

寒区隧道温度场、渗流场和应力场 耦合问题的非线性分析*

Nonlinear analyses for the couple problem of temperature,
seepage and stress fields in cold region tunnels

赖远明 吴紫汪 朱元林 朱林楠

(中国科学院兰州冰川冻土研究所冻土工程国家重点实验室, 兰州, 730000)

文 摘 首先根据传热学、渗流理论及冻土力学提出了带相变的温度场、渗流场和应力场耦合问题的数学力学模型及其控制方程。然后应用伽辽金法导出了这一问题的有限元计算公式。最后给出了一寒区隧道考虑渗流和冻胀时的温度场和应力场算例。算例表明冻胀力对隧道衬砌应力的影响很大, 应充分考虑这一因素的影响。

关键词 寒区隧道, 温度场, 渗流场, 应力场, 耦合问题

中图分类号 TU 445

作者简介 赖远明, 男, 1962 年生, 兰州铁道学院土木工程系教授, 中科院兰州冰川冻土研究所冻土工程国家重点实验室在职博士生。主要从事岩土工程和结构工程方面的科研和教学工作。

Lai Yuanming Wu Ziwang Zhu Yuanlin Zhu Linnan

(State Key Laboratory of Frozen Soil Engineering, Lanzhou Institute of Glaciology and Geocryology, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou, 730000)

Abstract In this paper, a mathematical mechanical model and the governing differential equation of the coupled problem of temperature, seepage and stress fields with phase change are first derived from the theory of heat transfer, the theory of seepage and frozen soil mechanics. Then the finite element formulae of this problem are obtained from Galerkin's method. Finally, an illustrative example of the temperature field and stress field in a cold regions tunnel, considering the seepage and frost-heaving force influence, is provided. The example shows that the influence of frost-heaving forces on the stresses of the tunnel lining is very large and, thus, the effect of this factor on the tunnel lining should be taken into account in the engineering design.

Key words tunnel in cold regions, temperature field, seepage field, stress field, coupled problem

1 引 言*

在我国东北和西北地区有 33 座铁路隧道, 由于地处寒区, 这些隧道都有不同程度的冻害。有的隧道由于冻害的影响, 常年有 8~9 个月不能正常使用, 有的隧道由于冻胀力的作用, 衬砌裂缝宽达 5 cm, 严重影响正常运营。迄今为止, 我国还没有对寒区隧道围岩的温度场进行过系统的实测。渗流和冻胀对寒区隧道围岩的温度场和应力场的相互影响也处于空白。为解决工程中的这些实际问题, 本文根据传热学、渗流理论和冻土力学导出了带相变的温度场、渗流场和应力场三场耦合问题的数学力学模型及其控制微分方程, 然后应用伽辽金法导出了这一问题的有限元计算公式, 并对一寒区隧道的温度场和应力场进行了理论计算。为寒区铁路的设计和修建提供理论计算依据。

2 控制微分方程

我们所讨论的寒区隧道是指所在地区常年平均气

温低于零度。不论是天然条件下的浅层岩土或人工开挖具有自然通风的地下洞室围岩, 每年均要发生冻结与融化, 故本问题为具有相变的传热问题。考虑到渗流对隧道围岩温度场的影响以及应力对渗流系数的影响, 根据传热学和渗流理论, 可导出温度场、渗流场和应力场耦合问题的微分方程为

在 Ω_f 内

$$\left. \begin{aligned} C_f \frac{\partial T_f}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial y} \right) - \\ &\quad C_w \rho_w \left(v_x^f \frac{\partial T_f}{\partial x} + v_y^f \frac{\partial T_f}{\partial y} \right) \\ S_f \frac{\partial H_f}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x^f \frac{\partial H_f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y^f \frac{\partial H_f}{\partial y} \right) + Q \\ v_x^f &= -k_x^f \frac{\partial H_f}{\partial x}, \quad v_y^f = -k_y^f \frac{\partial H_f}{\partial y} \\ k_x^f &= k_{0x}^f \exp(-\eta \alpha_{xe}), \quad k_y^f = k_{0y}^f \exp(-\eta \alpha_{ye}) \end{aligned} \right| \quad (1)$$

* 国家自然科学基金资助项目 (No. 49571019) 及中科院“九·五”重点资助项目 (KZ952-J1-216)

