

基桩波动方程达朗贝尔解法精度研究

A study on the accuracy of d'Alembert solution to pile wave equation

王奎华

(浙江大学土木系岩土所, 杭州, 310027)

中图法分类号 TU 43

作者简介 王奎华, 男, 1965 年生, 现为浙江大学在站博士后, 主要从事桩的振动理论、测试方法研究、EPPDS 测桩仪开发及其他土木工程测试技术开发工作。

1 引言*

波动方程达朗贝尔解法是求解波动方程的一种简便的数值解法, 在国内外已被广泛应用于基桩动测的拟合分析程序中, 国际上比较知名的有 CAPWAP C, TNO WAVE^[1,2], 国内也有不少类似的分析程序, 这些程序基本都采用达朗贝尔解法, 所不同的是, 各自采用的桩或桩侧土、桩尖土的力学模型有所差异, 但其核心部分是相近的, 该方法的处理过程大致是先分离桩土, 即先不考虑土的作用, 推导出自由杆件的达朗贝尔法求解公式, 然后采用附加修正的办法得到有土阻力作用时的计算公式, 最后通过迭代计算求得要求的解。这一过程从数学上看是不够严密的, 但此前由于没有严格的解析解作参照, 无法对此计算误差的具体程度作出回答。

近几年来, 笔者对桩受稳态正弦及瞬态半正弦激励条件下桩土系统纵向振动问题进行了专门的研究, 求得有限长桩、变截面阻抗桩问题的解析解^[3~6]。通过解析解, 就可以对这些数值方法的误差进行定量研究。

2 基桩一维波动方程达朗贝尔解法与 CAPWAP C 算法概述

2.1 波动方程达朗贝尔解法步骤及基本公式

考虑桩侧土作用时, 基桩一维波动方程可表示为

$$C^2(\partial^2 u / \partial x^2) = \partial^2 u / \partial t^2 + R_s \quad (1)$$

式中 R_s 表示桩侧土对桩身的作用, 包括动、静土阻力, 具体表达式与所采用的土模型有关, 就大多数模型而言, 它是桩身质点位移(u), 质点速度($\partial u / \partial t$)的函数, 方程(1)的达朗贝尔解法步骤如下:

(1) 先不考虑桩侧土的作用

方程(1)可简化为

$$C^2(\partial^2 u / \partial x^2) = \partial^2 u / \partial t^2 \quad (2)$$

此时令: $\xi = x + Ct$, $\zeta = x - Ct$, 则方程的解为

$$u = f(x - Ct) + g(x + Ct) \quad (3)$$

该式即是波动方程(2)的达朗贝尔解。

(2) 考虑桩侧土的作用

将桩身单元离散化, 并假设每个单元土阻力集中于单元底界面处, 由 i 截面处的力平衡条件及位移(速度)连续条件, 可得

$$\left. \begin{aligned} p_1 \uparrow &= p_2 \uparrow + R(i)/2 \\ p_1 \downarrow &= p_2 \downarrow - R(i)/2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(4)表示上行波或下行波通过单元分界面时, 由于界面处桩侧土阻力 $R(i)$ 的作用, 分别增加和减少 $R(i)$ 的一半。

(3) 考虑桩身截面阻抗变化的情况

当两单元的桩身截面阻抗发生突变时, 可由变阻抗截面处的力平衡条件及位移(速度)连续条件解得下列结果:

$$\left. \begin{aligned} p_1 \uparrow &= \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} p_1 \downarrow + \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} p_2 \downarrow \\ p_2 \downarrow &= \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} p_2 \uparrow + \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} p_1 \uparrow \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

此式即为一维波动方程达朗贝尔解法的基本计算公式。

2.2 CAPWAP C 算法

这里 CAPWAP C 算法指的是 CAPWAP C 程序所采用的计算方法, 它是根据行波理论基于上述达朗贝尔解法发展而来的一种计算方法, 由美国的 Rausche 及 Goble 提出, CAPWAP C 程序是 PDA 高应变动力试桩系统的核心技术, 其具体算法步骤请参阅文献[1]。

