

成层地基一维土层地震反应解析解^{*}

General solution to the soil seismic response on stratified foundations

高玉峰

(浙江大学土木工程系, 杭州, 310027)

金建新

(同济大学建筑工程系, 上海, 200092)

谢康和 王朝晖

(浙江大学土木工程系, 杭州, 310027)

中图法分类号 TU 435

作者简介 高玉峰, 男, 1966 年生, 副研究员, 博士研究生。主要从事土动力学方面的研究。

1 前言^{*}

对于土层地震反应, 只有当模型简单时, 才可以得到封闭解析解或半解析解。假定地震输入是竖直向上入射的平面剪切波, 土层地震反应问题常简化为一维波动问题, 对于变参数一维土层地震反应, 可从两个方面求解解析解或半解析解: 一是针对单层地基, 假定模型参数随深度变化规律已知进行求解^[1, 2]; 二是针对成层地基, 每层土层取不同模型参数进行求解^[3~5]。文献[3~5]采用的是等效线性化解法或传递矩阵解法, 属于半解析解。本文针对成层地基, 把基岩输入地震化作边界静止不动而在计算域各点上作用着惯性力的问题进行计算, 建立了成层地基一维土层地震反应定解问题, 并给出了成层地基在任意基岩地震输入作用下, 时间域内一维土层地震反应封闭解析解。

2 定解问题的建立

设地基地面水平, 土层分为 M 层, 厚度分别为 $H_1, H_2, \dots, H_M$; 密度分别为 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_M$; 阻尼系数分别为 $c_1, c_2, \dots, c_M$; 动剪切模量分别为 $G_1, G_2, \dots, G_M$ 。基岩面有一水平向地震运动, 其水平位移为 $u(t)$, 速度为 $\dot{u}(t)$, 加速度为 $\ddot{u}(t)$, 见图 1。

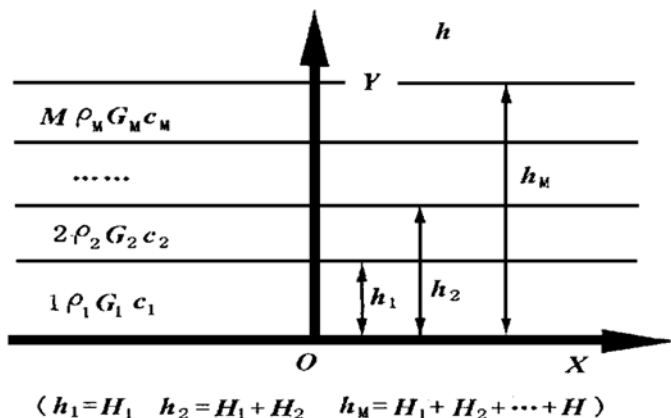


图 1 土层地震反应计算简图

Fig. 1 Analytic model for soil seismic response

考察地基内的一土柱, 其断面为 1, 取土柱微单元作动力平衡分析, 并把基岩输入地震化作边界静止不动而在计算域各点上作用着惯性力的问题进行计算, 各土层 X 向相对位移分别以 $V_1, V_2, \dots, V_M$ 表示。选取基岩面上一点作为坐标原点, 建立直角坐标系, 可得成层地基一维土层地震反应定解问题如下波动方程

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} + \frac{c_1}{\rho_1} \frac{\partial V_1}{\partial t} - \frac{G_1}{\rho_1} \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} = -\ddot{u}(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} + \frac{c_2}{\rho_2} \frac{\partial V_2}{\partial t} - \frac{G_2}{\rho_2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} = -\ddot{u}(t) \end{cases} \quad (2)$$

$$\dots\dots \begin{cases} \frac{\partial^2 V_M}{\partial t^2} + \frac{c_M}{\rho_M} \frac{\partial V_M}{\partial t} - \frac{G_M}{\rho_M} \frac{\partial^2 V_M}{\partial y^2} = -\ddot{u}(t) \end{cases} \quad (3)$$