到稿日期: 1998-08-10

在 Ω_u 内

$$\left. \begin{aligned} C_u \frac{\partial T_u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_u \frac{\partial T_u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_u \frac{\partial T_u}{\partial y} \right) - \\ &\quad C_w \rho_w \left(v_x^u \frac{\partial T_u}{\partial x} + v_y^u \frac{\partial T_u}{\partial y} \right) \\ S_u \frac{\partial H_u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x^u \frac{\partial H_u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y^u \frac{\partial H_u}{\partial y} \right) + Q \\ v_x^u &= -k_x^u \frac{\partial H_u}{\partial x}, \quad v_y^u = -k_y^u \frac{\partial H_u}{\partial y} \\ k_x^u &= k_{0x}^u \exp(-\eta \alpha_{xe}), \quad k_y^u = k_{0y}^u \exp(-\eta \alpha_{ye}) \end{aligned} \right| \quad (2)$$

式中 符号 f, u 分别表示冻、融状态; T_f, C_f, λ_f 分别为正冻区 Ω_f 内围岩的温度、体积比热、导热系数; $H_f, S_f, k_{0x}^f, k_{0y}^f$ 分别为正冻区水头、给水度 x 方向和 y 方向的渗透系数; η 为一系数; α_{xe}, α_{ye} 分别为 x 方向和 y 方向的有效应力; Q 为渗流场的源或汇; C_w, ρ_w 为水的比热和密度。带有符号“ u ”者为融区相应的物理量。

在移动界面 $s(t)$ 上, 必须满足连续条件和能量守恒条件, 即

$$T_f = T_u(s(t), t) = T_m \quad (3)$$

$$\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial n} - \lambda_u \frac{\partial T_u}{\partial n} = L \frac{ds(t)}{dt} \quad (4)$$

式中 L 为含水岩土的相变潜热。

固定边界上的边界条件为

$$T = T_w, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = A(T_a - T) \quad (5)$$

式中 A 为常数; T_a 为环境温度。

初始条件为

$$T_u|_{t=0} = T_0, \quad \Omega_u|_{t=0} = 0 \quad (6)$$

渗流场内水头 H 还必须满足以下两类边界条件:

第一类边界条件, 指水头边界

$$H = H_0 \quad (7)$$

第二类边界条件, 指流量边界

$$k_x \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + k_y \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) = -q \quad (8)$$

方程(1)~(8)便是温度场、渗流场和应力场耦合问题的控制微分方程和初始边值条件。由于围岩的比热和导热系数是随着温度的变化而变化, 加之两相界面的位置也不是固定的, 因此, 界面的能量守恒条件是非线性的。此外渗流场自由面也有待确定, 故本问题在数学上是一个强非线性问题。

3 温度场和渗流场的有限元计算公式

就用显热容法^[1], 假设相变是发生在 T_m 附近的一个温度范围内 ($T_m \pm \Delta T$)。在构造等价热容时还必须计入 ΔT 的影响, 构造的热容表达式和导热系数的

表达式为

$$C^* = \begin{cases} C_f, & T < (T_m - \Delta T) \\ \frac{L}{2\Delta T} + \frac{C_f + C_u}{2}, & (T_m - \Delta T) \leq T \leq (T_m + \Delta T) \\ C_u, & T > (T_m + \Delta T) \end{cases} \quad (9)$$

和

$$\lambda^* = \begin{cases} \lambda_f, & T < (T_m - \Delta T) \\ \lambda_f + \frac{\lambda_f - \lambda_u}{2\Delta T} [T - (T_m - \Delta T)], & (T_m - \Delta T) \leq T \leq (T_m + \Delta T) \\ \lambda_u, & T > (T_m + \Delta T) \end{cases} \quad (10)$$

对于渗透系数也可以写成如下统一的表达式:

$$k_x^* = \begin{cases} \left(\frac{w_u^*}{w^*} \right)^\beta \cdot k_x^u & (T \leq T_m) \\ k_x^u & (T > T_m) \end{cases} \quad (11)$$

和

$$k_y^* = \begin{cases} \left(\frac{w_u^*}{w^*} \right)^\beta \cdot k_y^u & (T \leq T_m) \\ k_y^u & (T > T_m) \end{cases} \quad (12)$$

