

考虑材料应变软化的球(柱)孔扩张理论 在桩底注浆中的研究*

Research on grouted-in pile bottom with spherical(columnar) hole
expansion theory considering material strain-softening

张忠苗 包 风 陈云敏
(浙江大学岩土工程研究所, 杭州, 310027)

中图法分类号 TU 473

作者简介 张忠苗, 男, 1961年生, 浙江大学土木系岩土所副教授, 从事桩基工程和岩土工程教学, 检测和研究工作。

1 问题的提出*

密实砂、超固结土等材料在应力应变关系曲线上有明显的峰值, 当应力小于峰值强度, 在起始阶段表现为弹性状态, 然后逐渐屈服; 到达峰值后, 应力随变形的增大而降低, 这称为应变软化现象。著名学者 Prevost 和 Hughes 提出在应变软化范围内, 由于应力增量与应变增量的内积为负值, 使得数值模拟分析结果并不唯一。因此引进 K. Dems 及 Z. Mroz 提出的分段线性函数来模拟应力应变关系, 峰值至残余应力之间的关系, 则用应力跌落表示。图1为软化模型在一维情况下的表示, 其中A点和B点相对应的是初始屈服面 $F(\sigma_y) = 0$ 和 $f(\sigma_y) = 0$, 当质点加载至初始屈服面上点A且加载条件得到满足时, 应力跌落到后继屈服面 $f(\sigma_y) = 0$ 上的B点。在加载条件满足时, 产生塑性流动, 直至结构破坏, 压密注浆变为劈裂注浆。运用孔扩张理论有利于注浆理论分析(见图2)。桩底注浆既有球扩张, 也有柱孔扩张问题。

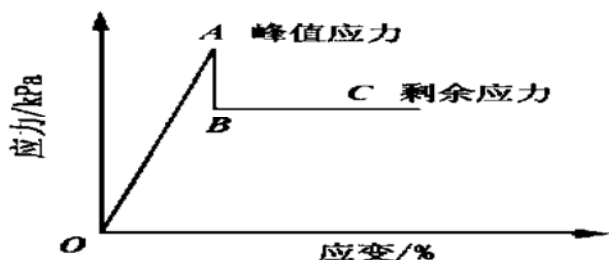


图1 应力跌落软化模型

Fig. 1 Model of strain-softening

2 柱(球)形孔扩张问题的理论推导

为便于分析, 引入参数 m , 对柱形孔扩张分析 $m=1$, 对球形孔扩张分析 $m=2$ 。图3为无限体中孔扩张问

题的平面表示。在孔内壁作用压力 p 时, 径向受压, 切向受拉。 p 较小时, 孔周围介质处于弹性状态; 当 p 值增加并达到某一值 p_c 时, 孔周围介质将发生屈服, 形成损伤面 S_c 。随着 p 值增大, 损伤面 S_c 向外扩展运动, S_c 上的应力发生应力跌落, 形成一个环状柱形损伤区(塑性区) D_p 。但在此以外仍为弹性区域 D_e 。图中 a 为柱孔的半径, r_1 为损伤区半径, p 为孔内扩张压力。

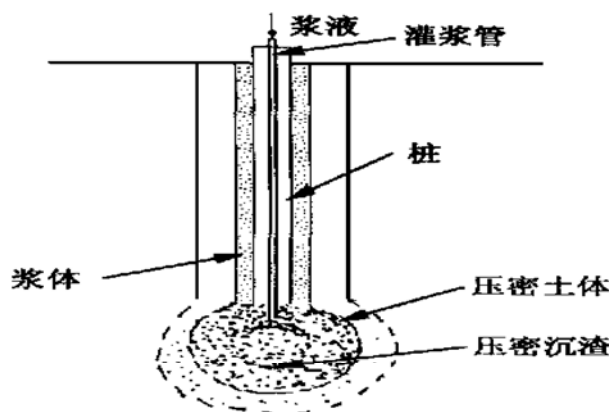


图2 扩张理论在注浆工程中的应用示意图

Fig. 2 Application of expansion theory in grouting

(1) 基本方程

平衡方程:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + m \frac{\sigma_r - \sigma_0}{r} = 0 \quad (1)$$

