

土—基础相互作用的辐射阻尼^{*}

Radiation damping of soil— foundation interaction systems

杨先健

(国家机械工业局第四设计研究院, 洛阳, 471039)

文 摘 基于土体中应力波理论, 导出土—基础在影响深度范围内土的辐射阻尼, 提出了类比剪切群速的半空间理论阻尼比公式。其结果比经典半空间理论阻尼更符合工程实践。并由波的散射原理, 分析了土层差异对半空间阻尼的影响效应, 提出了工程实用计算方法。依波动理论, 提出了基础振动的影响深度确定公式。理论计算与实测对比甚为吻合。

关键词 土—基础, 辐射阻尼, 类比剪切群速, 波的散射

中图法分类号 TU 435

文献标识码 A

文章编号 1000-4548(2000)04-0416-05

作者简介 杨先健, 男, 1929年生, 1953年毕业于重庆建筑工程学院。中国工程设计大师, 教授级高级工程师, 国家特许注册结构工程师。主要从事建筑结构、地基、基础、土—基础振动与波动、工业环境振动设计与研究及部分教学(兼职博导)工作。

Yang Xianjian

(4th Design and Research Institute of National Bureau of Machinery Industry, Luoyang, 471039)

Abstract Based on the theory of stress wave in soil, the radiation damping which is caused in soil of dynamic soil— foundation within the range of the depth of influence, and the fundamental formula of damping ratio of the elastic half-space by the analog group shear wave velocity are presented in this paper. The analyzed results correspond better with the engineering practice than that of the classical theory of half-space. The effect of the differential strata in half-space on the damping is analyzed by theory of wave scattering, and the practical calculation method is presented. On the basis of the theory of wave, the formula of depth affected by the foundation vibration are involved in this study. Finally, taking some engineering project as examples, the results of theoretic calculation and the field observation have been found to be in good agreement.

Key words soil— foundation interaction systems, radiation damping, analog group shear wave velocity, theory of wave scattering

1 前 言^{*}

辐射阻尼, 是弹性半空间上基础动力响应的重要参数, 是动力机器基础、工程抗震^[1~4]、环境振动与特种工程^[3,4]的关键课题之一, 一般根据弹性波动理论导得的辐射阻尼比, 是由经典的弹性介质动力学和经典的有阻尼振动理论组成。例如其竖向阻尼比为^[1,2]

$$D_Z = 0.425 / \sqrt{B_Z} \quad (1)$$

式中 $B_Z = \frac{1-\nu}{4} \frac{\gamma m}{\rho r_0^3}$, ν 为介质的泊松比, m 为基础包括基础上的全部静重总质量, ρ 为土介质质量密度, r_0 为基础半径。

这是将弹性半空间视为理想弹性介质获得的结果, 即当承受动荷载的基础, 向半空间介质(土层)运动一次, 在其接触面上就会产生应力波, 应力波以体波和面波形式向外传播。这些向外传播的波便带走一部分能量, 形成辐射阻尼。

但是由式(1)计算的结果却与工程实践差别甚大, 一般总是实测基础的阻尼比 D_Z , 远小于式(1)计算值而偏于不安全, 这就使工程设计者存在疑虑。曾对式(1) D_Z 值提出过各种形式的修正值、修正公式, 主要有如下3种:

(1) 我国《动力机器基础设计规范》GB 500 40—96 以粘性土为例, 有

$$D_Z = 0.16 / \sqrt{m} \quad (2)$$

式中 $\bar{m} = \frac{m}{\rho_A \sqrt{A}} = \frac{m}{\rho \pi r_0^2 \sqrt{\pi r_0^2}} = 0.18 \frac{m}{\rho_0^3} \approx \frac{1-\nu}{4}$

$\cdot \frac{m}{\rho_0^3} = B_Z$ 。其中 $\nu = 0.4$, A 为基底面积。于是式(2)

