

$$\text{左边: } \frac{\partial(R_{\alpha}\Delta\theta_{\alpha})}{\partial S_{\beta}} = \Delta\theta_{\alpha} \frac{\partial R_{\alpha}}{\partial S_{\beta}} \quad (5)$$

$$\text{右边: } \frac{\partial(\Delta S_{\alpha})}{\partial S_{\beta}} = \frac{-AH\Delta\theta_{\alpha}/\cos\varphi}{AH} = \frac{-\Delta\theta_{\alpha}}{\cos\varphi} \quad (6)$$

左边=右边,由 Hencky 第一定律知,两条 $\beta(\alpha)$ 线之间的转角不变,故将 $\Delta\theta_{\alpha}$ 约去后得

$$\frac{\partial R_{\alpha}}{\partial S_{\beta}} = -\frac{1}{\cos\varphi} \quad (7)$$

$$\text{同理: } \frac{\partial R_{\beta}}{\partial S_{\alpha}} = -\frac{1}{\cos\varphi} \quad (8)$$

修正后的推导方法 2 与文献[1]中的方法基本相同,所得结果也是一致的,文献[1]是直接从曲线曲率半径的定义出发,其推导过程更加清楚明白,而且还给出了例证,有兴趣的同志可以参考文献[1]。

参 考 文 献

- 1 华林. 岩土材料平面应变滑移线场的一个性质的探讨. 武汉工学院学报, 1995, 17(1): 77~79
- 2 龚晓南编著. 土塑性力学. 杭州: 浙江大学出版社, 1990. 223~228

摩擦材料滑移线性质的 Hencky 第二定理及其证明 ——兼与张振营先生商榷

宋二祥

(清华大学土木工程系, 北京, 100084)

滑移线法是求解极限荷载的一个重要方法。关于滑移线的性质有著名的 Hencky 第二定理。经典形式的 Hencky 第二定理是针对金属一类的非摩擦材料提出的, 其文字表述为: 如沿某一滑移线移动, 则另一族滑移线在交点处的曲率半径的变化等于沿该滑移线移动的距离。用公式表达则为

$$\frac{\partial R_{\alpha}}{\partial S_{\beta}} = -1 \quad \frac{\partial R_{\beta}}{\partial S_{\alpha}} = -1 \quad (1)$$

这里曲率半径的正负如下规定: 当曲率中心在滑移线长度 S_{β} (或 S_{α}) 增加的方向时 R_{α} (或 R_{β}) 为正。

笔者在对研究生讲解“土力学理论与数值方法”的过程中注意到, 有些文献认为对摩擦材料这一定理的经典形式仍然成立, 并给出证明^[1]。笔者对此有不同见解, 并进行了深入的探讨, 得出不同的结论, 认为对摩擦材料 Hencky 第二定理用公式表达应为

$$\frac{\partial R_{\alpha}}{\partial S_{\beta}} = -\frac{1}{\cos\varphi} \quad \frac{\partial R_{\beta}}{\partial S_{\alpha}} = -\frac{1}{\cos\varphi} \quad (2)$$

恰在此时, 看到张振营先生在《岩土工程学报》1999 年第 2 期发表的“Hencky 第二定律的探讨”一文(以下简称“张文”), 也认为对摩擦材料 Hencky 第二定理有不同的形式, 这引起笔者的极大兴趣。然而, 在拜读张文之后, 笔者发现张文得出的定理形式与本人的很不相同, 用公式表示为

$$\frac{\partial R_{\alpha}}{\partial S_{\beta}} = \pm \cos\varphi \quad \frac{\partial R_{\beta}}{\partial S_{\alpha}} = \pm \cos\varphi \quad (3)$$