几何方程:

$$\epsilon_r = \frac{du_r}{dr} \quad \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \quad (2)$$

弹性本构方程:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{M} \left[\sigma_r - \frac{mV}{1 - \sqrt{2-m}} \sigma_0 \right] \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{M} \left[-\frac{V}{1 - \sqrt{2-m}} \sigma_r + [1 - \sqrt{2-m}] \sigma_0 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

* 到稿日期: 1999-03-01

其中 ν 为泊松比; 而 $M = \frac{E}{1 - \nu^2(2 - m)}$ (4)

塑性变形阶段采用 Mohr-Coulomb 准则, 其表示为初始屈服函数:

$$F = (\sigma_r - \alpha_0) - (\sigma_r + \alpha_0) \sin \varphi - 2c \cos \varphi = 0 \quad (5a)$$

后继屈服函数:

$$f = (\sigma_r - \alpha_0) - (\sigma_r + \alpha_0) \sin \varphi - 2c_r \cos \varphi_r = 0 \quad (5b)$$

式中 $c, \varphi, c_r, \varphi_r$ 分别为材料凝聚力、内摩擦角、残余凝聚力、残余内摩擦角。以上皆规定压应力为正, 拉应力为负。

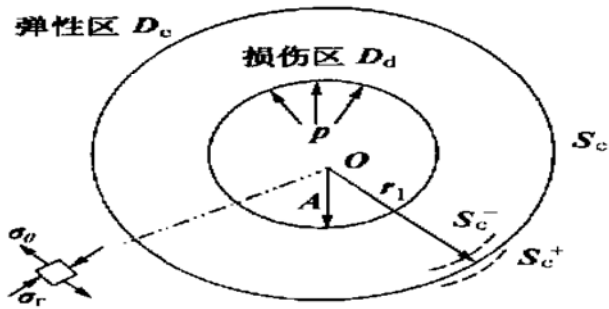


图3 孔扩张问题

Fig. 3 Expansion of a hole

(2) 弹塑性应力场及位移场的确定

a) 弹性区 D_e , $D_e = \{r | r \geq a, p < p_c\} \cup \{r | r \geq r_1, p \geq p_c\}$.

其中 p_c 为开始出现塑性变形时的压力。

$$\text{边界条件: } \sigma_r(a) = p \quad (6a)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_r = p_0 \quad (6b)$$

由弹性轴对称问题的解答和边界条件, 并考虑土体中存在的初始应力 p_0 , 可得弹性状态土体的应力场和位移场:

$$\sigma_r = (p - p_0) \left(\frac{a}{r} \right)^{m+1} + p_0 \quad (7a)$$

$$\alpha_0 = - \frac{(p - p_0)}{m} \left(\frac{a}{r} \right)^{m+1} + p_0$$

$$u = \frac{p - p_0}{2mG} \left(\frac{a}{r} \right)^{m+1} r \quad (7b)$$

上式为 $D_e = \{r | r \geq a, p < p_c\}$ 上的应力场位移场计算公式。式中 a 为内孔半径, r 为计算点的半径。

对于域 $D_e = \{r | r \geq r_1, p \geq p_c\}$ 上的公式, 只需将 a 改为 r_1 , p 改为 p' 即可。 r_1 为塑性区半径, p' 为 S_c 上的法向应力。

b) 塑性区 D_d , $D_d = \{r | a \leq r \leq r_1, p \geq p_c\}$ 。(5a) 可变形为

$$\alpha_r - \alpha \alpha_0 = Y \quad (8)$$

$$\text{其中 } \alpha = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad Y = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