边界条件及位移、应力连续条件

$$V_1 = 0 \quad (y = 0) \quad (4)$$

$$V_2 = V_1 \quad (y = h_1) \quad (5)$$

$$\dots\dots V_M = V_{M-1} \quad (y = h_{M-1}) \quad (6)$$

$$\frac{\partial V_M}{\partial y} = 0 \quad (y = h_M) \quad (7)$$

$$G_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} - c_2 \frac{\partial V_1}{\partial t} = G_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} - c_1 \frac{\partial V_1}{\partial t} \quad (y = h_1) \quad (8)$$

$$\dots\dots G_M \frac{\partial V_M}{\partial y} - c_M \frac{\partial V_M}{\partial t} = G_{M-1} \frac{\partial V_{M-1}}{\partial y} - c_{M-1} \frac{\partial V_{M-1}}{\partial t} \quad (y = h_{M-1}) \quad (9)$$

初始条件

$$V_1 = 0, \frac{\partial V_1}{\partial t} = 0 \quad (t = 0) \quad (10)$$

$$V_2 = 0, \frac{\partial V_2}{\partial t} = 0 \quad (t = 0) \quad (11)$$

$$\dots\dots V_M = 0, \frac{\partial V_M}{\partial t} = 0 \quad (t = 0) \quad (12)$$

一般基岩面地震加速度 $\ddot{u}(t)$ 可表示为有限傅里叶级

^{*} 浙江省自然科学基金资助项目 (No. 597063)

到稿日期: 1998-07-03

数形式^[6]

$$\ddot{u}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} [A_k \cos(D_k t) + B_k \sin(D_k t)] \quad (13)$$

$$A_k = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} a_m \cos \frac{2\pi km}{N} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} \quad (14)$$

$$B_k = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} a_m \sin \frac{2\pi km}{N} \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} \quad (15)$$

$$\dot{u}(t) = \frac{A_0 t}{2} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} [-\frac{B_k}{D_k} \cos(D_k t) + \frac{A_k}{D_k} \sin(D_k t)] \quad (16)$$

$$u(t) = \frac{A_0 t^2}{4} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} [-\frac{A_k}{D_k^2} \cos(D_k t) - \frac{B_k}{D_k^2} \sin(D_k t)] \quad (17)$$

$$D(k) = \frac{2\pi k}{N \Delta t} \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} \quad (18)$$

N 为采样点数, 奇数, 当 N 为偶数时, 要经处理变成奇数(如加上一个 0); Δt 为采样时间间隔, a_m ($m = 0, 1, \dots, N-1$) 是每个采样点对应的基岩面地震加速度值。

3 定解问题的求解

设定解问题(I)的解为

$$V_1(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_{1n} \sin(\lambda_{1n} y) + b_{1n} \cos(\lambda_{1n} y)] T_n(t) \quad (19)$$

$$\lambda_{1n} = \frac{2n+1}{2h_1} \pi \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (20)$$

$$V_2(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_{2n} \sin(\lambda_{2n} y - \frac{h_1 + h_2}{2} \lambda_{2n}) + b_{2n} \cos(\lambda_{2n} y - \frac{h_1 + h_2}{2} \lambda_{2n})] T_n(t) \quad (21)$$

$$L_2 = \frac{h_2 - h_1}{2} \quad (22)$$

$$\lambda_{2n} = \frac{n\pi}{L_2} \quad (23)$$

$$V_M(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_{Mn} \sin(\lambda_{Mn} y - \frac{h_{M-1} + h_M}{2} \lambda_{Mn}) + b_{Mn} \cos(\lambda_{Mn} y - \frac{h_{M-1} + h_M}{2} \lambda_{Mn})] T_n(t) \quad (24)$$

$$L_M = \frac{h_M - h_{M-1}}{2} \quad (25)$$

$$\lambda_{Mn} = \frac{n\pi}{L_M} \quad (26)$$

根据边界条件及位移、应力连续条件式(4)~(9)可得

$$\left. \begin{aligned} a_{1n} &= 1, & b_{1n} &= 0 \\ a_{2n} &= 0, & b_{2n} &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{Mn} &= 0, & b_{Mn} &= 0 \\ c_1 &= c_2 = \dots = c_M \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