对张文的这一结论, 笔者不能认同。所以, 下面首先就张文存在的几个问题提出个人的看法, 然后给出自己关于摩擦材料的 Hencky 第二定理(式 2)的完整证明。

1 张文存在的问题*

(1) 问题 1

张文在推理过程中首先证明了下列关系(见张文的式 2)

$$R_{\alpha}\Delta\theta_{\alpha} \approx \Delta S_{\alpha}\sin 2\mu \quad R_{\beta}\Delta\theta_{\beta} \approx \Delta S_{\beta}\sin 2\mu \quad (4)$$

这里 $2\mu = 90^{\circ} - \varphi$, 是两组滑移线间的夹角, φ 是土的内摩擦角。类似关系式在其他一些文献中也可见到, 但笔者认为这是不正确的。

我们知道, 按曲率半径的数学定义 α, β 滑移线的曲率半径 R_{α}, R_{β} 应分别符合下列二式

$$\frac{1}{R_{\alpha}} = \frac{\partial\theta}{\partial S_{\alpha}} \quad \frac{1}{R_{\beta}} = -\frac{\partial\theta}{\partial S_{\beta}} \quad (5)$$

这里 θ 为 α 或 β 滑移线上任一点的切线对 x 轴的倾角, 并以逆时针为正。曲率半径的正负如前所述。对 α, β 线的正向规定只需注意其相对方位, 即 α 正向落后于 β 正向一个小于等于 90° 的角。满足这些规定时, 上式的正负号是正确的。

由此定义式自然可以得出

$$R_{\alpha}\Delta\theta_{\alpha} \approx \Delta S_{\alpha} \quad -R_{\beta}\Delta\theta_{\beta} \approx \Delta S_{\beta} \quad (6)$$

这是式(5)的增量形式, 不应存在什么疑问。实际上, 一条曲线的线元长度、曲率半径及该线元两端切线(或法线)夹角间的关系, 不应与它和另一曲线的交角有关。笔者注意到张文将 $\Delta\theta_{\alpha}$ ($\Delta\theta_{\beta}$) 定义为两条 $\beta(\alpha)$ 线的转角, 但只要注意到 α 线与 β 线的交角为常数, 则不难看出 $\Delta\theta_{\alpha}$ ($\Delta\theta_{\beta}$) 也是(在谈论曲率时首先应该是) $\alpha(\beta)$ 线元两端切线的夹角。

从另一方面来看如果张文所提出的关系式(式 4)成立, 那么分别将那里的二个关系式的两边除以 ΔS_{α} 或 ΔS_{β} 并取极限, 则得到与曲率定义式(5)矛盾的结果。

张文之所以得出上述不正确的关系式, 是因其推理过程有缺陷。张文在证明过程中, 采用了较复杂的辅助图形(即张文的图 2), 认为其中的三角形 $A'CA$ 为直角三角形, 这是不对的。直线 $O'C$ 与 AC 是垂直的, 但说 $A'C$ 与 AC 垂直, 并无根据。(事

实上 $\angle AA'C = \angle ACA'$.)

(2) 问题 2

张文的推导方法 1 认为, 当沿 β 线移动一个微小的距离 ΔS_β 时, α 线元长度 ΔS_α 的改变量为 $(R_\alpha - AE) \Delta\theta_\alpha - R_\alpha \Delta\theta_\alpha$ (见张文式(4)). 这种做法在其他一些文献中也很常见, 但笔者认为这同样是不正确的, 因为这等于认为变化之后的曲率半径为 $R_\alpha - AE$, 而这正是有待证明的。在证明一个结论的过程中, 利用了一个本质上和结论相同的东西, 确是一个容易被人忽略的问题。事实上, 当沿一族滑移线移动时, 另一族滑移线的曲率半径的方向在改变, 这是仅凭直觉所不能感知的。