把式(7a)代入式(5a), 得到孔壁开始出现塑性区

时的临界扩张压力为

$$p_c = 2mG\delta + p_0 \quad (9)$$

其中 $\delta = \frac{Y + (\alpha - 1)p_0}{2(m + \alpha)G}$

由平衡方程式(1)、屈服条件(5b)及边界条件, 可得到弹性区域 D_e 的应力场和位移场解答为

$$\sigma_r = (p' - p_0) \left(\frac{r_1}{r} \right)^{m+1} + p_0 \quad (10a)$$

$$\alpha_0 = - \frac{(p' - p_0)}{m} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{m+1} + p_0$$

$$u = \frac{p' - p_0}{2mG} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{m+1} r \quad (10b)$$

当 $r = r_1$ 时

$$u|_{r=r_1} = \frac{(p + c_r \cot \varphi_r) \left(\frac{a}{r_1} \right)^{\frac{2m \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} - c_r \cot \varphi_r - p_0}}{2mG} r_1 \quad (11)$$

记为 u_{r_1} 。根据 S_c^+ 上的应力条件, 可得 p 与 r_1 的关系

$$r_1 = a \left| \frac{p + \frac{Y_r}{\alpha_r - 1}}{2mG\delta + p_0 + \frac{Y_r}{\alpha_r - 1}} \right|^{\frac{\alpha}{m(\alpha_r - 1)}} \quad (12)$$

若材料无软化特性, 则上式可化为

$$r_1 = a \left| \frac{p + c \cot \varphi}{2mG\delta + p_0 + c \cot \varphi} \right|^{\frac{1 + \sin \varphi}{2m \sin \varphi}} \quad (13)$$

这正是理想弹塑性 Mohr-Coulomb 材料的塑性区范围的孔内压力关系公式。

下面确定最终扩张压力 p_u 及塑性区最大半径 $r_{1\max}$ 的大小, 对于 Mohr-Coulomb 材料根据体积平衡条件可得到最终扩张压力 p_u 为

$$p_u = (2mG\delta + p_0 + \frac{Y_r}{\alpha_r - 1}) \left| \frac{1 + \Delta E}{1 + \Delta - (1 - \delta)^{m+1}} \right|^{\frac{m(\alpha_r - 1)}{(m+1)\alpha_r}} - \frac{Y_r}{\alpha_r - 1} \quad (14)$$

其中 Δ 为塑性体积应变。

若 $c_r = c$, $\varphi_r = \varphi$ 忽略 δ^2 项, $m = 1$ 则

$$p_u = [c \cos \varphi + p_0(1 + \sin \varphi) + c \cot \varphi] \left| \frac{(1 + \Delta)E}{\Delta E + 2(1 + \nu)(c \cos \varphi + \sin \varphi p_0)} \right|^{\frac{\sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} - c \cot \varphi \quad (15)$$

若 $c_r = c$, $\varphi_r = \varphi$ 忽略 δ^2, δ^3 项, $m = 2$ 则

$$p_u = \frac{3(1 + \sin \varphi)(p_0 + c \cot \varphi)}{3 - \sin \varphi} - c \cot \varphi \left| \frac{(3 - \sin \varphi)(1 + \Delta)E}{\Delta E(3 - \sin \varphi) + 6(1 + \nu)(c \cos \varphi + \sin \varphi p_0)} \right|^{\frac{4 \sin \varphi}{3(1 + \sin \varphi)}} \quad (16)$$

上述两式恰是理想弹塑性模型的解答。

3 柱(球)形孔扩张问题的理论分析比较

为了反映不同软化程度对塑性区开展规律及应力场、位移场的影响, 笔者编制了一个程序对上述理论作了计算分析。假设土的变形模量 E 不变, 为 11.2MPa, 泊松比为 0.25。

(1) p_u 与 c_r , φ_r 关系

根据上述公式, 可计算得到不同材料常数, 不同软化程度时的 p_u 值(见图4)。从图中可以看出两点: ①在相同的材料条件下, 球形扩张极限压力比柱形扩张压力大; ②不管用球扩张或柱扩张算, 极限扩张压力 p_u 随凝聚力增大其值提高不多, 但随内摩擦角增大影响明显。这说明在无粘性土中可以选用较大的注浆压力, 因而注浆效果明显。