将(19), (21), (24)分别代入(1), (2), (3)有

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t) + \frac{c_1}{\rho_1} T_n'(t) + \frac{\lambda_{1n}^2 G_1}{\rho_1} T_n(t)] \sin(\lambda_{1n} y) = -\ddot{u}(t) \quad (28)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t) + \frac{c_2}{\rho_2} T_n'(t) + \frac{\lambda_{2n}^2 G_2}{\rho_2} T_n(t)] \cos(\lambda_{2n} y - \frac{h_1 + h_2}{2} \lambda_{2n}) = -\ddot{u}(t) \quad (29)$$

$$\dots\dots\dots \sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t) + \frac{c_M}{\rho_M} T_n'(t) + \frac{\lambda_{Mn}^2 G_M}{\rho_M} T_n(t)] \cos(\lambda_{Mn} y - \frac{h_{M-1} + h_M}{2} \lambda_{Mn}) = -\ddot{u}(t) \quad (30)$$

利用三角函数的正交性可得

$$T_n''(t) + 2D_n \omega_n T_n'(t) + \omega_n^2 T_n(t) = f_n(t) \quad (31)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{M} (\frac{\lambda_{1n}^2 G_1}{\rho_1} + \frac{\lambda_{2n}^2 G_2}{\rho_2} + \dots + \frac{\lambda_{Mn}^2 G_M}{\rho_M})} \quad (第 n 振型圆频率) \quad (32)$$

$$D_n = \frac{(\frac{c_1}{\rho_1} + \frac{c_2}{\rho_2} + \dots + \frac{c_M}{\rho_M})}{2M \omega_n} \quad (第 n 振型阻尼比) \quad (33)$$

$$f_n(t) = S_{1n} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} [E_{nk} \cos(D_k t) + F_{nk} \sin(D_k t)] \quad (34)$$

$$S_{1n} = -\frac{A_0}{M \lambda_{1n} h_1} \quad (35)$$

$$E_{nk} = -\frac{2A_k}{M \lambda_{1n} h_1} \quad (36)$$

$$F_{nk} = -\frac{2B_k}{M \lambda_{1n} h_1} \quad (37)$$

采用待定系数法可求式(31)的特解 $T_n^*(t)$, 设

$$T_n^*(t) = S_{2n} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} [G_{nk} \cos(D_k t) + H_{nk} \sin(D_k t)] \quad (38)$$

将 $T_n^*(t)$ 代入(31)式得到

$$G_{nk} = \frac{W_1 E_{nk} - W_2 F_{nk}}{W_1^2 + W_2^2} \quad (39)$$

$$H_{nk} = \frac{W_2 E_{nk} + W_1 F_{nk}}{W_1^2 + W_2^2} \quad (40)$$

$$其中 \quad W_1 = -D_k^2 + \omega_n^2 \quad (41)$$

$$W_2 = 2D_n \omega_n D_k \quad (42)$$

$$S_{2n} = \frac{S_{1n}}{\omega_n^2} \quad (43)$$

式(31)的特征方程为

$$r^2 + 2D_n \omega_n r + \omega_n^2 = 0 \quad (44)$$

其特征根为

$$r_{1,2} = -D_n \omega_n \pm \sqrt{D_n^2 - 1} \omega_n \quad (45)$$

一般来说土层阻尼较小, 比较符合低阻尼时的情况。

下面给出 $D_n < 1$ 情况式(31)的解。

$$r_{1n} = -D_n \omega_n \quad (46)$$

$$r_{2n} = \sqrt{1 - D_n^2} \omega_n \quad (47)$$

(31)式的解为

$$T_n(t) = [C_{11n} \cos(r_{2n}t) + C_{12n} \sin(r_{2n}t)] e^{r_{1n}t} + T_n^*(t) \quad (48)$$

由初始条件(10)~(12)可知

$$T_n(0) = 0 \quad (49)$$

$$T_n'(0) = 0 \quad (50)$$

积分常数 C_{11n} , C_{12n} 可由(49)~(50)求得

$$C_{11n} + T_n^*(0) = 0 \quad (51)$$

$$r_{1n}C_{11n} + r_{2n}C_{12n} + T_n^{*'}(0) = 0 \quad (52)$$

解得

$$C_{11n} = -T_n^*(0) \quad (53)$$

$$C_{12n} = \frac{r_{1n}T_n^*(0) - T_n^{*'}(0)}{r_{2n}} \quad (54)$$

至此可得 X 方向相对位移

$$V(y, t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(\lambda_n y) & 0 \leq y \leq h_1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos(\lambda_n y - \frac{h_1 + h_2}{2} \lambda_n) & h_1 \leq y \leq h_2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos(\lambda_n y - \frac{h_{M-1} + h_M}{2} \lambda_n) & h_{M-1} \leq y \leq h_M \end{cases} \quad (55)$$

