

“Hencky 第二定律的探讨”讨论之一

侯永峰 龚晓南

(浙江大学土木工程系, 杭州, 310027)

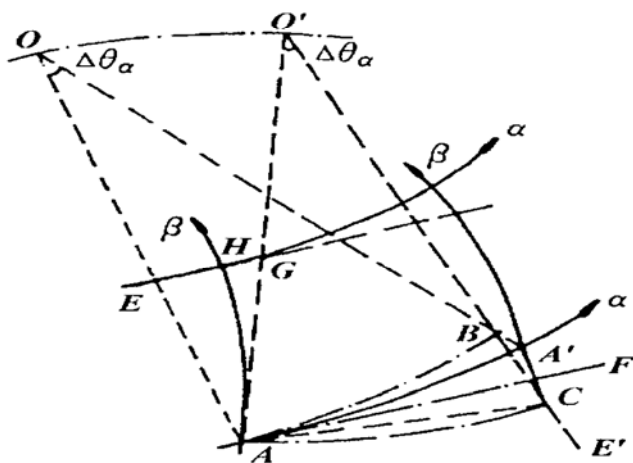
青岛建筑工程学院张振营老师在《岩土工程学报》1999年第2期发表的“Hencky 第二定律的探讨”一文(以下简称“张文”)。通过理论推导得出结论:沿 $\beta(\alpha)$ 线移动,则 $\alpha(\beta)$ 线曲率半径的变化等于沿 $\beta(\alpha)$ 线滑移的距离与 $\cos \varphi$ 的乘积,其中 φ 为土体的内摩擦角,即滑移线的性质与材料的属性有关。这一结论具有重要的理论和实用意义。但武汉汽车工业大学的华林老师曾于1995年发表的“岩土材料平面应变滑移线场的一个性质的探讨”一文^[1],与张振营研究的为同一问题,但文献[1]与张文结果不同,经研究,笔者认为文献[1]所采用的方法是正确的,而张文公式推导过程中存在某些问题,故提出来与作者商榷。

1 关于 $R_\alpha(R_\beta)$ 与 $\Delta S_\alpha(\Delta S_\beta)$ 的关系*

图1即张文图2,其中 $\Delta\theta_\alpha$ 为两条 β 线的转角。 AO 为 α 线在 A 点处的曲率半径, AO' 为 β 线在 A 点处的切线。作者根据三角形 ACA' 为直角三角形从而得出

$$R_\alpha \cdot \Delta\theta_\alpha \approx \Delta S_\alpha \cdot \sin 2\mu \quad (1)$$

$$\text{同理} \quad R_\beta \cdot \Delta\theta_\beta \approx \Delta S_\beta \cdot \sin 2\mu \quad (2)$$

图1 α, β 线Fig. 1 α, β slip lines

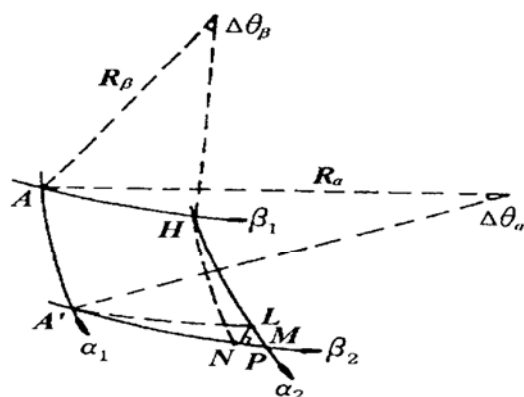
张文并没有给出证明为什么 $A'C$ 垂直于 AC ,而且为满足(1)式, $A'C$ 不但要垂直于 AC ,还必须是 β 线在 A' 点处的切线,此时 $\angle AA'C = 2\mu$ 。我们认为这两个条件是不能保证一定满足的。当 $\Delta\theta_\alpha \rightarrow 0$ 时,可以把曲线 AA' 看成是一段圆弧,即 $AA' \approx AB$,因为 $AB = R_\alpha \Delta\theta_\alpha$ 所以得

$$\left. \begin{aligned} R_\alpha \cdot \Delta\theta_\alpha &\approx \Delta S_\alpha \\ R_\beta \cdot \Delta\theta_\beta &\approx \Delta S_\beta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