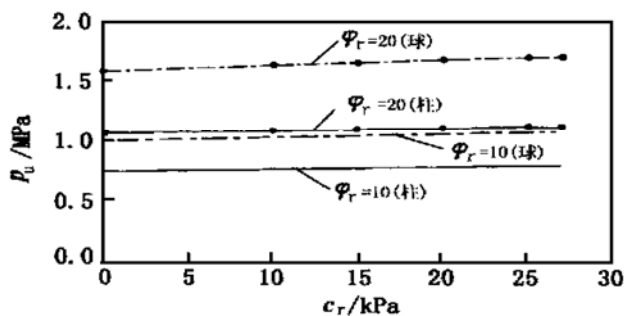


图4 柱(球)形扩张 $p_u - c_r$ 关系曲线

Fig. 4 $p_u - c_r$ curve for the expansion of a columnar hole

(2) p/c 与损伤区半径 r_1 的关系

考虑 $c = 8$ kPa, $\varphi = 22^\circ$, $c_r = 0$ kPa, $\varphi_r = 20^\circ$, 随初始压力 p_0 的变化其关系曲线见图5和图6。可见用 Mohr-Coulomb 准则来分析 $r_1 - p$ 的关系一定要考虑初始应力, 否则计算结果与实际结果相去很大。考虑达到极限压力时的损伤区半径, 柱形扩张为 $5.90a$, 球形扩张为 $3.30a$, 前者为后者的 1.78 倍。可见柱形扩张的塑性加固区要大得多。此外 p_0 增大, $r_1 - p$ 关系曲线较陡。

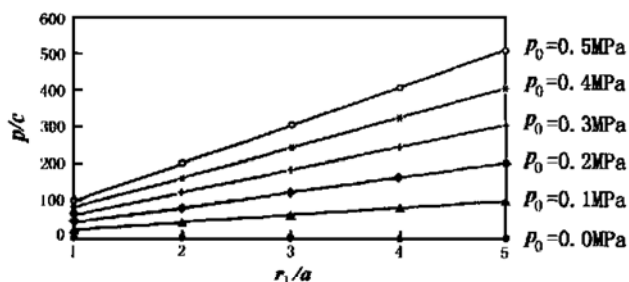


图5 球形扩张不同 p_0 时 $p/c - r_1/a$ 关系曲线

Fig. 5 $p/c - r_1/a$ curve for the expansion of a sphere under different p_0

(3) 扩张压力与径向应力场关系

为反映不同软化程度对应力场的影响, 取点 $r_0/a = 3.0$, $a = 1.5$ m, 计算在不同软化系数时, 不同 p 的径向应力 σ_r 。计算结果见图7和图8。这两个图都有一个共同特点, 即在 p 达到临界扩张压力 p_c 之后, σ_r 随软化系数的不同, 与 p 的关系曲线也不同, 出现分叉。