(3) 问题 3

张文的推导方法 2 在推导线元长度的改变量时, 不再利用曲率半径, 对此笔者是很赞同。事实上, 文献[2]在证明经典形式的 Hencky 第二定理时也采取了这一思路。但遗憾的是张文由(原文)图 3 进行分析时, 认为当沿 β 线移动一个微小的距离 ΔS_β 时, α 线元长度 ΔS_α 的改变量为 $LM = AH \cdot \Delta\theta_\alpha$ 。这仅对 $\varphi = 0$ 的纯粘性材料才正确, 而现在分析的是摩擦材料, LM 与 $A'L$ (或 $A'M$) 并不接近垂直。从 L 点做 $A'M$ 的垂线, 记垂足为 P , 则 $LP = AH \cdot \Delta\theta_\alpha$, 而 LM 的长度应为

$$LM = AH \cdot \Delta\theta_\alpha / \sin 2\mu = \Delta S_\beta \Delta\theta_\alpha / \cos \varphi \quad (7)$$

(4) 问题 4

张文给出的定理的数学表述中含有“ $\pm$ ”, 即可以为正也可以为负, 这主要是因为该文引入了另外一种正负规定, 以及根据张文图 3 的分析。这确实不是什么大问题, 尽管笔者觉得还是采用较成熟的规定, 从而使问题的结论更明确一些为好。但对张文图 3 有两点需说明一下。一是其中的图 3(b) 将 α 线与 β 线交换了, 这和该文开始就给出的 α, β 线的规定不符。再一点是其图 3(a) 给出两条 α 族滑移线, 其曲率中心在右侧, 而曲率半径又是越往右越大。这样的滑移线网是否可能, 笔者认为是一个需研究的问题。因为滑移线网有其固有规律, 涉及关键性问题的图形同样需要论证。但是, 如果 Hencky 第二定理的经典数学表述是准确的话, 那么笔者认为至少对于纯粘性材料上述滑移线是不可能的。进一步讲, 对任何材料, 只要意识到这是同一族滑移线中的两条, 在空间上又是无限靠近, 我们也会怀疑上述滑移线网存在的可能。

2 摩擦材料滑移线的 Hencky 第二定理及其证明

首先证明沿 β 线移动时 α 线的曲率半径的变化规律。为此由图 1 我们来考察沿 β 线移动一微小距离 $AD = \Delta S_\beta$ 时, α 线元 $AB = \Delta S_\alpha$ 的变化 ΔS_α 。一方面由式(6)有

$$\Delta S_\alpha = \frac{\partial(\Delta S_\alpha)}{\partial S_\beta} \Delta S_\beta = \frac{\partial(R_\alpha \Delta\theta_\alpha)}{\partial S_\beta} \Delta S_\beta \quad (8)$$

式(6)对摩擦材料仍然成立这一事实, 我们已经进行了论证, 而上式为线元微分的直接表达, 不存在什么疑问。

另一方面, 由图 1 来分析。如图, $DE \parallel CB$, $EF \perp DE$, 近似也有 $EF \perp AD$ 。从而有

$$\Delta S_\alpha = -AE = -EF / \cos \varphi = -\Delta S_\beta \Delta\theta_\alpha / \cos \varphi \quad (9)$$

上式中 $EF = \Delta S_\beta \Delta\theta_\alpha$ 是因为略去了 DE 与 $AD = \Delta S_\beta$ 的差 AF 和 $\Delta\theta_\alpha$ 的乘积这一高阶小量。

综合式(8)与式(9), 并注意依据 Hencky 第一定理, 当沿 β

线移动时 $\Delta\theta_\alpha$ 不随 S_β 而改变, 便可得出上列式(2)中的前一式, 类似地我们可以证明其中的后一式。

3 摩擦材料滑移线的 Hencky 第二定理的实例验证

上述讨论已充分证明了笔者给出的摩擦材料的 Hencky 第二定理。但从直观感觉来看, 似乎张文给出的式(3)更易于接受, 其根本原因仍是前面已提到的那种不准确的直觉。为进一步加强上述证明的说服力, 这里再用扇形滑移线场来进行验证。