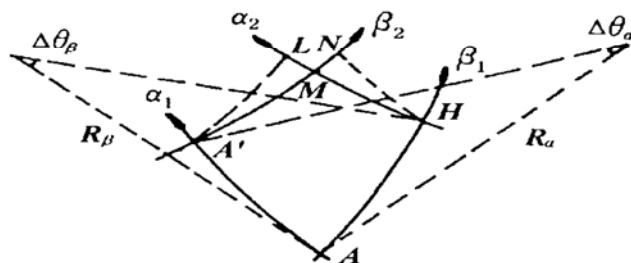
2 关于推导方法1

由图1得到 $AE = AG \sin 2\mu \approx AH \sin 2\mu = \Delta S_\beta \sin 2\mu$,但张文并没有给出 E 点的说明,笔者理解为 E 点是 AO 与 α 线的交点。

而且张文的“过 E 点作 α 线的切线交 β 线与 G 点”,而从图1中可以看到 G 点位于 AO' 线上,由文中利用的条件 $AH \approx AG$ 来判断, G 点应是 AO' 线与过 E 点的 α 线的切线的交点。而且文中利用的条件 $AH \approx AG$ 要求过 E 点的 α 线的切线经过 H 点。因为 H 点也是 α 线上的点,所以这是不可能的。如果将这些要求成立的条件完全归结到 $\Delta\theta_\alpha$ 很小上去,结果如何,值得商榷。



(a) 曲率半径增大



(b) 曲率半径减小

图2 公式推导示意图

Fig. 2 Steps for derivation of formula

3 关于推导方法2

在张文推导方法2中(参见图2,即张文图3),在求解 $\partial(\Delta S_\alpha)/\partial S_\beta$ 时利用了条件 $LM = AH \cdot \Delta\theta_\alpha$ 。而在三角形 $A'LM$ 中, $\angle A'LM = \frac{\pi}{2} + \varphi + \Delta\theta_\alpha$ 不是直角,所以直接采用 $LM = AH \cdot \Delta\theta_\alpha$ 显然并不合适。为了求出 LM ,可以过 L 点作 $A'M$ 的垂线 LP 交 $A'M$ 于 P 点, $LP = |A'L \cdot \Delta\theta_\alpha| \approx |AH \cdot \Delta\theta_\alpha|$, $LM = LP / \cos \varphi \approx |AH \cdot \Delta\theta_\alpha / \cos \varphi|$ 。因为在图2(a)中 $\Delta\theta_\alpha < 0$,所以

$$LM = -AH \cdot \Delta\theta_\alpha / \cos \varphi \quad (4)$$

将推导方法2按上述方法修正后,可得到如下的结果
对式(3)的第1式两边分别对 S_β 求导,

$$\text{左边: } \frac{\partial(R_{\alpha}\Delta\theta_{\alpha})}{\partial S_{\beta}} = \Delta\theta_{\alpha} \frac{\partial R_{\alpha}}{\partial S_{\beta}} \quad (5)$$

$$\text{右边: } \frac{\partial(\Delta S_{\alpha})}{\partial S_{\beta}} = \frac{-AH\Delta\theta_{\alpha}/\cos\varphi}{AH} = \frac{-\Delta\theta_{\alpha}}{\cos\varphi} \quad (6)$$

左边=右边,由 Hencky 第一定律知,两条 $\beta(\alpha)$ 线之间的转角不变,故将 $\Delta\theta_{\alpha}$ 约去后得

$$\frac{\partial R_{\alpha}}{\partial S_{\beta}} = -\frac{1}{\cos\varphi} \quad (7)$$

$$\text{同理: } \frac{\partial R_{\beta}}{\partial S_{\alpha}} = -\frac{1}{\cos\varphi} \quad (8)$$

修正后的推导方法 2 与文献[1]中的方法基本相同,所得结果也是一致的,文献[1]是直接从曲线曲率半径的定义出发,其推导过程更加清楚明白,而且还给出了例证,有兴趣的同志可以参考文献[1]。

参 考 文 献

- 1 华林. 岩土材料平面应变滑移线场的一个性质的探讨. 武汉工学院学报, 1995, 17(1): 77~79
- 2 龚晓南编著. 土塑性力学. 杭州: 浙江大学出版社, 1990. 223~228

摩擦材料滑移线性质的 Hencky 第二定理及其证明 ——兼与张振营先生商榷

宋二祥

(清华大学土木工程系, 北京, 100084)

滑移线法是求解极限荷载的一个重要方法。关于滑移线的性质有著名的 Hencky 第二定理。经典形式的 Hencky 第二定理是针对金属一类的非摩擦材料提出的, 其文字表述为: 如沿某一滑移线移动, 则另一族滑移线在交点处的曲率半径的变化等于沿该滑移线移动的距离。用公式表达则为

$$\frac{\partial R_{\alpha}}{\partial S_{\beta}} = -1 \quad \frac{\partial R_{\beta}}{\partial S_{\alpha}} = -1 \quad (1)$$

