \leq L_i, i = 1, \dots, n \quad (11) \end{aligned}$$

式中  $\tilde{N}_i(s, z)$ ,  $\tilde{N}_i^*(s, z)$  分别表示变换域内的第  $i$  根桩的真实轴力和第  $i$  根虚拟桩的轴力,  $\tilde{f}_{ji}(s, \xi, z)$  为  $\Pi_\xi$  上在 0 时刻均匀作用单位力时, 在  $t$  时刻所引起的  $\Pi_z$  上的合力的 Laplace 变换。

在变换域内求解了积分方程(6)以后, 那么变换域内的桩的轴力可以通过式(11)求解得到, 其它物理量也可以通过相应的表达式而得到。时间域内的物理量则可以通过 Laplace 逆变换而得到。在本文中 Laplace 逆变换的方法采用 Schapery 方法<sup>[10]</sup>。其表达式为

$$\Phi(t) = [s \Phi(s)]_{s=1/(2t)} \quad (12)$$

式中  $\Phi(t)$  为时间域内的待求函数;  $\Phi(s)$  为 Laplace 变换域内的已知函数,  $s$  为 Laplace 变换参数。

## 4 算 例

[算例] 如图 5 所示的  $3 \times 3$  的群桩, 已知  $s/d = 5.0$ ,  $L/d = 25$ , 桩上有一刚性承台, 假设承台所受的总载荷为  $P$ , 单桩的平均载荷  $P_{av} = P/9$ 。在假设中取土的渗透系数  $k = 1.0 \times 10^{-7}$  m/s, 土的泊松比  $\nu = 0.49$ ,  $E_p/E_0 = 250.0$ ,  $E_p/E_1 = 1000.0$ ,  $RE_p/k\eta_0 = 5.0 \times 10^4$ , 这里  $\eta_0$  为土骨架的阻尼系数。计算所得的 1 号、2 号、3 号桩 (见图 5) 的轴力、孔压沿桩轴线的变化情况如图 6、7 所示。其中:  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$  为无量纲时间, 即  $\tau_1 = \frac{c_1 t_1}{R^2}$ , 其余类推,  $c_1 = \frac{2E_1 \eta_0}{\rho}$ ,  $\eta = \frac{1-\nu}{1-2\nu}$ 。计算中取