X 方向绝对位移、速度、加速度等于相对值与入射值之和。

4 算 例

基岩上覆盖一粘土层, 其厚度 30 m, 密度 1 900 kg/m³, 剪切波速随埋深的标准变化规律引用周锡元等^[7](1984)的统计结果

$$V_s = 242.5(1 + h)^{0.291}/H^{0.217}$$

式中 H 为覆盖层厚, m; h 为相应于波速 V_s 的土层深度, m。每一振型阻尼比均取 $D_n = 0.2$ 。基岩输入一人工地震波其加速度峰值为 1.25 m/s²、速度峰值为 0.13 m/s, 位移峰值为 0.134 m, 分数持时为 10 s、特征周期 0.4 s。应用本解析解所得结果如表 1。地表地震反应谱曲线如图 2。和基岩输入标准地震反应谱曲线相比, 中短周期反应谱差异较大, 长周期反应谱差异较小。

对于同一算例, 应用等效线性化方法进行求解, 所得结果列于表 1、图 2。可以看出: 解析解和等效线性化解所得的地表地震动峰值位移、分数持时非常接近; 解析解和等效线性化解所得的地表地震动峰值速度相差 16.7%, 峰值加速度相差 6.5%。由此可见, 解析解和等效线性化解所得的地震动峰值结果基本一致。但解析解所得地表地震反应谱短周期时出现峰值, 等效线性化解所得地表地震反应谱在中长周期时出现峰值。

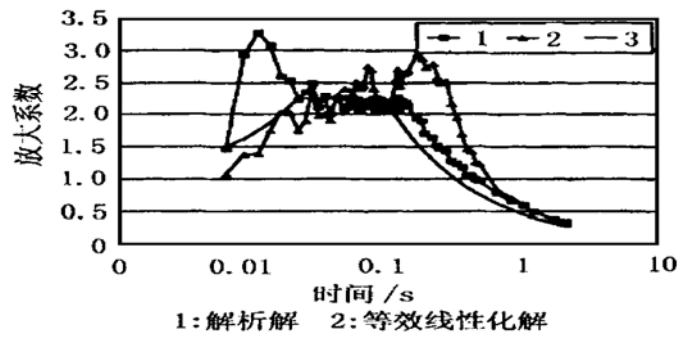


图 2 地表地震反应谱曲线

Fig. 2 Seismic spectrum curve of the ground

表 1 解析解与等效线性化解计算结果对比

Table 1 Difference between general solution and equivalent linearization solution

解法	加速度 /(m·s ⁻²)	速度 /(m·s ⁻¹)	位移 /m	持时 /s
成层地基解析解	1.299	0.135	0.129	9.60
等效线性化解	1.390	0.162	0.128	9.74

5 结 语

本文选取基岩面上一点作为坐标原点, 把基岩输入地震化作边界静止不动而在计算域各点上作用着惯性力的问题进行计算, 建立了成层地基一维土层地震反应定解问题, 并在时间域中, 给出了基岩任意输入地震作用下的解析解。最后应用本解析解对一算例进行了计算, 得到了地表地震动位移、速度、加速度值。应用本文所得解析解, 可以研究成层地基粘弹性地震响应特征。

参 考 文 献

- 1 Idriss I M, Seed H B. Seismic response of horizontal soil layers. J Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 1968, **94**(4): 1003~ 1031
- 2 Ikuo Towhata. Seismic wave propagation in elastic soil with continuous variation of shear modulus in the vertical direction. Soils and Foundation, 1996, **36**(1): 61~ 72
- 3 廖振鹏, 李小军. 地表土层地震反应的等效线性化解法. 见: 地震小区划理论与实践. 北京: 地震出版社, 1989
- 4 熊建国, 许贻燕. 分层土自振特性分析. 地震工程与工程振动, 1986, **6**(4): 21~ 35
- 5 栾茂田, 金崇磐, 林皋. 非均质地基振动特性及地震反应分析. 大连理工大学学报, 1992, **32**(1): 81~ 87
- 6 大崎顺彦著. 地震动的谱分析入门. 吕敏申, 谢礼立译. 北京: 地震出版社, 1980
- 7 周锡元, 王广军, 苏经宇. 场地分类和平均反应谱. 岩土工程学报, 1984, **6**(5): 59~ 68