这里曲率半径的正负如下规定: 当曲率中心在滑移线长度 S_{β} (或 S_{α}) 增加的方向时 R_{α} (或 R_{β}) 为正。

笔者在对研究生讲解“土力学理论与数值方法”的过程中注意到, 有些文献认为对摩擦材料这一定理的经典形式仍然成立, 并给出证明^[1]。笔者对此有不同见解, 并进行了深入的探讨, 得出不同的结论, 认为对摩擦材料 Hencky 第二定理用公式表达应为

$$\frac{\partial R_{\alpha}}{\partial S_{\beta}} = -\frac{1}{\cos\varphi} \quad \frac{\partial R_{\beta}}{\partial S_{\alpha}} = -\frac{1}{\cos\varphi} \quad (2)$$

恰在此时, 看到张振营先生在《岩土工程学报》1999 年第 2 期发表的“Hencky 第二定律的探讨”一文(以下简称“张文”), 也认为对摩擦材料 Hencky 第二定理有不同的形式, 这引起笔者的极大兴趣。然而, 在拜读张文之后, 笔者发现张文得出的定理形式与本人的很不相同, 用公式表示为

$$\frac{\partial R_{\alpha}}{\partial S_{\beta}} = \pm \cos\varphi \quad \frac{\partial R_{\beta}}{\partial S_{\alpha}} = \pm \cos\varphi \quad (3)$$

对张文的这一结论, 笔者不能认同。所以, 下面首先就张文存在的几个问题提出个人的看法, 然后给出自己关于摩擦材料的 Hencky 第二定理(式 2)的完整证明。

1 张文存在的问题*

(1) 问题 1

张文在推理过程中首先证明了下列关系(见张文的式 2)

$$R_{\alpha}\Delta\theta_{\alpha} \approx \Delta S_{\alpha}\sin 2\mu \quad R_{\beta}\Delta\theta_{\beta} \approx \Delta S_{\beta}\sin 2\mu \quad (4)$$

这里 $2\mu = 90^{\circ} - \varphi$, 是两组滑移线间的夹角, φ 是土的内摩擦角。类似关系式在其他一些文献中也可见到, 但笔者认为这是不正确的。

我们知道, 按曲率半径的数学定义 α, β 滑移线的曲率半径 R_{α}, R_{β} 应分别符合下列二式

$$\frac{1}{R_{\alpha}} = \frac{\partial\theta}{\partial S_{\alpha}} \quad \frac{1}{R_{\beta}} = -\frac{\partial\theta}{\partial S_{\beta}} \quad (5)$$

这里 θ 为 α 或 β 滑移线上任一点的切线对 x 轴的倾角, 并以逆时针为正。曲率半径的正负如前所述。对 α, β 线的正向规定只需注意其相对方位, 即 α 正向落后于 β 正向一个小于等于 90° 的角。满足这些规定时, 上式的正负号是正确的。

由此定义式自然可以得出

$$R_{\alpha}\Delta\theta_{\alpha} \approx \Delta S_{\alpha} \quad -R_{\beta}\Delta\theta_{\beta} \approx \Delta S_{\beta} \quad (6)$$

这是式(5)的增量形式, 不应存在什么疑问。实际上, 一条曲线的线元长度、曲率半径及该线元两端切线(或法线)夹角间的关系, 不应与它和另一曲线的交角有关。笔者注意到张文将 $\Delta\theta_{\alpha}$ ($\Delta\theta_{\beta}$) 定义为两条 $\beta(\alpha)$ 线的转角, 但只要注意到 α 线与 β 线的交角为常数, 则不难看出 $\Delta\theta_{\alpha}$ ($\Delta\theta_{\beta}$) 也是(在谈论曲率时首先应该是) $\alpha(\beta)$ 线元两端切线的夹角。

从另一方面来看如果张文所提出的关系式(式 4)成立, 那么分别将那里的二个关系式的两边除以 ΔS_{α} 或 ΔS_{β} 并取极限, 则得到与曲率定义式(5)矛盾的结果。

张文之所以得出上述不正确的关系式, 是因其推理过程有缺陷。张文在证明过程中, 采用了较复杂的辅助图形(即张文的图 2), 认为其中的三角形 $A'CA$ 为直角三角形, 这是不对的。直线 $O'C$ 与 AC 是垂直的, 但说 $A'C$ 与 AC 垂直, 并无根据。(事