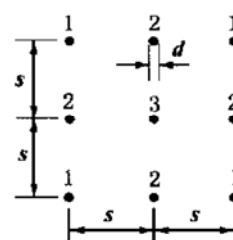


图 5  $3 \times 3$  带有刚性承台群桩

Fig. 5  $3 \times 3$  piles group

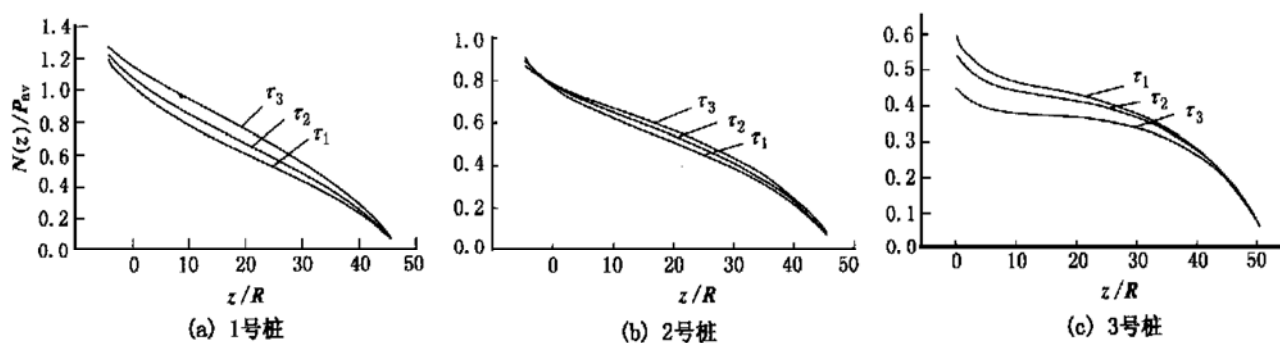


图6 轴力沿轴线的变化情况

Fig. 6 The axial force along the axis of pile

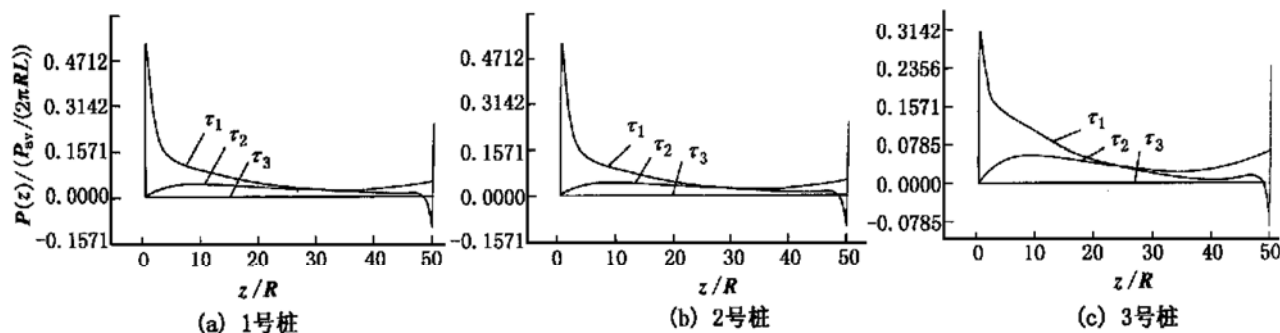


图7 孔压沿轴线的变化情况

Fig. 7 The pore pressure along the axis of pile

$\tau_1 = 5.1 \times 10^{-3}$ ,  $\tau_2 = 5.1 \times 10^0$ ,  $\tau_3 = 5.1 \times 10^4$ 。在图中桩的计算轴力用平均桩顶载荷  $P_{av}$  来进行无量纲化, 孔压用  $P_{av}/(2\pi RL)$  进行无量纲化。表1中给出了承台无量纲位移  $E_1 Ru_z/P_{av}$  随着时间的变化情况, 其中  $E_1$  为图2模型中的  $E_1$ ,  $R$  为桩的半径,  $u_z$  为刚性承台位移。

表1 刚性承台无量纲位移随时间变化情况

Table 1 The non dimensional displacement at different time

| 时刻                | $\tau_1$ | $\tau_2$ | $\tau_3$ |
|-------------------|----------|----------|----------|
| $E_1 Ru_z/P_{av}$ | 0.0384   | 0.0610   | 0.1737   |

## 5 结 论

本文提出了一种计算半空间粘弹性饱和土中轴向受荷群桩任意时刻的变形的办法。由于采用 Laplace 变换和积分方程方法, 因而在用于群桩计算时可以大大减小计算量。运用上述方法可以求解出桩受载荷时任意时刻的桩的沉降、轴力以及桩侧的剪切力。通过上述方法可以对考虑固结和流变的饱和土中的群桩进行参数研究, 从而应用于工程实际。

## 参考文献:

[1] Butterfield R, Banerjee P K. The elastic analysis of compressible

piles and pile groups[J]. Geotechnique, 1971, 21(1): 43~ 60.

[2] Poulos H G, Davis E H. Pile Foundation Analysis and Design [M]. New York: John Wiley and Sons, 1980. 71~ 108.

[3] Ottaviani M. Three-dimensional finite element analysis of vertically loaded pile groups[J]. Geotechnique, 1975, 25(2): 159~ 174.

[4] Desai C S. Numerical design- analysis for piles in sands[J]. J of geot Engrg Div, ASCE, 1974, 100(GT6): 613~ 635.

[5] Boonsrang Niumpradit, Pisidhi Karasudhi. Load transfer from an elastic pile to a saturated porous elastic soil[J]. International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, 1981, 5: 115~ 138.

[6] Biot M A. General theory of three dimensional consolidation[J]. J Appl Phys, 1941, 12: 155~ 164.

[7] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1996. 213~ 221.

[8] Muki R, Sternberg E. Elastostatic load- transfer to a half-space from a partially embedded axially loaded rod[J]. Int J Solids Structures, 1970, 6: 69~ 90.

[9] 王建华, 陆建飞, 沈为平. Biot 固结理论在单桩负摩擦研究中的应用[J]. 岩土工程学报, 2000, 22(5): 590~ 593.

[10] Schapery R A. Approximate methods of transform inversion for visco-elastic stress analysis[A]. Proc 4th U S National Cong Appl Mech, Vol 2[C]. California: Berkeley, 1962. 1065~ 1085.