与式(1)存在如下关系:

$$D_Z = \frac{0.16}{\sqrt{m}} = \frac{0.425}{\sqrt{B_Z}} \times 0.377 = \frac{0.16}{\sqrt{B_Z}}$$

这就是说, 在粘性土介质中阻尼比计算式(2)的计算结果比弹性空间理论阻尼比计算式(1)的结果减小了62.3%。

(2) 原苏联《动力机器基础设计规范》СНП 2.02.05—87

依相同关系, 简谐扰力作用下的竖向阻尼比, 砂土时比理论式(1)减小了30%, 粘性土($\nu = 0.4$)时, 则减小了41.2%。瞬态扰力作用下的竖向阻尼比比简谐扰力的 D_Z 值增加了0.75倍。

* 国家机械工业局科研课题(No. 机行设 97—013)

到稿日期: 1999—08—23

(3) R. V. Whitman (1972)

通过对一些作者的试验资料的分析, 建议在 $\nu=1/4$ 时, 取式(1)的一半, 即^[3]

$$D_Z = \frac{0.49}{\sqrt{b}} \quad (3)$$

式中 $b = m/\rho_0^3$ 。

韩英才(1984)在对 Whitman 论证过的试验资料及建议的式(3), 作一些实测资料补充后, 也建议了式(3)^[5]。

上述三种修正, 均以各自所分析的实测资料与设计决策来确定其与式(1)之比值, 在几乎是相同的土类情况下, 其差别甚大, 无明显规律。但有一点是共同的, 就是为了与工程实践相近而比式(1)理论值小很多。本文由波动理论的基本原理分析, 认为 Lysmer 在将弹性半空间上刚性圆磬的动力响应, 比拟为质量—弹簧—阻尼器集总参数体系时^[1,2], 没有区分提供地基动力刚度的波速, 与辐射阻尼即波动能量传递耗散的波速。本文提出前者为相速, 后者应为群速。因为弹性半空间介质中的能量是以群速传播的^[2,6], 群速一般总是小于相速, 这就是说, 从弹性介质动力学的原理上分析, D_Z 的理论值也应小于式(1)结果。

另外, 基础振动的影响深度问题, 也是辐射阻尼中的重要因素, 如在影响深度范围内, 土层有明显差异就对阻尼有很大影响, 如在影响深度范围外, 这个影响就减小或无甚影响。这个界限很难划出。本文依据波动理论, 提出了工程实用方法。

本文的理论结果, 与一些已实施的工程原型基础的实测结果作了比较, 甚吻合。

2 弹性半空间上刚体基础的阻抗函数

2.1 土—基础阻抗函数的定义

在土—基础动力响应中, 由于刚度与阻尼的特性, 本文分别将它们定义为:

(1) 刚性块体下弹性半空间介质的动力刚度, 在土—基础体系的阻抗函数中为实部, 无能量损失。由介质的相速贡献。

(2) 刚性块体下弹性半空间介质的辐射阻尼, 在土—基础体系的阻抗函数中为虚部, 即能量扩散损耗部分。由介质的群速贡献。

2.2 基本假定

由于在均质弹性半空间内部, 目前尚未发现物理弥散, 也就不存在弥散体波^[7,8], 即没有剪切群速。本文在半空间的主要振动方向, 假设一虚拟平行边界而获得几何弥散, 并因此获得虚拟剪切群速及由该群速贡献的辐射阻尼。本文称此剪切群速为类比剪切群速。

3 波动应力阻尼

笔者曾提出波动应力阻尼^[9], 在某些特定的情况下, 如将其纵波波速按半空间阻尼导得为“类比波速”就与 G. Gazetas 一致^[10]。如采用静刚度, 就与山原浩理论一致。