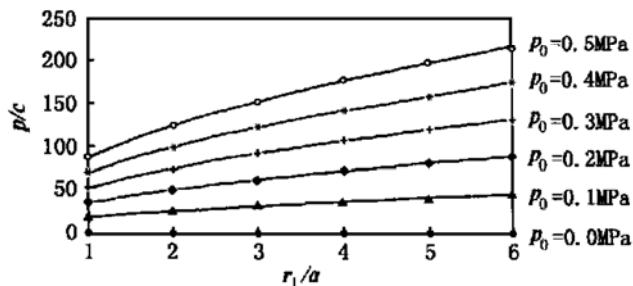


图6 柱形扩张不同 p_0 时 $p/c - r_1/a$ 关系曲线

Fig. 6 $p/c - r_1/a$ curve for the expansion of column under different p_0

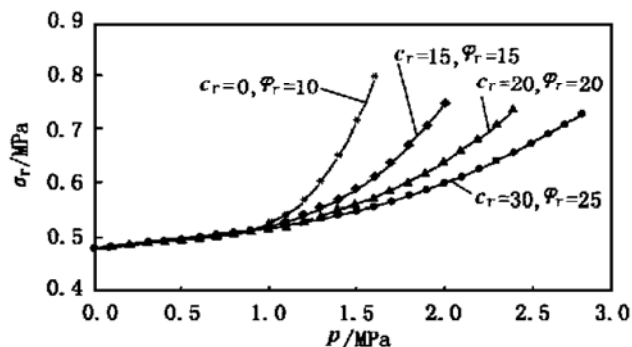


图7 球形扩张 $p - \sigma_r$ 关系曲线

Fig. 7 $p - \sigma_r$ curve for the spherical expansion

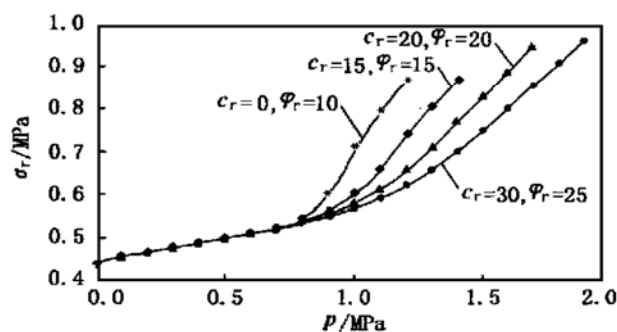


图8 柱形扩张 $p - \sigma_r$ 关系曲线

Fig. 8 $p - \sigma_r$ curve for the columnar expansion

(4) 扩张压力与位移场关系

为反映不同软化程度对位移场的影响, 取孔周围点 $r_0 = a$, $a = 0.75$ m, 计算在不同软化系数时, 不同 p 的径向位移 u_a 。计算时, 先计算塑性区扩展半径 r_1 , 然后选取相应的计算公式, 计算结果见图9和图10。这两个图也同样具有上述特点, 即在 p 达到临界扩张压力 p_c 之后, u_a 随软化系数的不同, 与 p 的关系曲线