小应变条件下, 因为一般只测得桩顶的速度响应, 此时可假定敲击力脉冲波形(多采用正弦波形)计算速度响应, 然后可与实测速度曲线进行拟合对比。

根据上述算法, 笔者编制了低应变基桩完整性拟合分析程序, 及高应变动力试桩单桩承载力波形拟合分析程序, 本文仅将低应变条件下的达朗贝尔解法结果与精

确的解析解结果作一些对比研究,以在一定范围内对达朗贝尔解法及 CAPWAP C 算法的精度作出评价。

3 能量有限信号的相关性

由泛函分析的知识可知,所有在区间 $[a, b]$ 上的勒贝格(Lebesgue)平方可积函数的集合 $L_2[a, b]$ 构成线性空间。

$$L_2[a, b] = \{x(t) \mid \int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty\}$$

若在该空间上定义范数

$$\|x(t)\| = \left[\int_a^b |x(t)|^2 dt \right]^{1/2}$$

则上述空间成为线性赋范空间;如对于该空间上任意两个元素 $x(t), y(t)$ 再定义内积

$$(x, y) = \int_a^b x(t) \cdot y(t) dt$$

则该空间即是希尔伯特(Hilbert)空间。

对连续信号 $x(t)$,其能量用 $E = \int_a^b |x(t)|^2 dt$ 来度量。对离散信号 $\{x_k\} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 用 $E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2$ 来度量,如果能量有限($E < \infty$),则上述信号均可看作希尔伯特空间上的元素,其能量为范数的平方。

取 $\rho_{xy} = \frac{(x, y)}{\|y(t)\| \cdot \|x(t)\|}$,称为归一化相关系数,由 Cauchy-Schwarz 不等式可知, $0 \leq |\rho_{xy}| \leq 1$,当 $|\rho_{xy}|$ 愈大,表明 $x(t)$ 和 $y(t)$ 越相似,反之,当 $|\rho_{xy}|$ 愈小,而相对能量误差愈大,表明 $x(t)$ 和 $y(t)$ 越不相似。而且 $\rho_{xy} > 0$ 表示正向相似性, $\rho_{xy} < 0$ 表示反向相似性。

对于历时有限离散信号,类似可得

$$\rho_{xy} = \frac{(x, y)}{\|y\| \cdot \|x\|} \quad (6)$$

$$\text{其中 } (x, y) = \sum_{k=0}^N x_k y_k; \|y\| = \sqrt{\sum_{k=0}^N y_k^2}; \|x\| = \sqrt{\sum_{k=0}^N x_k^2}.$$

另外,再定义平均相对误差如下:

$$\bar{\Omega} = \frac{2 \cdot \sum_{k=0}^N |x_k - y_k| / (N+1)}{\max(x_k) + \max(y_k)} \times 100 \quad (7)$$

利用式(6)、(7)可以研究波动方程达朗贝尔解法结果与精确的解析解结果之间的差异程度。

4 达朗贝尔解法与解析解结果对比研究

为了具有普遍的指导意义,解析解分析时采用的各有关参数都是经过无量纲化处理的,而达朗贝尔解法是面向工程应用的,采用的参数都是有具体量纲的,

要将两者作对比必须要使得两种参数具有可比性,并具有严格意义上的等效性,所以首先要注意两组参数的代换关系。另外由于目前所得到的解析解都是针对桩侧土为均质条件下取得的,所以各单元土参数是相同的(只有一组参数),而且为线弹性模型(线性弹簧,线性阻尼),故对达朗贝尔解法及 CAPWAP C 算法也需简化到上述情况。