图1将半无限空间地基, 在刚体基础振动作用下的主要方向, 按一维理论分解为地基刚度 K_Z 与波动阻尼系数 C_Z 。将基础下基底面 A 的土虚拟一边界视为半无限圆柱体, 则其竖向线位移为

$$W = \frac{Q}{\sqrt{(K_Z - \omega^2 m)^2 + (A \rho_V \omega)^2}} \cos(\omega t - \alpha) \quad (4)$$

$$\tan \alpha = \frac{A \rho_V \omega}{K_Z - \omega^2 m} \quad (5)$$

式(4)的阻尼项 $(A \rho_V \omega)^2 = (C_Z \omega)^2$, 其中

$$C_Z = A \rho_V \quad (6)$$

式(6)与 G. Gazetas^[10]的波动应力阻尼完全相同。但根据土介质纵波波速

$$V_L = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} V_S \quad (7)$$

在土介质中泊松比 $\nu=0.5$ 时无意义。

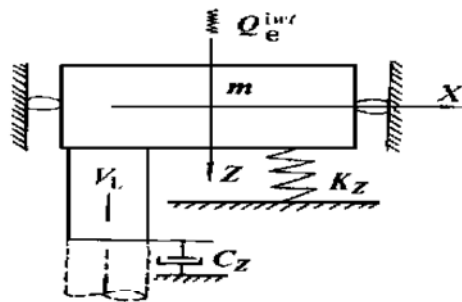


图1 波动应力阻尼力学模型

Fig. 1 The mechanical model of the damping of stress wave

4 半空间辐射阻尼的类比波速

已知半空间竖向辐射阻尼系数为^[2]

$$C_Z = \frac{3.4}{1-\nu} \sqrt{4\rho_0^2} \quad (8)$$

将 $V_S = \sqrt{4\rho_0^2}$, $A = r_0^2 \pi$ 代入式(8) 可得

$$C_Z = A \rho_V \frac{3.4}{\pi(1-\nu)} V_S = A \rho_{V_{La}} \quad (9)$$

$$\text{式中 } V_{La} = \frac{3.4}{\pi(1-\nu)} V_S \quad (10)$$

式(9)与式(6)完全等同, 其差别就在于纵波波速 V_L 变为 V_{La} 。其中式(10)的 V_{La} 称为类比波速(analog wave velocity), 是由 Lysmer 提出并由 G. Gazetas 引用^[10]的波速。 V_{La} 解决了当 $\nu=0.5$ 时 V_L 不定值问题。由式(9)与式(6)的关系可知, 除部分很低的频段外, 将三维

半无限空间简化为一维半无限柱体(图 1)是可行的。

5 土—基础相互作用的辐射阻尼

半无限柱体的纵向振动的能量,是以群速来传播的^[11],群速一般总是小于不考虑柱体横截面效应的相速(纵波波速) $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$ 。可见,由辐射阻尼所带走的能量,实际上是小于式(1)值。这也许就是长期以来,即使是在均质的地基上,由式(1)计算的阻尼比,总是大于实际阻尼比的一个重要理论原因。

5.1 辐射阻尼的类比群速

由圆柱体纵向运动的 Pochhammer 方程,并根据 Davies R. M. 1948 年对其方程的计算结果^[11],取其相应于柱体纵波比值的群速,求得与半空间介质纵波 V_L 相应的群速比。在各种 r_0/λ 比值下类比波速 V_{La} 的群速,本文称为类比群速 V_{Lc} (analog group velocity),其表达式为

$$V_{Lc} = V_{La} \exp[-\pi(1-\nu)\delta] \quad (11)$$

式中 δ 值见表 1。

表 1 辐射阻尼影响系数 δ 值

Table 1 Parameters δ of radiation damping

r_0/λ	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.2	1.6	2.0
δ	0.110	0.285	0.450	0.400	0.330	0.240	0.205	0.185	0.170

注: ① r_0/λ 小于 0.2 时,按 0.2 计算; ② λ 为波长, $i = Z, X, \Phi, \Psi$; ③ Z 为竖向, X 为水平向, Φ 为回转, Ψ 为扭转。