也不同,也出现了分叉。

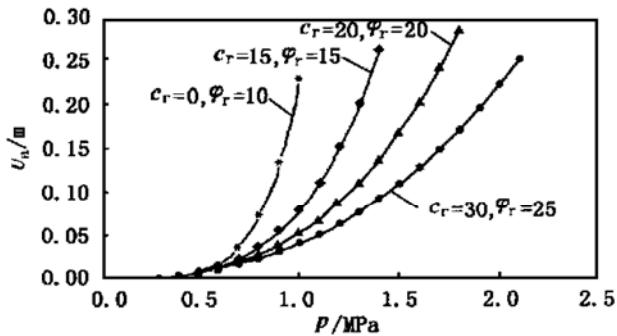


图9 球形扩张 $p-U_a$ 关系曲线

Fig. 9 $p-U_a$ curve for the spherical expansion

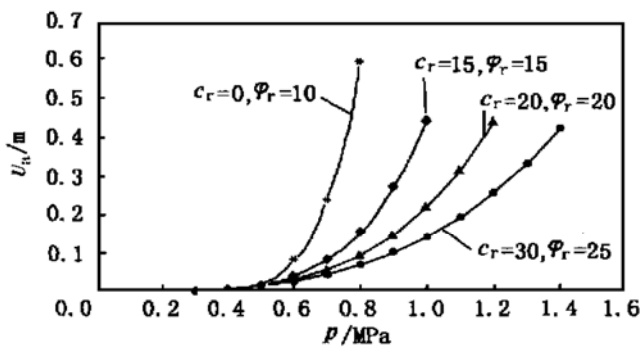


图10 柱形扩张 $p-U_a$ 关系曲线

Fig. 10 $p-U_a$ curve for the columnar expansion

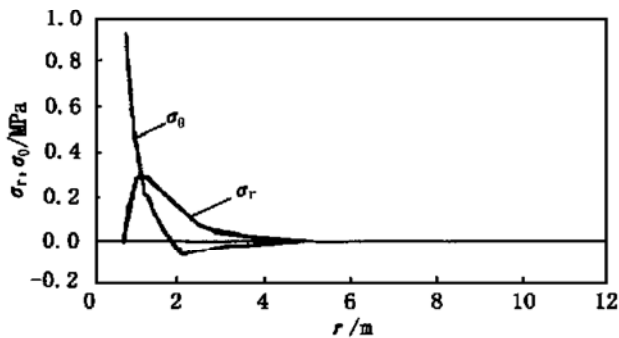


图11 球形扩张半径与残余应力关系曲线

Fig. 11 Relation between expanded radius and residual stress in spherical expansion

(5) 扩张半径与残余应力关系

在孔周围土体进入塑性状态以后,即使将内压力 p 全部卸除,由于变形不能完全恢复,不仅有残余变形,还会有残余应力。应用卸载定律,可以求出残余应力。径向应力及环向应力的分布情况见图11和图12,由图可知,孔附近的残余应力是正应力,这就好像是对

桩施加了预应力,从而提高了桩的侧摩阻力。这种借预加塑性变形来提高结构承载能力的技术在工程上得到广泛应用。

最后以一个工程实例来说明扩张理论在注浆工程中的应用。某大厦采用 $\phi 1500$ 钻孔桩群桩基础,桩长42 m,桩端持力层为砂砾石层(本处砂砾石层较松散),且桩入持力层深度为8 m。砂土的内摩擦角 $\varphi = 38^\circ$,残余内摩擦角 $\varphi_r = 25^\circ$ 。根据上述理论可求出极限扩张压力为3.73 MPa。这个理论计算值较好地落在对应的小于4.0的界限值范围内(详见文献[2])。

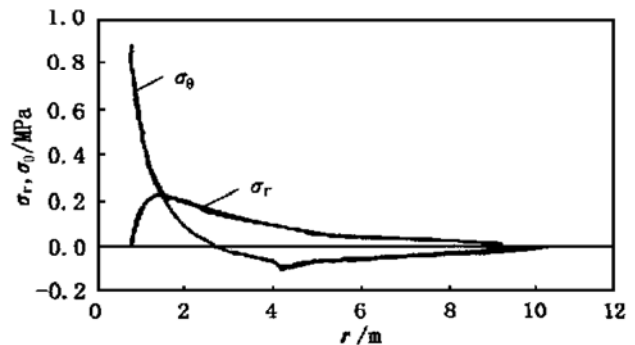


图12 柱形扩张半径与残余应力关系曲线

Fig. 12 Relation between expanded radius and residual stress in columnar expansion

4 结 语

(1) 在同一地质条件下,桩端注浆的极限扩张压力比桩侧注浆压力大。

(2) 不管用球扩张或柱扩张算,极限扩张压力 p_u 随凝聚力增大其值提高不多,但随内摩擦角增大影响明显,所以桩端、桩侧注浆在无粘性土中效果更明显。

(3) 桩端、桩侧注浆由于浆液沿泥浆壁扩散及注浆后有残余应力,从而提高了桩的摩阻力。

参 考 文 献

- 1 蒋明境,沈珠江. 考虑材料应变软化的柱形孔扩张问题. 岩土工程学报, 1995, 17(4)
- 2 张季如. 砂性土内球形孔扩张的能量平衡分析及其应用. 土木工程学报, 1994(4)
- 3 Vesic A S. Expansion of cavities in infinite soil mass. J SMFE ASCE, 1972, 98(SM3)
- 4 张忠苗,吴世明,包 风. 钻孔灌注桩桩底后注浆机理与应用研究. 岩土工程学报, 1999, 21(6)