本文采用同样的模型参数和相同的激振力,研究解析解法与 CAPWAP C 算法求得的速度响应(也可是其它响应,本文从实用的角度仅研究速度响应)的差异程度。

4.1 完整桩(桩身阻抗均匀分布)情况下的比较

(1)达朗贝尔解法与解析解的模型参数关系

达朗贝尔解法的模型参数如下:

a) 桩参数

桩长 L 、桩身材料密度 ρ 、弹性波速 C 、截面积 S 、截面周长 C_i 、桩身离散后的单元数 N_u 。

b) 土的参数

单元桩侧土阻尼 $\hat{\eta}_u$ 桩身单元以单位速度运动时,桩侧土对桩产生动土阻力,单位 kg/s ,并且有 $\hat{\eta}_u = \bar{a}_u \cdot Z$,其中 $\bar{a}_u$ 为无量纲凯斯阻尼系数, $Z = (\rho \cdot S \cdot C)$ 为该桩身单元的截面声阻抗。

单元桩侧土剪切刚度 $\hat{k}_u$ 桩身单元发生单位位移时,桩侧土对桩身反向的静阻力,单位 N/m 。如用高应变模型简化,可由最大静阻力与土弹限(即所谓 Quake 值)之比求得。

桩尖土压缩刚度 $\hat{k}_{toe}$ 桩尖单元产生单位位移时,桩底土对桩底面产生的反向作用力,单位 N/m 。

c) 激振力脉冲宽度参数 w

达朗贝尔法求解时,激振力(瞬态激振)表达式为

$$F(t) = \begin{cases} F_{\max} \cdot \sin(j \cdot \pi w) & (0 \leq j \leq w) \\ 0 & (w < j) \end{cases}, j \text{ 为时间单元}$$

序号, w 则表示敲击脉冲宽度所能覆盖的时间单元数目。

由上述参数可以求得对应的解析解所需各参数(T_c, R, a_1, a_2, a_3)的值^[3],各自的表达式分别如下:

$$\left. \begin{aligned} T_c &= \frac{L}{C}, & R &= \frac{\hat{k}_{toe}}{Z} \cdot T_c, & a_1 &= N_u \cdot \bar{a}_u \\ a_2 &= \frac{\hat{k}_u}{Z} \cdot T_c, & a_3 &= \frac{N_u \cdot \pi}{w} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

通过式(8)可实现两种解法之间的参数代换。

(2)实例分析

达朗贝尔解法的有关模型参数: $L = 20(\text{m})$, $\rho = 2500(\text{kg/m}^3)$, $C = 4000(\text{m/s})$, $N_u = 40$, $\bar{a}_u = 0.03$, $\hat{k}_u = 3.0 \times 10^6(\text{N/m})$, $\hat{k}_{toe} = 3.0 \times 10^6(\text{N/m})$, $w = 16$ 。

利用式(8)可得到对应解析解解法的模型参数: $R = 0.009$, $a_1 = 1.2$, $a_2 = 0.38$, $a_3 = 7.9$ 。两种解法所求得的速度响应曲线如图1所示。

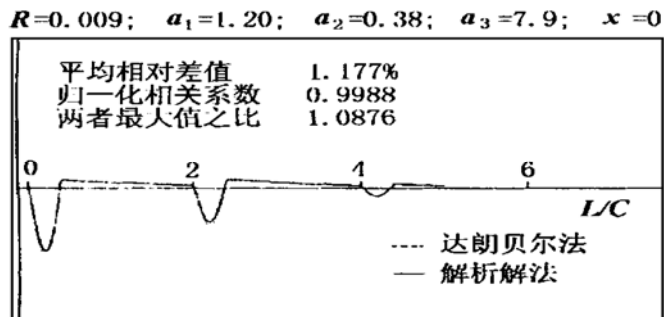


图1 达朗贝尔解法与解析解法所得速度响应曲线对比

Fig. 1 Comparison of d'Alembert solution with analytical solution

比较结果显示, 两者平均相对误差及归一化相关系数分别为 $\bar{\Omega} = 1.177\%$, $\rho_{xy} = 0.9988$ 。

可见, 达朗贝尔解法的结果与解析解法可以是相当接近的, 尤其相似性更好, 从图1可知, 达朗贝尔解法所得速度响应峰值, 即入射波脉冲及桩尖反射脉冲(含多次反射)处, 比解析解偏大。两者最大值之比为1.0786:1。