扇形滑移线场的一族滑移线为相交于一点的直线, 另一族滑移线为以该点为中心的对数螺线。这里设前者为 α 线, 后者为 β 线, 并以该中心点为极点建立极坐标系(图 1), 则 β 线的方程为

$$r = ae^{\theta \tan \varphi} \quad (10)$$

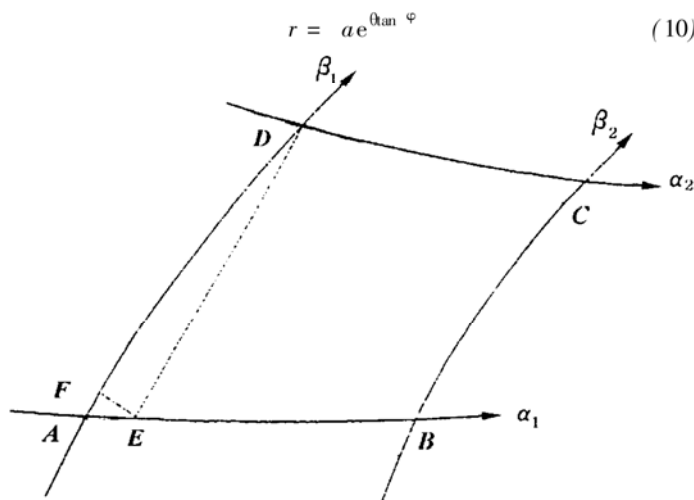


图 1 滑移线场局部示意图

Fig. 1 Part of a slip line field

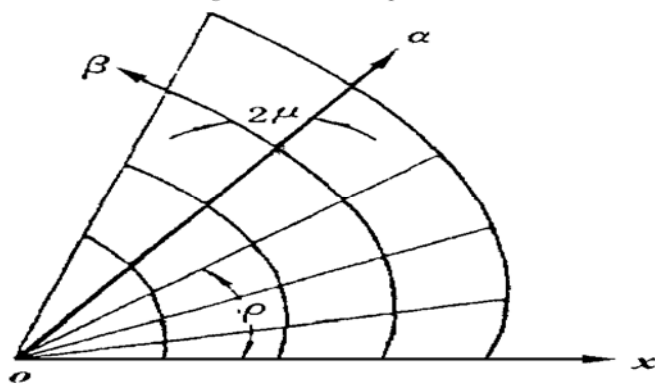


图 2 扇形滑移线场示意图

Fig. 2 Sketch of the fan shaped slip line field

再以极点为原点建立直角坐标系 YOY , 则 β 线的方程可写成如下参数方程

$$x = r \cos \rho \quad y = r \sin \rho \quad (11)$$

由此参数方程不难求出 β 线的曲率及曲率半径。

首先由 $y' = dy/dx = (dy/d\rho)/(dx/d\rho)$ 可以得出

$$y' = \frac{\tan \varphi \sin \rho + \cos \rho}{\tan \varphi \cos \rho - \sin \rho} \quad (12)$$

$$(1 + y'^2)^{1/2} = \frac{1}{\cos \varphi | \tan \varphi \cos \rho - \sin \rho |} \quad (13)$$

再由 $y'' = d^2y/dx^2 = (d^2y/d\rho^2)/(dx/d\rho)$ 有

$$y'' = \frac{1 + y'^2}{r(\tan \varphi \cos \rho - \sin \rho)} \quad (14)$$

再由曲率半径的定义^[3]

$$|R_{\beta}| = (1 + y'^2)^{3/2} / |y''| \quad (15)$$

将上列式(12)、(13)及(14)代入得

$$|R_{\beta}| = \frac{r}{\cos \varphi} \quad (16)$$

显然, 由于 α 线就在径线方向, 再注意到讨论滑移线时对曲率半径的正负规定, 我们自然得到 $\partial R_{\beta} / \partial S_{\alpha} = -1 / \cos \varphi$ 。这就再次证明了笔者所得结论的正确性。