5.2 计算辐射阻尼的类比剪切群速

已求得类比群速,可将式(10)的 V_{La} 代入式(11),即可获得用于计算辐射阻尼的类比剪切群速,如

$$V_{Lc} = \frac{3.4}{\pi(1-\nu)} V_s \exp[-\pi(1-\nu)\delta]$$

上式可表达为

$$V_{Lc} = \frac{3.4}{\pi(1-\nu)} V_{sc} \quad (12)$$

式中 V_{sc} 本文称类比剪切群速(analog group shear wave velocity)。

$$V_{sc} = V_s \exp[-\pi(1-\nu)\delta] \quad (13)$$

式中 V_s 为介质剪切波速(m/s)。可见类比剪切群速 V_{sc} 总是小于介质的剪切波速 V_s 。

5.3 半空间上块体基础的辐射阻尼比

求得介质的类比剪切群速 V_{sc} 后,就可进一步求得块体基础下以类比群速扩散的辐射的阻尼比。

(1) 半空间辐射阻尼系数及阻尼比

将式(12)的类比群速代入式(9),即可得以类比剪切群速贡献的竖向辐射阻尼系数为

$$C_z = A\rho \frac{3.4}{\pi(1-\nu)} V_s \exp[-\pi(1-\nu)\delta] \quad (14)$$

同理,水平辐射阻尼系数为

$$C_x = A\rho V_s \exp[-\pi(1-\nu)\delta] \quad (15)$$

回转辐射阻尼系数为

$$C_\phi = I\rho \frac{3.4}{\pi(1-\nu)} V_s \exp[-\pi(1-\nu)\delta] \quad (16)$$

式中 I 为块体基础底面通过其形心轴的惯性矩。

扭转辐射阻尼系数为

$$C_\psi = I_z \rho V_s \exp[-\pi(1-\nu)\delta] \quad (17)$$

式中 I_z 为块体基础底面通过其形心的极惯性矩。

竖向与横向辐射阻尼比为

$$D_i = \frac{C_i}{2\sqrt{K_{di}m}} \quad (i = Z, X) \quad (18)$$

式中 K_{di} 为考虑类比波速 V_{La} 的相应动刚度。

回转与扭转辐射阻尼比为

$$D_j = \frac{C_j}{2\sqrt{K_{dj}J_j}} \quad (j = \Phi, \Psi) \quad (19)$$

式中 K_{dj} 为相应的动刚度; J_j 为基组(基础及其它静重)对通过其重心 j 轴的转动惯量。

(2) 按类比剪切群速计算半空间辐射阻尼比

如将已求得的类比剪切群速式(13) V_{sc} 取代 Lysmer^[1,2] 比拟半空间辐射阻尼的剪切波速 V_s ,即可求得由群速向外扩散的半空间辐射阻尼,如其竖向阻尼系数由式(8)为

$$C_z = \frac{3.4}{1-\nu} \sqrt{14\rho} V_{sc}^2 = \frac{0.85mV_s}{B_{zo}} \quad (20)$$

其竖向静刚度为

$$K_z = \frac{4H_0}{1-\nu} = \frac{mV_s^2}{B_z r_0^2} \quad (21)$$

式(20)的 V_s 由式(13)的 V_{sc} 取代,则其竖向辐射阻尼比为

$$D_z = \frac{C_z}{2\sqrt{K_z m}} = \frac{0.425}{\sqrt{B_z}} \exp[-\pi(1-\nu)\delta] \quad (22)$$

同理,其水平辐射阻尼比为

$$D_x = \frac{0.288}{\sqrt{B_x}} \exp[-\pi(1-\nu)\delta] \quad (23)$$

式中 $B_x = \frac{7-8\nu}{32(1-\nu)} \frac{m}{\rho_0^3}$

回转辐射阻尼比为

$$D_\phi = \frac{0.15}{(1+B_\phi)\sqrt{B_\phi}} \exp[-\pi(1-\nu)\delta] \quad (24)$$