(3) 主要参数变化对达朗贝尔解法误差程度的影响

图2反映了桩身单元划分数目对达朗贝尔解法精度的影响, 由图2可见, 随单元数目增多, 解的精度有

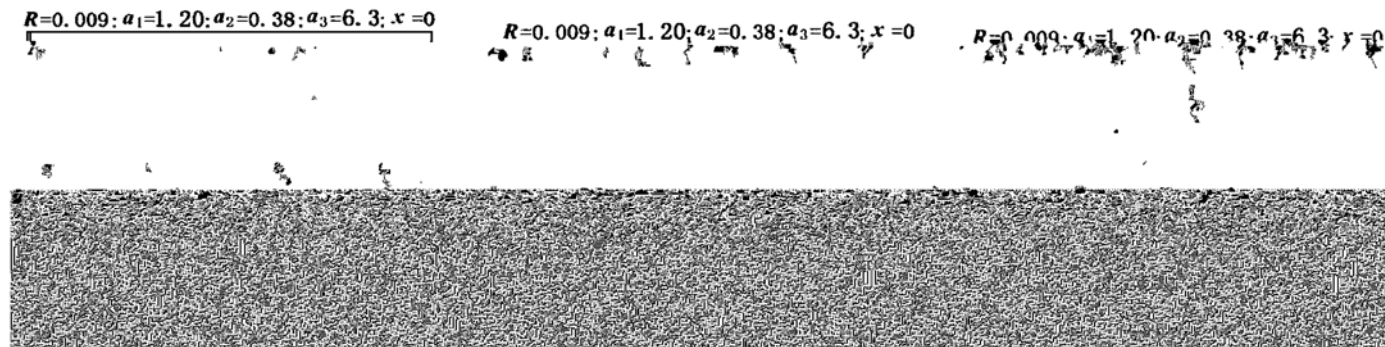


图2 桩身单元数目对达朗贝尔解法精度的影响

Fig. 2 The influence of number of pile units on the accuracy of d'Alembert solution to the wave equation of pile

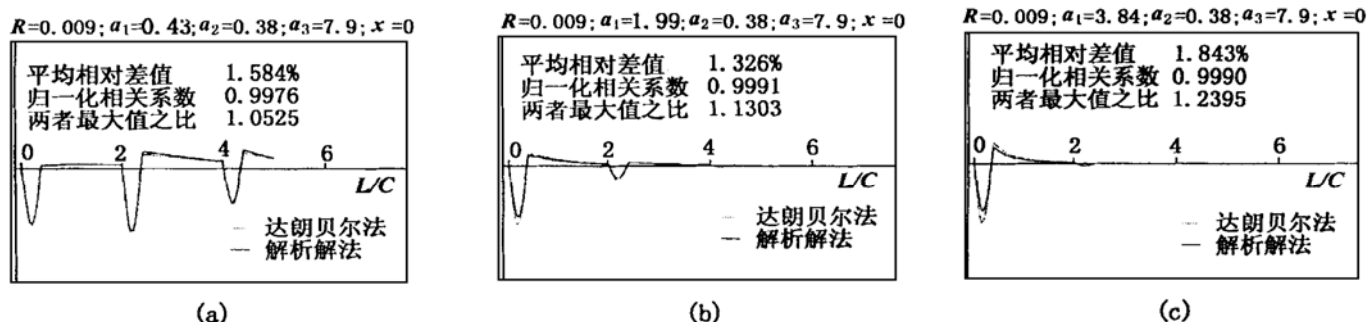


图3 桩侧土阻尼对达朗贝尔解法精度的影响

Fig. 3 The influence of the damping of soil surrounding pile on the accuracy of d'Alembert solution to the wave equation of pile