所以对于摩擦材料, 关于其滑移线性质的 Hencky 第二定理应表述为: 如沿某一滑移线移动, 则另一族滑移线在交点处的曲率半径的变化等于沿该滑移线移动的距离除以内摩擦角的余弦。当摩擦角为零, 我们自然得到 Hencky 第二定理的经典形式。

由 Hencky 第二定理还可以知道, 对于滑移线网中一网眼的任一对对边, 如不都是直线, 则其长度必不相等。据此我们可以说, 在文献中见到的由曲边平行四边形所构成的滑移线网严格讲是不正确的。

(本文被录用后, 笔者从编辑部得知华林先生也曾对此定理给出证明。)

参 考 文 献

- 1 龚晓南. 土塑性力学. 浙江大学出版社, 1990
- 2 徐秉业, 陈森灿. 塑性理论简明教程. 清华大学出版社, 1981. 239~ 241
- 3 樊映川等编, 高等数学讲义(上册), 高等教育出版社, 1964. 325~ 329

对“Hencky 第二定律的探讨”讨论的答复

张振营

(青岛建筑工程学院建工系, 青岛, 266033)

非常感谢侯永峰同学, 龚晓南、宋二祥老师对“Hencky 第二定律的探讨”一文(以下简称拙作)进行讨论, 并指出论文中的一个重要性质, 即滑移线的性质应该与材料的属性有关。下面简要叙述一下个人的研究思路, 并对讨论答复如下: *

(1) 笔者一直认为学术界的讨论、甚至争论是件非常有益的事, 它有助于解决更高层次的学术问题, 在这种思想指导下, 对 Hencky 第二定律在 Coulomb 材料中的适用性进行了探讨, 并给出了 Hencky 第二定律的一般表达式(见拙作中式(7)、式(12))。拙作刊出后, 笔者高兴地看到读者在关心研究这篇论文, 并给出了 Hencky 第二定律的另外一种表达式(见侯文式(7)、宋文式(2))。当然, 还可能有更多专家、学者也在关心研究这篇文章, 笔者恳切希望看到有更多同行对 Hencky 第二定律在 Coulomb 材料中的适用性展开广泛的讨论, 探讨 Hencky 第二定律的一般表达式究竟是什么样子, 如果能达到此目的, 这正是笔者的初衷。

(2) 侯文提到 G 点的位置问题, 这里作一说明: 拙作图 2 中的 H 点是 α 线与 β 线的交点, E 点是 AO 线与 α 线的交点, G 点

为 α 线在 E 点的切线与 β 线的交点, 由于研究的是两组无限接近的滑移线族, 所以有关系式: $AG \cong AH = \Delta S_{\beta}$ 。

(3) 在拜读了侯文与宋文的讨论稿后, 笔者也注意到拙作中的推导过程确有不合理之处, 拙作图 2 中的 $\angle ACA'$ 是直角没有给出数学上的证明, 当然关于是否直角这个问题还需作进一步的研究; 图 3 中 $LM = AH \cdot \Delta \theta_0$ 似乎有点勉强, 看来, $LM = AH \cdot \Delta \theta_0 / \cos \varphi$ 显得更合理一些。

(4) 侯文及宋文给出了 Hencky 第二定律的另外一种表达式(见侯文式(7)、宋文式(2)), 其表达式是否一定符合滑移线在 Coulomb 材料中的内在规律性, 滑移线的性质除了与材料的内摩擦角这一属性有关外, 是否还与另外属性有关? 现在应该是探索研究这一问题的时候了。正如卢肇均院士所说的(见文献[1]): “科学研究最主要的任务在于探索未知的自然规律”, 笔者希望越来越多的专家、学者、同行共同来关心研究这一课题。

参 考 文 献

- 1 卢肇均. 答张振营先生. 岩土工程学报, 1999, 21(2): 249