式中 $B_\phi = \frac{3(1-\nu)}{8} \frac{J_\phi}{\rho_0^5}$

扭转辐射阻尼比为

$$D_\psi = \frac{0.50}{(1+2B_\psi)} \exp[-\pi(1-\nu)\delta] \quad (25)$$

式中 $D_\psi = J_\psi/\rho_0^5$

6 层状及复杂地基的辐射阻尼

层状地基中层间性状差异较大,如基层 V_S 比 H 层 V_S 大 2 倍或更多,其层厚 H 与波长 λ_k 的比值,对土层阻尼的影响关系很大,以双层系考虑。

(1) $\lambda_k < H$, H 层具有半空间性状(吴世明等)^[6]。
(2) $\lambda_k > 8H$, H 层对波动无影响,下卧层为半空间性状(吴世明等)^[6]。

(3) $\lambda_k > 4H$, H 层不存在 R 波(面波),体波更不存在,所有动态情况下辐射阻尼 $C_Z = 0$ (wolf)^[4],相应的 C_X , C_Φ , C_Ψ 亦为零。仅存在土材阻尼。这时, H 层上的土—基础为有限系统, H 层没有波动,下卧层则为空间性状。

(4) 在平面问题中(条形基础),由于 H 层固有特性的影响,地基动力阻抗随频率的变化呈现振荡现象(栾茂田,林皋)^[12]。

(5) 具有软或坚硬夹层地基(多层系),笔者曾按波的散射原理,根据土层性状以提高或降低半空间介质阻抗^[13]。由式(14)~(17)可见,土介质辐射阻尼的一个重要参数是剪切波速 V_S 。因此可考虑波速在土层传递中产生的变化,这种变化,并非是指波速与波长的关系(弥散曲线)变化,而是指波通过该软弱或坚硬层后透射与反射的变化。即透过去多少比值的波,就产生多少比值的辐射阻尼,未透过去的就不能带走波的能量而反射回基底因而也不能形成辐射阻尼。此时

$$V_S = T_w V_{S1} \quad (26)$$

式中 V_S 为计算辐射阻尼时,地基土介质剪切波速; V_{S1} 为计算层状地基辐射阻尼时,第一层剪切波速。

透射土夹层的波的比值可用波的传递率表示^[13,14],并与波阻抗比 $\alpha = (\rho_2 V_{S2})/(\rho_1 V_{S1})$ 相关。当 $\rho_2 V_{S2} = \rho_1 V_{S1}$ 时, $T_w = 1.0$,即地基为均质半空间,基础下体波可向地基下辐射而产生辐射阻尼。当 $\rho_2 V_{S2}$ 大于,或小于 $\rho_1 V_{S1}$ 时,基础下体波将视其比值通过,而减小辐射阻尼。在式(18)~(25)中,阻尼系数 C_i , C_j 应用式(26)的 V_S ,而在计算阻尼比的动力刚度中,用具有 V_S 层厚度对动刚度影响之 V_{S1} 。

7 块体基础动力响应的影响深度

半空间上块体基础动力响应的影响深度,是计算其辐射阻尼不能回避的问题。G. Gazetas 按基础静压力泡考虑其影响深度^[10],与波动无关。这就把这个严密的半空间波动问题过于粗糙化了。由弹性半空间动态理论解的基础动力影响深度,笔者已在文献[15]中作了分析。其动力影响深度与波长的关系如表 2。

表 2 土—基础相互作用的动力响应影响深度

Table 2 Depth of dynamic influence for surface foundation of soil — foundations interaction systems

运动方向	土类	波长范围 ($2\pi r_0/\lambda$)	影响深度 H_i
竖向	粘性土	0~1.5	(1.186~2.726) r_0
	砂土	0~1.5	(1.487~2.550) r_0
水	$A = 20\sim 500 \text{ m}^2$	粘性土 无关	3.970 r_0
		砂土 无关	3.320 r_0
平	$A = 5\sim 20 \text{ m}^2$	粘性土 无关	(5.310~6.638) r_0
		砂土 无关	(4.425~5.530) r_0
回转	粘性土及砂土	0~1.5	(0.770~1.300) r_0