一定的提高, 当单元数目由10个增加到40个时, 平均相对误差降低约21%, 但归一化相关系数变化不大, 这说明该参数对某些误差不太敏感。

虽然从平均相对误差及归一化相关系数来看, 桩侧土阻尼的变化对达朗贝尔解法精度并没有明显的有规律的影响, 但两解法得到的速度最大值的比值还是随阻尼增大而增大的, 另外, 从图3所示曲线来看, 在 $\bar{t} < 2$ ($t < 2 \cdot L/C$) 范围内, 当桩侧土阻尼系数较小时, 两种解法是非常接近的, 随土阻尼增大, 在此范围内, 达朗贝尔解法所得结果明显地偏离了精确的解析解结果, 因为实际上桩的实测速度曲线进行拟合分析时主要是在此范围内进行的, 因此, 随土阻尼增大, 达朗贝尔解法的误差有较明显的增大。

由图4知, 随桩侧土阻尼因子的增大, 平均相对误差、归一化相关系数、最大值之比等三参数或略有增大, 或略有减小, 但其变化幅度都很小, 而且没有明显的规律性, 从两条曲线上也看不出明显的趋势, 总之桩侧土(剪切)刚度因子对CAPWAP C法精度影响很小。

4.2 变截面阻抗桩情况下的比较

变截面阻抗桩情况与完整桩的情况有所不同, 此时, 除了研究两条曲线总体差异之外, 应着重注意变阻抗界面特征反射信号附近的两解法所得曲线的差异性, 因为这一区域曲线特征对定量拟合确定基桩的缺陷程度有特别重要的意义。

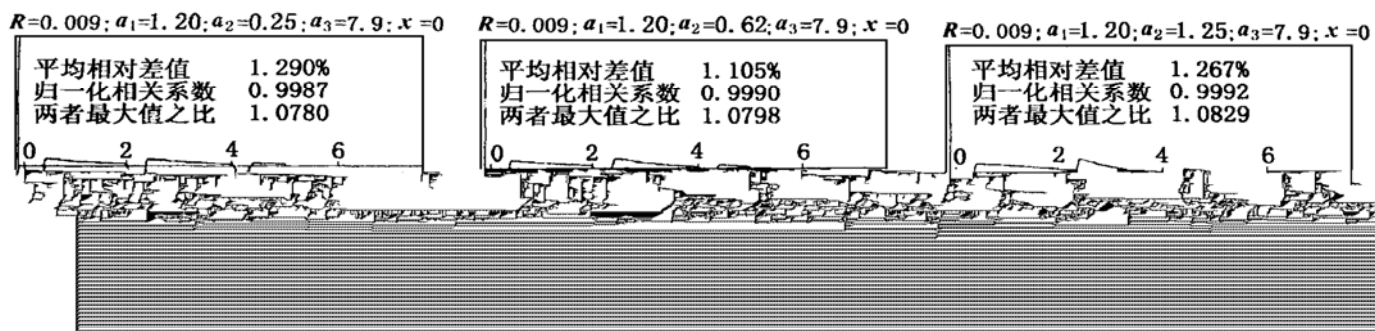


图4 桩侧土剪切刚度对达朗贝尔解法精度的影响

Fig. 4 The influence of the rigidity of soil surrounding pile on the accuracy of d'Alembert solution to the wave equation of pile