式中 w^*, w_u^* 分别为围岩的含水量和未冻水含量 (指在一定的负温条件下, 冻土中的未冻水质量与干土质量之比); β 为常数, 由试验确定^[2]。

应用公式(9)~(12), 方程(1)~(4)可化简为

$$C^* \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda^* \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda^* \frac{\partial T}{\partial y} \right) - C_w \rho_w \left(v_x^* \frac{\partial T}{\partial x} + v_y^* \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (13)$$

$$S^* \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x^* \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y^* \frac{\partial H}{\partial y} \right) \quad (14)$$

式中 v_x^*, v_y^* 为渗流速度, 其表达式为

$$v_x^* = -k_x^* \frac{\partial H}{\partial x}, \quad v_y^* = -k_y^* \frac{\partial H}{\partial y} \quad (15)$$

由于这类问题在数学上是一个强非线性问题, 无法获得解析解, 所以采用数值计算方法以获得数值解。本文采用伽辽金法, 可得到该问题的有限元计算公式为

$$[M] \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} + [K] \{T\} = \{F\} \quad (16)$$

$$[N] \left\{ \frac{\partial H}{\partial t} \right\} + [G] \{H\} = \{p\} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } k_{ij} &= \sum \int_{\Omega^e} \lambda^* \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega + \\ &\quad \sum \int_{\Gamma_2^e} a N_i N_j d\Gamma + \sum \int_{\Omega} C_w \rho_w \left(v_x^* \frac{\partial N_i}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. v_y^* \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) N_i d\Omega \end{aligned} \quad (18)$$

$$M_{ij} = \sum \int_{\Omega^e} C^* N_i N_j d\Omega \quad (19)$$

$$F_i = \sum \int_{\Gamma_2^e} dT_a N_i d\Gamma \quad (20)$$

$$G_{ij} = \sum \int_{\Omega^e} (k_x^* \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y^* \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y}) d\Omega \quad (21)$$

$$N_{ij} = \sum \int_{\Omega^e} S^* N_i N_j d\Omega \quad (22)$$

$$p_i = \sum \int_{\Omega^e} Q N_i d\Omega \quad (23)$$

先采用文献[3]的方法确定渗流问题的自由面,然后应用 Crank - Nicolson 格式对方程(16)、(17)进行逐时段求解,便得本问题的数值结果。

4 渗流荷载和冻胀荷载

4.1 透水介质中的渗流体积力

隧洞围岩是透水介质,水在透水介质中形成渗流势场 $H(x, y)$

$$H = \frac{p}{\gamma} + y \quad (24)$$

式中 p 为水的压力; γ 为水的容重; y 为所研究点竖向坐标值,以向上为正。

水在渗流过程中由于水压力的梯度而产生渗流体积力或渗流场力

$$\begin{cases} p_x = - \frac{\partial p}{\partial x} = - \gamma \frac{\partial H}{\partial x} \\ p_y = - \frac{\partial p}{\partial y} = - \gamma \frac{\partial H}{\partial y} + \gamma \end{cases} \quad (25)$$

在 Δt 时间间隔内,渗流体积力的增量为

$$\begin{cases} \Delta p_x = - \gamma \frac{\partial(\Delta H)}{\partial x} \\ \Delta p_y = - \gamma \frac{\partial(\Delta H)}{\partial y} \end{cases} \quad (26)$$

式中 $\Delta H = H_{i+1} - H_i$, 即第 $(i+1) \Delta t$ 时刻的水头和第 $i \Delta t$ 时刻的水头差。

4.2 冻胀荷载

在冻结过程中,正冻围岩的体积变化是由于围岩破碎带和软夹层里的水结成冰而引起的。假设在冻融过程中,破碎围岩和土颗粒的体积保持常,则体积变化为

$$\varepsilon^v = 0.09(w^* - w_u^*) \phi \quad (27)$$

式中 $\phi = \frac{w^*}{w^* + \gamma/\gamma_d}$, γ_d 为围岩干容重。

假设正冻破碎围岩和未冻围岩是各向同性的,由于体膨胀在各个方向引起的应变为

$$\begin{cases} \varepsilon_x^v = \varepsilon_y^v = \varepsilon_z^v = \frac{1}{3} \varepsilon^v \\ \gamma_{xy}^v = \gamma_{yz}^v = \gamma_{zx}^v = 0 \end{cases} \quad (28)$$