注:① $i = Z, X, \Phi$; ② A 为基底面积。

8 工程实例

因篇幅关系,工程实例仅列出竖向阻尼比,其计算与实测结果见表 3。其中 F_1 为 125 000 kN 压力机基础,按质阻弹(现行规范)理论需 2 040 m^3 混凝土,计算 $A_Z = 0.389 \text{ mm}$,按本文半空间方法并考虑了层间软岩影响,实用 840 m^3 混凝土,节省混凝土 1 200 m^3 ,计算 $A_Z = 0.142 \text{ mm}$ 。 F_2 为岩石地基上砂卵石垫层,辐射阻尼系数 $C_Z = 0$,仅存在垫层材料阻尼。

以表 3 中计算值与实测值对比可见,本文的理论结果比未考虑群速的经典理论式(1)的结果与实测结果更吻合。

9 结 语

(1) 本文提出以类比剪切群速计算土—基础相互作用的辐射阻尼,所获得的理论结果与工程原型实测结果对照,比经典半空间理论准确率高。依波的散射原理,层状地基中存在软、硬差别较大的地层对剪切波的影响,本文方法式(26),比加权平均指标更为符合波动原理,因而也更加符合工程实践。另一个计算辐射阻尼重要问题是动力影响深度,表 2 提出的动力影响深度计算式不仅简单,而且比 G. Gazetas 提出的与波动无关的静力压力泡方法,要符合半空间波动理论法则。

(2) 实例 F_2 因在基岩与基础之间采用卵石垫层,且厚度很薄,仅为 450 mm,阻尼效应中因此无剪切波存在($V_S = 0$),因而 $C_Z = 0$,即仅存在砂卵石垫层材料阻尼。这是质阻弹(现行规范)理论无法预测的。

(3) 实例 F_1 基岩中存在软岩下卧层,其 V_{S1} 因波的散射效应比完整基岩减小甚多,本文实例计算为完整基岩 0.44 倍。

本文承王贻荪教授提供宝贵意见,谨此致谢!

表 3 竖向阻尼比计算与工程原型实测结果

Table 3 The calculated and observed results of vertical damping ratio for some case histories