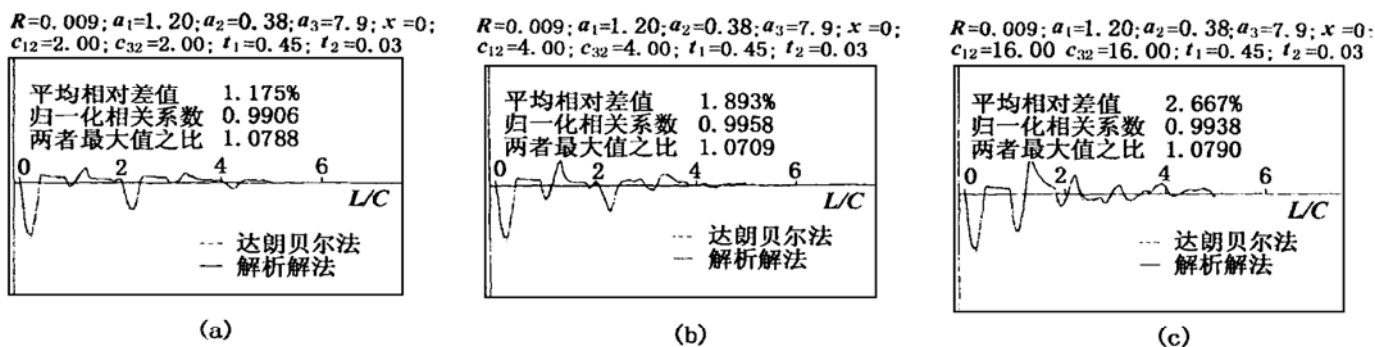


图5 不同缺陷程度对达朗贝尔解法精度的影响

Fig. 5 The influence of the default of pile on the accuracy of d'Alembert solution to the wave equation of pile

从图5可看出,随缺陷程度增大(三幅曲线 c_{12}, c_{32} 分别为 2, 4, 16),平均相对差值、归一化相关系数、两者最大值的比值仅有较小的变化,从曲线上直观地看,除了入射脉冲及桩尖反射信号的峰值处有一些差别外(这些地方达朗贝尔解略偏大),达朗贝尔解与解析解非常的相近。由此可推知,对于各缺陷程度下,达朗贝尔解法都具有足够的精度,所以在工程检测中,采用基于达朗贝尔解法的CAPWAP C 算法定量分析缺陷程度是可靠的,由于解析解只能在定解问题不太复杂的情况下才可求得,但它是精确解,具有非常重要的理论价值,而达朗贝尔解法及在此基础上发展而来的CAPWAP C 算法作为数值解法可以处理复杂得多的情况,对于桩身有多个变阻抗界面或桩侧土分为多层时,达朗贝尔解法是很方便的,现在有了精确的解析解与之对比,并确认在单元数目划分较多时(每个单元长度小于 1m), $\bar{t} < 5 \cdot T_c$ 。平均相对差值一般小于 2%,归一化相关系数一般大于 99%,两解法所得速度响应最大值之比一般小于 1.2。

4 结 语

(1)利用笔者得到的解析解结果,首次对已被广泛应用的基桩一维波动方程达朗贝尔解法及CAPWAP C 算法的精度在一定范围内进行了定量的研究,经过与

精确的解析解对比,发现达朗贝尔解法及CAPWAP C 算法具有较高的精度,足以满足工程应用要求,这一工作具有较为重要的意义,一定程度上回答了长期以来人们对达朗贝尔解法及CAPWAP C 算法精确程度的疑问,也为这一算法的推广使用提供了有力的理论依据。

(2)需要说明一点,本文只是对达朗贝尔解法及CAPWAP C 算法的精度进行研究,而不是对高应变单桩承载力测试或低应变完整性测试的整个方法精度进行研究,因为测试方法精度涉及更多的问题。

参 考 文 献

- 徐攸在,刘兴满. 桩的动测新技术. 北京:中国建筑工程出版社, 1989
- Middendorp P, Reiding F J. 用TNO完整性试验和信号匹配技术确定桩中的不连续性. 第三届应力波理论在桩基工程中的应用国际会议,加拿大,渥太华, 1988
- 王奎华,谢康和,曾国熙. 有限长桩受迫振动问题解析解及其应用. 岩土工程学报, 1997, 19(6): 27~ 35
- 王奎华,谢康和,曾国熙. 变截面桩受迫振动问题解析解及应用. 土木工程学报, 1998(6): 56~ 67
- 王奎华. 基桩纵向振动理论与外插并口式检测系统(EPPDS):[博士学位论文]. 杭州:浙江大学, 1997
- 王奎华,谢康和,曾国熙. 弹性支承桩受迫振动问题广义函数解. 浙江大学学报, 1998, (5): 545~ 551