在外荷载作用下,正冻破碎围岩的应力-应变关系可由下面的增量形式给出:

$$d(\varepsilon) = [D](d\{\varepsilon\} + d\{\varepsilon^v\} + d\{\varepsilon^p\}) \quad (29)$$

式中 $[D]$ 为与冻土温度有关的弹性矩阵; $d\{\varepsilon\}$, $d\{\varepsilon^v\}$ 和 $d\{\varepsilon^p\}$ 分别为应变增量、蠕变应变增量和膨胀变形增量矩阵。

根据 Prandtl-Reuss 准则,蠕变应变增量可表示为

$$d\{\varepsilon^v\} = d\bar{\varepsilon}^v \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \quad (30)$$

式中 $\bar{\varepsilon}^v$ 为等效蠕变变形; $\bar{\sigma}$ 为等效应力,其表达式为

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} \quad (31)$$

式中 $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

在复杂应力状态下,其蠕变规律可由单轴条件下的蠕变方程推广而来(Ladanyi B. 1978)^[4]。因此

$$\bar{\varepsilon}^v = \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{CT}} \right)^n \left(\frac{\varepsilon^v t}{b} \right)^b \quad (32)$$

而

$$\sigma_{CT} = \sigma_{CO} \left(1 + \frac{T}{T_r} \right)^\omega \quad (33)$$

式中 σ_{CO} , n , b , ω 均为试验参数; ε^v 和 T_r 为基准应变速率和温度值; t 为时间。

由方程(30)和(32)可得到复杂应力状态下的时间硬化蠕变方程

$$\Delta\{\varepsilon^v\} = b \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{CT}} \right)^n \left(\frac{\varepsilon^v}{b} \right)^{b-1} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \Delta t \quad (34)$$

根据有限元分析中的增量形式的初始应变方法,由蠕变和体积膨胀引起的等效节点荷载可表示为

$$\Delta\{R\} = \int [B]^T [D] (\Delta\{\varepsilon\} \pm \Delta\{\varepsilon^v\}) dv \quad (35)$$

当结冰时取正号,融化时取负号。

5 耦合方程求解步骤

(1)模拟开挖过程,根据实际施工过程,开挖后就喷混凝土初期支护,2~3个月后进行第二次衬砌。根据围岩监测变形确定荷载释放程度,采用释放荷载法求出隧道在围岩自重和水荷载作用下的初始应力场。在弹塑性计算中,采用莫尔-库仑屈服准则。

(2)求解式(16)、(17),求出当前应力水平下围岩的渗流场和温度场。

(3)判断各高斯点的温度值,按式(35)算出由蠕变和体积膨胀引起的等效节点荷载。

- (4) 由式(26)算出各节点的渗流节点荷载增量。
- (5) 用有限元法求出上述荷载增量对应的应力增量和当前的围岩应力场。
- (6) 执行(2)~ (5)步骤直至规定年限为止。

6 算 例

以正在开挖的位于青海省祁连山的大坂山公路隧道作为分析对象。该隧道位于西宁—张掖公路段大通河以南, 海拔高度 3 754. 58~ 3 801. 23 m, 全长 1 530 m。年平均气温为- 3℃。取隧道出口段 K106+ 025(距洞约 60 m)处的截面作为本文的计算模型(图 1)。在该截面附近地段地下水较丰富, 渗流很大, 洞内日流量在 200 m³ 以上, 在该截面处, 隧道顶点位于多年冻土下限 100 m。OD= 74. 55 m, 即 DE 位于冻土下限 20 m, OA= 40 m, AF= DE= 40 m。根据对称性, CD, AB 为绝热边界。BC 边和大气相通。由大坂山的气象资料可得气温变化曲线为

$$T_a = - 3 + 12\sin(\frac{2\pi}{8760}t_h + \frac{\pi}{6}) \tag{36}$$

由水、冰和该岩石的体积热容量和热传导系数计算出这种围岩的各种热力学参数, 其结果见表 1。在模拟隧道的开挖过程计算时, 未冻结围岩和混凝土的力学参数见表 2。

表 1 围岩热力学参数

Table 1 The thermal physical parameters of the surrounding rocks

物理量	C_u	C_f	λ_u	λ_f
	$/(J \cdot m^{-3} \cdot ^\circ C)$	$/(J \cdot m^{-3} \cdot ^\circ C)$	$/(W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ C)$	$/(W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ C)$
数 值	1.929×10^6	1.617×10^6	1.4338	1.8247