序号	地基土 (基础尺寸: 长×宽×深)	地基刚度 ($\text{kN}\cdot\text{m}^{-1}$) 静态刚度 (动态刚度)	$\frac{m}{\rho_0^3}$	竖向阻尼比 D_z			固有频率 /Hz 计算值 (实测值)	竖向线位移 A_z /mm 计算值 (实测值)	备 注	
				式(1) 计算值	式(18) 计算值	式(22) 计算值			说 明	资料来源
F ₁	粉砂岩 $V_s = 3783 \text{ m/s}$, 粘土岩 $V_s = 410 \text{ m/s}$, $V_s = T_u V_{sl} = 1663 \text{ m/s}$, $\nu = 0.26$ (11.2m × 12.0m × 8.3 m)	209.03×10^6 (188.13×10^6)	6.1	0.400	0.235 [0.309]	0.248	34.85 (33.3)	0.142 (0.130*)	25 000 kN 热模锻压力机; 线位移考虑部分埋深* 综合放大值	四院设计朱宏有, 童洁英, 张志胜, 杨先健. 土动力学理论与实践, 1998, 大连
F ₂	粘土岩顶面用 RC 锚筋底座, 其上为 450 mm 厚砂卵石垫层 (12.0 m × 9.5 m × 9.61 m)	147×10^6 (132.3×10^6)	8.93	0.340	0.050	0.08*	31.25 (30.0)	0.237 (0.252)	160 kN 模锻锤 $C_z = 0$, 仅考虑垫层材料阻尼* 综合实测值	《建筑结构》1975(5), 28~35
F ₄	灰黑色石灰岩 $V_s = 1500 \sim 1700 \text{ m/s}$, $\nu = 0.22$ (6.54 m × 4.40 m × 5.50 m)	98.3×10^6 (80.3×10^6)	28.8	0.180	0.209 [0.136]	0.16	70.27 (62.7)	0.079 (0.070)	30 kN 模锻锤线位移考虑部分埋深	四院设计, 张翰文, 土木工程学报, 1988(2), 81~86
F ₅	黄土状粉质粘土 $V_s = 179 \text{ m/s}$, $\nu = 0.4$ (15.0 m × 15.0 m × 4.90 m)	6.88×10^6 (5.16×10^6)	2.60	0.694	0.319 [0.489]	0.33	7.05 (7.10)	0.016 (0.015)	5 m × 5 m 地震模拟振动台(考虑埋深)	韩英才, 建筑结构学报, 1986(5), 59~67
F ₆	砾石细砂 $G = 1055 \text{ kN/cm}^2$, $\nu = 0.4$ (3.72 m × 1.88 m × 1.20 m)	1.3×10^6 (1.03×10^6)	3.70	0.855	0.400 [0.700]	0.43	33.1 (37.6)	0.0242 (0.0184)	L3.5-30/4 空压机 300 r/m (考虑埋深)	任广福, 陈敏, 振动与冲击, 29(1), 1989
F ₇	中风化砾岩, $V_s = 800 \text{ m/s}$, $\nu = 0.4$ (14.0 m × 10.0 m × 5 m)	46.67×10^6 (42×10^6)	4.0	0.896	0.551	0.55	27.85 (29.0)	—	多功能模拟振动台(考虑埋深)	吴邦达, 第四届全国土动力学会议论文集, 1994

参 考 文 献

- 小理查特 F E, 伍兹 R D, 小霍尔 J R 著. 土与基础的振动. 徐攸在, 等译. 北京: 中国建筑工业出版社, 1976
- 严人觉, 王贻荪, 韩清宇. 动力基础半空间理论概论. 北京: 中国建筑工业出版社, 1981
- Whitman R 著. 土—结构物动力相互作用——现状与发展趋势述评, Applications of experimental and theoretical structural dynamics. 韩国明译. 1972
- Wolf J P 著. 土—结构动力相互作用. 吴世明等译. 北京: 地震出版社, 1989
- 韩英才. 基础—土相互作用的几个问题. 建筑结构学报, 1984, 5(6): 69~73
- 吴世明等. 利用表面波频谱分析测试土层波速. 地震工程与工程振动, 1988, 8(4): 27~32
- 潘复兰. 振动计算与隔振设计. 北京: 中国建筑工业出版社, 1976
- 陈云敏, 陈仁朋, 吴世明. 多相介质波动理论的研究、应用与发展. 见: 第八届土力学及岩土工程学术会议论文集. 万国学术出版社, 1999. 541~544
- 杨先健. 计算基础振幅的波动应力阻尼法. 工程力学, 1987, 4(2): 92~97
- Gazetas G. Analysis of machine foundation vibrations: state of the art. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1983, 2(1): 2~42
- 考尔斯基 H. 固体中的应力波. 王 仁 等译. 北京: 科学出版社, 1966
- 栾茂田, 林 皋. 非均质地基上条形基础动力阻抗函数的简化分析模型. 振动工程学报, 1993, 6(3): 263~268
- Yang Xianjian. Ground vibration isolated by soil and pile barriers. In: 2nd Int Conf Rec Adv Geot Earth Engn and soil Dyn St Louis, Vol(II). 1991. 1557~1562
- 高广运. 非连续屏障地面隔振理论与应用: [博士学位论文]. 杭州: 浙江大学, 1998
- 杨先健. 基础运动的影响深度. 建筑结构, 1987(3): 263~268