表 2 衬砌及围岩材料参数

Table 2 The material parameters of the lining and surrounding rocks

材料类别	未冻围岩	混凝土
弹性模量 E /MPa	3270	20000
泊松比 μ	0.333	0.2
容重 γ /($kN \cdot m^{-3}$)	20.0	23
粘聚力 c /MPa	0.614	3.0
硬化参数 H' /MPa	2.5	340
内摩擦角 φ /($^\circ$)	39.0	60.0

渗流计算时的边界条件 AF 和 AB, BC, CD 为不渗水边界。EF 边上的水头(地表以下 25 m) $H_0 = 74.55$ m, 在 E 点有一水源, 给水量 $Q = 0.15$ m³/h。在 B 点下方 5 m 处有一排水孔, 实测排水量 $Q = 0.1$ m³/h。围岩的孔隙率为 19%。根据该计算截面处的地质条件, 取围岩的渗水系数为 $k_x^u = k_y^u = 7.0 \times 10^{-6}$ m/s。

将计算区域划分为 914 个节点, 838 个四节点等参元。按开挖、第一次衬砌、第二次衬砌对隧道衬砌过程进行了模拟。考虑渗流力后, 计算出隧道刚修建好时衬砌的最大应力和位移, 见表 3。

表 3 隧道刚修好时衬砌的最大应力和位移

Table 3 The maximum stresses and displacements of the lining when the tunnel is just constructed

位 置	σ_{max} /MPa	σ_{min} /MPa	位移 /mm
拱顶(I — I)	0.124	- 3.445	- 9.52
边墙(II — II)	- 1.462	- 12.720	- 2.48
仰拱(III — III)	1.040	- 8.626	17.69

隧道刚修建好时, 最大拉应力出现在仰拱 III—III 剖面处, 其值为 1.04 MPa, 最大压应力出现在边墙, 其值为 12.72 MPa。拱顶向下的变形为 9.52 mm, 仰拱中点向上的变形为 17.69 mm。计算出通过 5 年的冻融过程, 隧道围岩最大的冻结圈见图 2。虚线部分为没有考虑渗流和应力对温度场的影响而计算出的冻结圈, 实线为考虑了渗流和应力对温度场的影响而计算出的冻结圈。不考虑和考虑渗流及应力场对温度场的

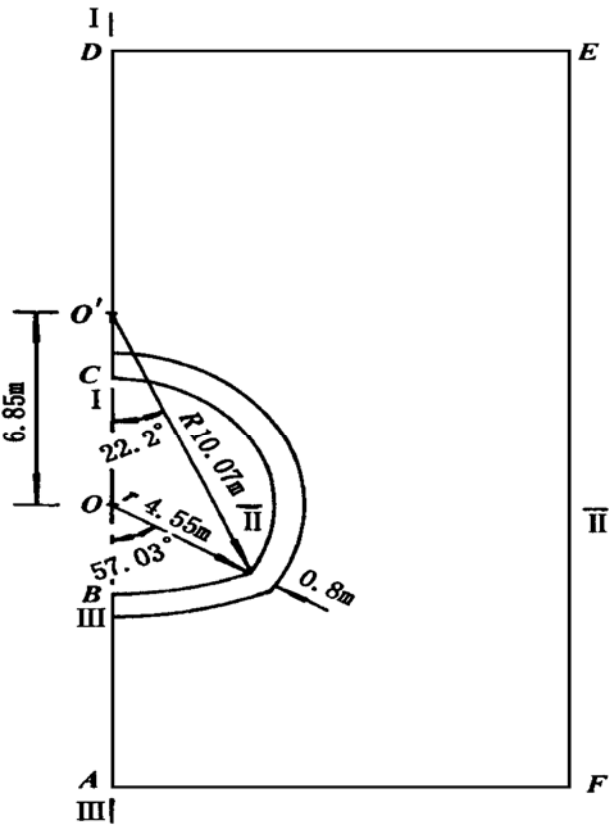


图 1 计算模型

Fig. 1 Computational model

空气和围岩的对流换热系数^[5] $\alpha = 15.0$ ($W/m^2 \cdot ^\circ C$)。在边界 DE, EF, AF 上和计算域内的初始温度按冻土下限 3% 的地热梯度确定。

该计算截面的地质条件为围岩较破碎, 含水量 $w^* = 9\%$, 计算时采用平均未冻水含量 $w_u^* = 1.5\%$ 。

影响而计算出 5 年内的最大冻深分别为 5.175 m 和 4.376 m。通过对隧道围岩一年的监测,发现考虑渗流和应力场对温度场的影响而计算出的最大冻深与实际较相近,不考虑它们的影响而计算出的结果则偏大。

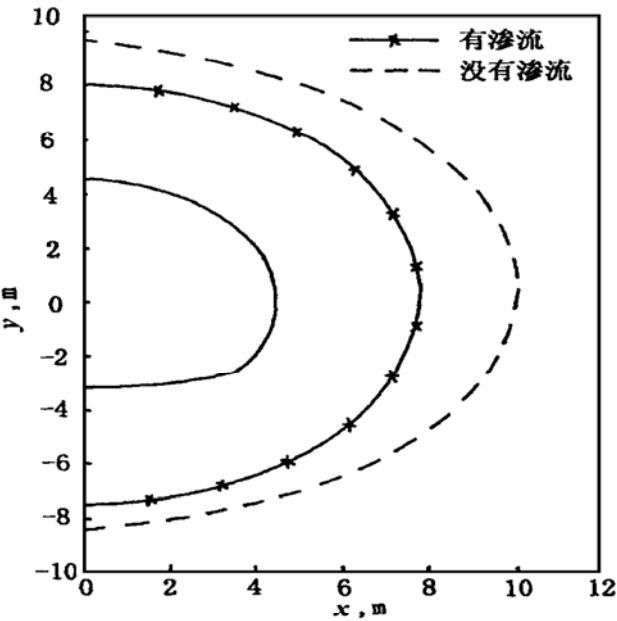


图 2 隧道修好 5 年后围岩的冻结圈

Fig. 2 The maximum frozen circles in the surrounding rock when the tunnel has been constructed for 5 years

应用本文方法计算出的考虑冻胀和渗流力作用、隧道经过 5 年冻融,即第 5 年末隧道衬砌的最大应力和位移见表 4。这时仰拱 III—II 剖面最危险,其最大应力为 0.231 MPa,最大压应力为 22.68 MPa。在 III—II 剖面及其附近已进入塑性区。拱顶向下的变形为 13.51 mm,仰拱中点向上的变形为 24.61 mm。300 号混凝土的抗压强度为 21 MPa。在这个剖面的上压应力已超过混凝土的抗压强度,衬砌将被压碎,遭到破坏。这和实际上隧道使用 3~ 5 年,开始开裂、剥落和酥松是相吻合的。

表 4 隧道使用 5 年后衬砌的最大应力和位移

Table 4 The maximum stresses and displacements of the lining when the tunnel has been used for 5 years

位 置	$\sigma_{\max}$ /MPa	$\sigma_{\min}$ /MPa	位移/mm
拱顶(I — I)	- 1.195	- 12.60	- 13.51
边墙(II — II)	- 2.498	- 15.88	- 4.38
仰拱(III—III)	0.231	- 22.68	24.61

7 结 论

- (1) 本文提出了一套考虑渗流场和应力场对寒区工程温度场影响的有限元计算方法,为工程设计提供了理论依据。
- (2) 计算结果表明渗流场和应力场对寒区工程的冻深有极大的影响,在工程设计中应充分考虑这两因素对温度场的影响。
- (3) 冻胀力对隧道衬砌的应力影响很大,这也是寒区隧道遭到破坏的根源。因此为了减少冻害对寒区工程的破坏,应采取良好的保温措施,以缩小冻结圈。

参 考 文 献

1 Bonacina C, Comini G, Fasano A, et al. Numerical solution of phase change problems. *Int J Heat Mass Transfer*, 1973, **16**(6): 1852~ 1832

2 Konrad J M, Duquennoi C. A model for water transport and ice lensing in freezing soils. *Water Resources Research*, 1993, **29**(9): 3109~ 3124

3 Bathe K J, Khoshgoftaar M R. Finite element free surface seepage analysis without mesh iteration. *Int J Numerical Analytical Methods in Geomechanics*, 1979, **3**(1): 13~ 22

4 Ladanyi B. *Geotechnique for cold regions*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1978. 2~ 275

5 张正荣. 传热学. 北京: 高等教育出版社, 1989. 133~ 134